

Grafos Associados aos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Regulares

C. MENDES DE JESUS

Recebido em 8 de junho de 2021 / Aceito em 7 de dezembro de 2021

RESUMO. A combinação entre cirurgias de emparelhamentos de arestas de polígonos regulares e a troca de arestas do grafo de emparelhamentos sobre a superfície, permite determinar de forma mais eficiente as famílias de grafos de emparelhamentos sobre superfícies fechadas e orientadas com gênero $g \geq 2$.

Palavras-chave: emparelhamentos de arestas, polígonos regulares, superfícies orientadas.

1 INTRODUÇÃO

Emparelhamentos de arestas de um polígono regular corresponde a uma aplicação quociente que identifica pares de arestas do bordo do polígono sobre uma superfície fechada. A imagem do bordo do polígono sobre a superfície corresponde a um grafo conexo imerso nesta superfície, cujo complemento é simplesmente conexo. Esse grafo é chamado *grafo de emparelhamentos de arestas de polígono regular*. Diante do breve exposto, surge uma pergunta natural: quais grafos conexos admitem um mergulho sobre uma superfície fechada e orientada, de forma que a sua imagem pode ser vista como algum grafo de emparelhamentos de arestas de um polígono regular? Em [6], Jorgensen-Naatanen mostraram que para o bitoro existem cinco grafos trivalentes não isomorfos, associados a oito diferentes emparelhamentos do polígono regular com 18 lados (ver Figura 7). Para o tritiro, Nakamura mostrou em [8] que existem 65 grafos trivalentes associados a 927 diferentes emparelhamentos do polígono regular com 30 lados. Esses grafos de emparelhamentos trivalentes podem estar relacionados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ (ver [1, 4, 5]).

Em [2], foram determinadas algumas famílias de grafos trivalentes associados a emparelhamentos de arestas em superfícies com gênero $g > 3$. Em [4], foram introduzidas duas cirurgias de emparelhamentos com grafos trivalentes, S_1 e S_2 (ver Figura 12), para determinar novos grafos de emparelhamentos para superfícies com gênero predeterminado. Essa técnica permitiu demonstrar que *todo grafo resultante dessas cirurgias entre um número finito de grafos de emparelhamentos*

trivalentes é também um grafo trivalente de emparelhamentos de arestas. Essas cirurgias permitem determinar as possíveis famílias de grafos com $4g - 2$ vértices, para $g > 3$, que podem ser decompostas nos grafos trivalentes determinados em [6] e [8]. Com o objetivo de determinar os possíveis grafos (trivalentes ou não) de emparelhamentos de polígonos regulares sobre uma superfície fechada e orientada, em [3] foram introduzidas a extensão e a contração de grafos sobre superfícies, provando que *todo grafo de emparelhamentos de arestas sobre uma superfície fechada e orientada, com gênero $g > 0$, pode ser obtido pela extensão, sobre a superfície, de algum grafo de emparelhamentos com único vértice e $2g$ arestas.*

Neste trabalho, foram introduzidas a nova cirurgia de emparelhamentos de arestas S_3 e a troca de arestas, sobre a superfície, no grafo de emparelhamentos de arestas. A combinação dos resultados apresentadas em [4] e [3], junto à cirurgia e à troca de arestas, contribuiu para otimizar a construção dos grafos de emparelhamentos, para $g > 1$, permitindo a determinação dos grafos K -regulares (todos os vértices possuem grau K), para $K > 2$ e $g > 3$. Para tanto, organiza-se o trabalho da seguinte forma: na Seção 2, é elaborado um resumo sobre grafos de emparelhamentos de arestas de polígonos regulares. Na Seção 3, apresentam-se a extensão e a contração de grafos e uma combinação destas, denominada como troca de arestas. Na Seção 4, exibe-se o resumo sobre as cirurgias introduzidas em [4], além de ser descrita a nova cirurgia S_3 , com os respectivos efeitos dessas cirurgias sobre os grafos trivalentes entre outros. Por fim, na Seção 5, demonstra-se o efeito sobre os emparelhamentos da combinação entre cirurgias entre emparelhamentos, extensões de grafos e troca de arestