Trends in Computational and Applied Mathematics

Trends in Computational and Applied Mathematics, **22**, N. 1 (2021), 31-39

Online version ISSN 2676-0029
www.scielo.br/tcam
doi: 10.5540/tcam.2021.022.01.00031

Coloração Total Absolutamente Equilibrada em uma Família de Grafos Regulares

ANGELO SANTOS SIQUEIRA[1,2], ABEL RODOLFO GARCÍA LOZANO[3], SERGIO RICARDO PEREIRA DE MATTOS[4*] e JHOAB NEGREIROS[5]

Recebido em 10 de dezembro de 2018 / Aceito em 30 de setembro de 2020

RESUMO. Neste trabalho introduzimos os conceitos de coloração total absolutamente equilibrada e composição de grafos. Provamos que para $n,k \in \mathbb{N}$, se $(k+1)|n$, existe um grafo k-regular conexo com n vértices que admite uma coloração total absolutamente equilibrada com no máximo $\Delta+2$ cores. Esse resultado mostra que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que possibilita a construção de uma família de grafos regulares, denominados grafos harmônicos. Em seguida, mostramos que todo grafo harmônico de grau k pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau k. Finalizamos, provando que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte, fato que implica que todo grafo desta família possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

Palavras-chave: grafos harmônicos, composição de grafos, conectividade de vértices.

1 INTRODUÇÃO

Em 2011, Friedmann et al [3] mostraram que se um grafo $G(V,E)$ possui uma coloração de vértices com folga de ordem Δ com t cores, então essa coloração pode ser estendida para uma coloração total de G com no máximo $t+1$ cores. Posteriormente, Lozano et al. [8] provaram que se um grafo regular admite uma coloração com folga de ordem Δ com $\Delta+1$ cores, então a coloração de vértices pode ser completada para uma coloração total equilibrada com no máximo $\Delta+2$ cores. Em 2016, Lozano, Siqueira e Mattos [5] apresentaram uma heurística, baseada

*Autor correspondente: Sergio Ricardo Pereira de Mattos – E-mail: rickdemattos@unigranrio.edu.br
[1]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
[2]Unigranrio, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: abel.garcia.lozano@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-7607-5928
[3]Unigranrio, Curso de Matemática, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: rickdemattos@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-2156-4772
[4]Unigranrio, Programa de Pós-Graduação em Humanidades, Culturas e Artes, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: asiqueira@unigranrio.edu.br https://orcid.org/0000-0001-6713-4570
[5]Unigranrio, Curso de Matemática, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: jhoabnegreiros@gmail.com https://orcid.org/0000-0001-9628-6688

no conceito de famílias consistentes, para coloração total de grafos, que satisfaz a conjectura de Vizing-Behzad. O objetivo geral do presente trabalho é apresentar duas formas distintas de se obter famílias de grafos regulares que admitem coloração total absolutamente equilibrada, e apresentar uma importante propriedade desta família de grafos.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente revisamos conceitos básicos de grafos e coloração, e apresentamos alguns resultados referentes à coloração de vértice com folga de ordem Δ que garantem uma extensão natural para coloração total com no máximo $\Delta+2$ cores, que no caso dos grafos regulares é absolutamente equilibrada [3, 8]. Em seguida, mostramos como construir a família dos grafos harmônicos sem utilizar o conceito de produto funcional de grafos [10]. Finalizamos, apresentando um resultado relacionado ao invariante conectividade, mostrando que os grafos harmônicos possuem conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção, apresentamos definições básicas e terminologias da teoria dos grafos utilizadas no decorrer do trabalho, e que podem ser encontradas em [1, 2].

Um **grafo simples** $G(V,E)$ é uma estrutura composta por um conjunto V de **vértices** e um conjunto E de **arestas**, tais que V é finito não vazio e E é formado por subconjuntos de dois elementos de V. Representamos, respectivamente, por $|V|$ ou n e por $|E|$ ou m, os números de vértices e arestas de um grafo. Dados u e v, vértices quaisquer de $G(V,E)$ se existir a aresta $\{u,v\}$, escreveremos uv. Se $\{u,v\} \in E(G)$, então dizemos que a aresta é incidente a u e v, que u e v são adjacentes, e que u é vizinho de v. Para cada vértice v, o número de arestas incidentes em v é dito **grau do vértice** e é representado por $d(v)$. O conjunto de vizinhos de um vértice v de G é denotado por $N_G(v)$ ou simplesmente $N(v)$. O número $\Delta(G) = max\{d_G(v) : v \in V\}$ é o grau máximo de G. Se todos os vértices de um grafo G tem o mesmo grau k, então G é **k-regular** ou simplesmente **regular**. Se um grafo G com n vértices é **(n-1)-regular**, então ele é denominado **grafo completo de ordem n** e denotado por K_n. Um **caminho** em um grafo G é uma sequência finita e não nula $S = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_k, v_k$ cujos os termos são alternativamente vértices e arestas, tais que os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i, com $i = 1\ldots k$, e nenhum elemento de S se repete.

Dados dois grafos $G(V,E)$ e $G'(V',E')$, dizemos que G' é subgrafo induzido de G, se $V' \subset V$ e para todo par de vértices $u,v \in V'$ tem-se que $uv \in E'$, se e somente se $uv \in E$. Um grafo $G(V,E)$ é dito **conexo** se para todo par de vértices $x,y \in V$, existe um caminho que liga x e y, caso contrário, dizemos que G é **desconexo**. Se para cada par de vértices $x,y \in V$, existem pelo menos k caminhos disjuntos ligando x com y, então $G(V,E)$ é dito **k-conexo**. Uma **componente conexa** de um grafo é qualquer subgrafo induzido conexo. Um vértice v em um grafo conexo é um **vértice de corte**, se ao removê-lo o grafo torna-se desconexo.

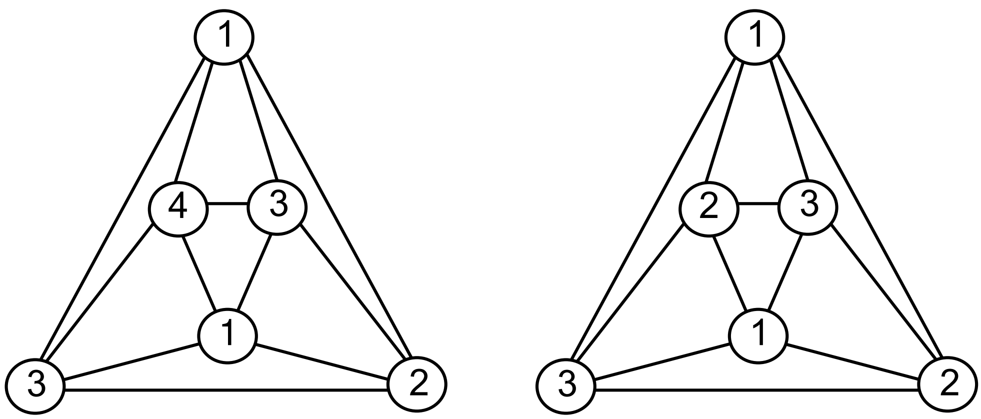
3 COLORAÇÃO EM GRAFOS

Nesta seção, apresentamos as definições de coloração de vértices, de arestas, coloração com folga, coloração total e introduzimos o conceito de coloração total absolutamente equilibrada, que servirão de suporte para o restante do trabalho. Estes conceitos, assim como propriedades e resultados referentes a essas colorações, podem se encontrados com maior profundidade e detalhamento em [3, 9, 11, 12].

A **coloração** é um problema clássico em teoria dos grafos. Dado um grafo $G(V,E)$, e um conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, uma coloração de G com os elementos de C é uma aplicação $c : A \subset (V \cup E) \to C$, tal que dois elementos adjacentes ou incidentes de A possuem sempre imagens distintas. Se $A = V$ é dita **coloração de vértices**, se $A = E$ é dita **coloração de arestas** e se $A = (V \cup E)$ é dita **coloração total**.

Uma coloração de $G(V,E)$ com as cores de $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ é **equilibrada** se, para todo par de cores c_i e c_j, tal que $i \neq j$, tem-se $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$ com $i, j = 1, \ldots k$ e $a(c_i)$ e $a(c_j)$ representam, respectivamente, os números de aparições das cores c_i e c_j na coloração.

Definição 3.1. *Dado um grafo $G(V,E)$, um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ e uma coloração $c : S \subseteq (E \cup V) \to C$ de G. A coloração c é* ***absolutamente equilibrada*** *se, para todo par de cores tal que $i \neq j$, tem-se $a(c_i) = a(c_j)$.*



(a) Coloração Equilibrada

(b) Coloração Absolutamente Equilibrada

Figura 1

Definição 3.2. *Seja um grafo $G(V,E)$ e um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_p\}$ com $p \in \mathbb{N}$, seja ainda $|c(N(v))|$ a cardinalidade do conjunto de cores da vizinhança de v, uma aplicação $f : V \to C$ é uma* ***coloração de vértices com folga de ordem k*** *de G se para todo $v \in V$:*

- *se $d(v) < k$, então $|c(N(v))| = d(v)$;*
- *se $d(v) \geq k$, então $|c(N(v))| \geq k$.*

Observe que na coloração de vértices com folga de ordem k, os vértices com grau menor que a k devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas; já os de grau igual ou maior do que k

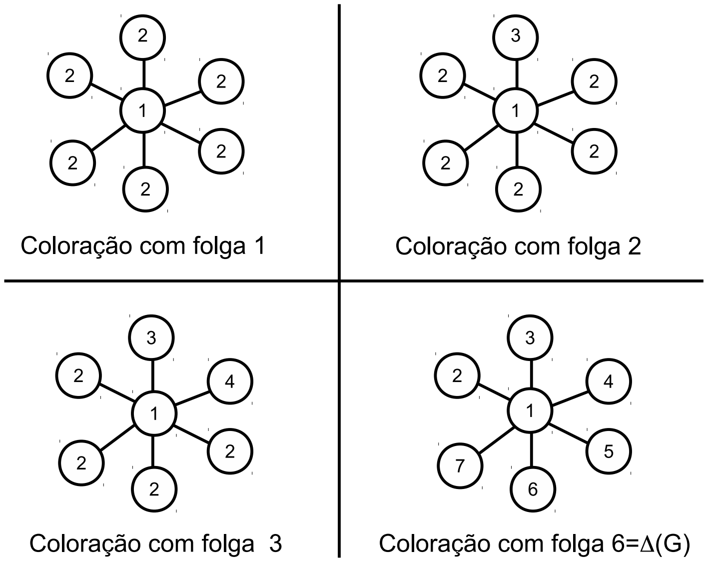


Figura 2: Coloração com folga de ordem 1, 2, 3 e $6 = \Delta(G)$, respectivamente.

devem utilizar pelo menos k cores na coloração de sua vizinhança. Para $k = 1$, temos a coloração usual de vértices e para $k = \Delta$ temos a coloração 2-distante [9].

4 RELAÇÃO ENTRE COLORAÇÃO COM FOLGA E COLORAÇÃO TOTAL ABSOLUTAMENTE EQUILIBRADA EM GRAFOS REGULARES

Nesta seção, apresentamos três teoremas que têm como objetivo mostrar que se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta+1$ cores, então existe uma extensão da coloração com no máximo $\Delta+2$ cores e essa extensão é absolutamente equilibrada. Esses resultados podem ser encontrados em [3, 8].

Teorema 4.1. *[8] Sejam $G(V,E)$ um grafo regular e $c : V \to C = \{1,2,\dots\Delta+1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ. Então:*

(a) $\Delta+1$ *divide* $|V|$*;*

(b) Cada cor $i \in C$, é usada exatamente $\frac{|V|}{\Delta+1}$ vezes.

Teorema 4.2. *[3] Sejam $G(V,E)$ um grafo com grau máximo Δ e $c : V \to C = \{1,2,3,\dots k\}$, uma coloração com folga de ordem Δ de G. Então, existe uma coloração total de G com no máximo $k+1$ cores.*

Teorema 4.3. *[8] Sejam $G(V,E)$ um grafo regular e $c : V \to C = \{1,2,\ldots\Delta+1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ. Então, existe uma coloração total absolutamente equilibrada de G com no máximo $\Delta+2$ cores.*

5 GRAFOS HARMÔNICOS

Em 2013, Lozano et al. [4] introduziram o conceito de produto funcional de grafos e de grafos k-suporte para auxiliar na costrução dos grafos harmônicos. Mais tarde, Lozano et al. [6] mostraram que o produto funcional permite gerar infinitos grafos harmônicos, a partir de qualquer grafo regular. Nesta seção, apresentamos uma forma de se obter os grafos harmônicos sem utilizar o produto funcional de grafos [10], mostramos que existe uma relação entre a regularidade e número de vértices do grafo que possibilita a construção dos grafos harmônicos. Em seguida, provamos que todo grafo harmônico de grau k pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau k. Finalizamos, provando que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.

Definição 5.3. *[8] Um grafo $G(V,E)$ regular é dito* ***harmônico****, se admite uma coloração de vértices com folga Δ com $\Delta+1$ cores.*

Teorema 5.4. *[10] Sejam n e $k \in \mathbb{N}$, se $(k+1)|n$, então existe um grafo conexo harmônico k-regular com n vértices.*

Proof. Sejam n, k e $t \in \mathbb{N}$ tais que $n = t \cdot (k+1)$, se $t = 1$, então o grafo K_n é o grafo procurado. Caso contrário, vamos construir o grafo $G(V,E)$ como se segue:

Seja $V = \{v_{10},\ldots,v_{1k},v_{20},\ldots,v_{2k},\ldots,v_{t0},\ldots,v_{tk}\}$. Definimos o conjunto E de arestas da seguinte forma:

Dois vértices v_{ij} e $v_{i'j'}$, com $i,i' \in \{1,2,\ldots,t\}$ e $j,j' \in \{0,1,2,\ldots,k\}$, são adjacentes quando:

- Para $i = i^{'}$, se $j = 0$, então $j^{'} \neq 1$;
- Para $i^{'} = i+1$ $(mod\ t)$, se $j = 0$, então $j^{'} = 1$.

A cada vértice v_{ij}, damos a cor j do conjunto $\{0,1,2,\ldots,k\}$. O resultado é uma coloração com folga $\Delta(G)$ que utiliza $\Delta+1$ cores. Logo, o grafo G é harmônico. □

As figuras 3, 4, 5 e 6 ilustram a prova do Teorema 5.4. Para exemplificar, adotamos $n = 15$, $k = 4$ e $t = 3$.

Observe que todo grafo harmônico, por definição, satisfaz o Teorema 4.1. Nesse sentido, o resultado oferece uma condição necessária para existência dessa família de grafos regulares. Na sequência, introduzimos o conceito de **grafo composto** e apresentamos um resultado que mostra que todo grafo harmônico de grau k pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau k.

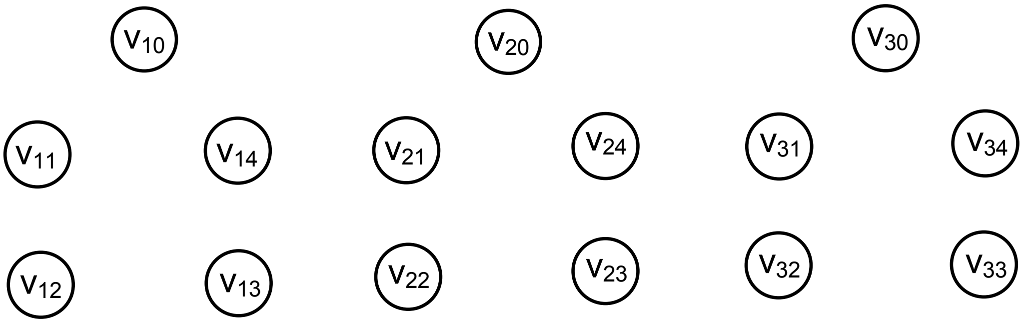


Figura 3: Conjunto de Vértices $V = \{v_{10}, \ldots, v_{14}, v_{20}, \ldots, v_{24}, \ldots, v_{t0}, \ldots, v_{34}\}$.

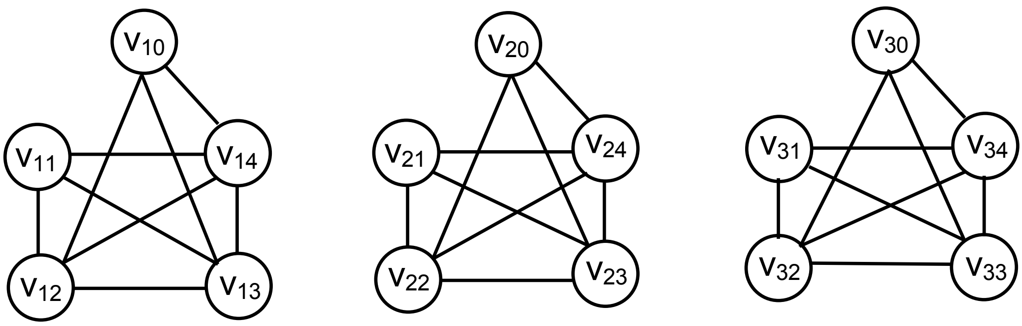


Figura 4: Conjunto de arestas de $G(V,E)$, de acordo com a primeira condição.

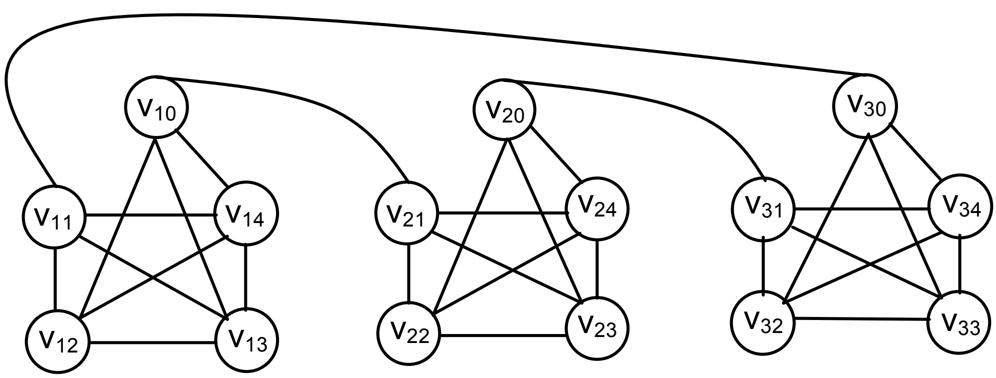


Figura 5: Conjunto de arestas de $G(V,E)$, de acordo com a primeira e a segunda condições.

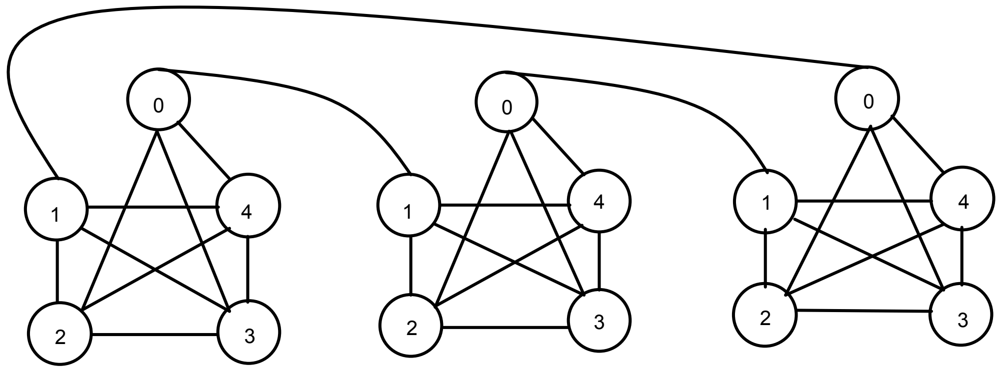


Figura 6: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

Definição 5.4. *Dados dois grafos harmônicos k-regulares $G_1(V_1,E_1)$ e $G_2(V_2,E_2)$, duas colorações com folga $c_1 : V_1 \to C = \{0,1,2,\ldots\Delta\}$ e $c_2 : V_2 \to C = \{0,1,2,\ldots\Delta\}$ e dois subconjuntos de arestas $S_1 = \{u_1v_1,\ldots u_kv_k\} \subset E_1$ e $S_2 = \{x_1y_1,\ldots x_ky_k\} \subset E_2$, tais que $c_1(u_i) = c_2(xi)$ e $c_1(v_i) = c_2(yi)$. O grafo $G(V,E)$, tal que $V = (V_1 \cup V_2)$ e $ab \in E$ se, somente se, uma das seguintes afirmações for verdadeira:*

1. $ab \in E_1$ *e* $ab \notin E_2$ *ou* $ab \in E_2$ *e* $ab \notin E_1$;

2. $a = u_i$ *e* $b = y_i$ *ou* $a = x_i$ *e* $b = v_i$ *para algum* $i \in \{1,2,\ldots k\}$.

*é chamado **grafo composto** por $G_1(V_1,E_1)$ e $G_2(V_2,E_2)$.*

Teorema 5.5. *Para todo grafo harmônico $G(V,E)$ não completo, existem dois grafos harmônicos $G_1(V_1,E_1)$ e $G_2(V_2,E_2)$ (não necessariamente conexos), tais que G é composto por G_1 e G_2.*

Proof. Seja $c : V \to C = \{0,1,2,\ldots\Delta\}$ uma coloração de G com folga Δ. Sejam $V_1 = \{v_0,v_1,\ldots v_\Delta\}$ um subconjunto de vértices, tal que $c(v_i) \neq c(vj)$ para todo $i,j \in C = \{0,1,2,\ldots\Delta\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $c(v_i) = i$; $i = \{0,1,2,\ldots\Delta\}$. Seja $G_1(V_1,E_1)$ o grafo induzido por V_1 e seja $G_2(V_2,E_2)$ o grafo induzido por $V - V_1$. Escolhemos um par de vértices $v_i, v_j \in V_1$, tal que $v_iv_j \notin E_1$. Como o grafo $G(V,E)$ é harmônico, existe um emparelhamento que satura os vértices com as cores $i, j \in C$ e existem vértices $x,y \in E_2$, tais que $c(x) = j$, $c(y) = i$ e $v_ix \in E$, $v_jy \in E$. Agora incorporamos uma aresta em E_1 e outra em E_2 da seguinte forma: $E_1 \to E_1 \cup \{v_iv_j\}$ e $E_2 \to E_2 \cup \{xy\}$. Repetimos esse processo até que G_1 seja um grafo completo. Logo, por construção G_1 e G_2 são os grafos procurados. □

Do Teorema 5.5 se obtém, de forma imediata, o seguinte colorário.

Corolário 5.5.1. *Todo grafo harmônico de grau k pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau k.*

Vale destacar que os grafos harmônicos apresentam propriedades relacionadas ao invariante conectividade que favorecem sua aplicação em sistemas computacionais multiagentes [7]. O próximo Teorema prova que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte, tem como consequência que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

Teorema 5.6. *Os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.*

Proof. Sejam $G(V,E)$ um grafo harmônico e $c : V \to C = \{0,1,2,\dots,\Delta\}$ uma coloração com folga Δ dos vértices de G. Suponhamos por absurdo que G possui um vértice de corte $u \in V$ e sem perder a generalidade suponhamos que o vértice u foi colorido com a cor 0. Seja $G'(V',E')$ uma das componentes conexas obtidas ao se retirar u do grafo G. Observe que as cores de $C - \{0\} = \{1,2,\dots,\Delta\}$ são usadas o mesmo número de vezes em G', pois em uma coloração com folga Δ todos os vértices adjacentes são coloridos com cores distintas, logo dadas duas cores arbitrárias $i \in C - \{0\}$ e $j \in C - \{0\}$ todo vértice de V' com a cor i possui um e somente um vizinho com a cor j. Denotemos por V_i' o conjunto de vértices de G' coloridos com a cor $i \in C$, seja $q = |V_i|$, $i \in C - \{0\}$ se $|V_0'| = q$, então todos os vértices de V' coloridos com cor diferente de 0 têm um vizinho em V_0', logo nenhum deles pode ser vizinho de u, o que é um absurdo. Se $|V_0'| < q$, então existem pelo menos Δ vértices de G' com cor diferente de 0 que não possuem vizinho em V_0'. Mas o número de vizinhos de u em G' é menor que Δ, logo existem vértices de V' com cor diferente de 0 que não tem vizinho com a cor 0, o que é um absurdo. □

Desse resultado se obtém o seguinte colorário.

Corolário 5.6.2. *Sejam $u, v \in V$ dois vértices quaisquer de $G(V,E)$, se G é um grafo harmônico, então existe um ciclo em G que contém u e v.*

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, introduzimos os conceitos de coloração total absolutamente equilibrada e composição de grafos. Mostramos que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que possibilita a construção de uma família de grafos regulares, denominada grafos harmônicos. Provamos que todo grafo harmônico de grau k pode ser obtido como composição sucessiva de grafos completos de grau k. Por fim, mostramos que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte e obtemos como consequência desse resultado o fato de que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

ABSTRACT. In this work we introduce the concepts of absolute equitable total coloring and graph composition. We prove that for $n,k \in \mathbb{N}$, if $(k+1)|n$, there is a connected k - regular graph with n vertices that admits a absolute equitable total coloring, with at most $Delta + 2$ colors. This result shows that there is a relationship between regularity and the number of vertices of the graph that makes it possible to build a family of regular graphs, called harmonic graphs. Then, we show that every harmonic graph of degree k can be obtained as successive composition of complete graphs of degree k. We conclude by proving that the harmonic graphs do not have a cut vertex, that implies that every graph of this family has vertex connectivity $\kappa(G) \geq 2$.

Keywords: harmonic graphs, graph composition, vertex connectivity.

REFERÊNCIAS

[1] J. Bondy & U. Murty. "Graph Theory with Applications". North-Holland, New York (1976).

[2] R. Diestel. "Graph Theory". Springer-Verlag, New York (1997).

[3] C. V. P. Friedmann, A. R. G. Lozano, L. Markenzon & C. F. E. M. Waga. Total coloring of Block-cactus graphs. *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, **78** (2011) 273–283.

[4] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. Jurkiewicz & C.V.P. Friedmann. Produto Funcional de Grafos. *TEMA*, **14** (2013), 221–232.

[5] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira & S. R. P. Mattos. Famílias Consistentes e a Coloração Total de Grafos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 5 (2017). DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0230.

[6] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. R. P. Mattos & S. Jurkiewicz. Produto funcional de grafos: um modelo para conexão de sistemas multiagentes. *TEMA*, **17** (2016), 341–352.

[7] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira & S. R. P. Mattos. Functional Product of Graphs and Multiagent Systems. *Global Journal of Science Frontier Research: Mathematics and Decision Sciences*, **17** (2017), 15–28.

[8] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, C. V. P. Friedmann & S. Jurkiewicz. Relationship between equitable total coloring and range coloring in some regular graphs. *Pesquisa Operacional*, **28** (2016), 161–171.

[9] A. R. G. Lozano, C. V. P. Friedmann, C. F. E. M. Waga & L. Markenzon. Coloração de Vértices com Folga. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XLI SBPO)*, Porto Seguro, Bahia, Brasil (2009).

[10] S. R. P. Mattos. "Produto Funcional de Grafos: Propriedades e Aplicações". Tese de Doutorado. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (2017).

[11] A. S. Siqueira. "Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares". Tese de Doutorado. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ (2011).

[12] H. Yap. "Total colourings of graphs". Springer, Berlin (1996).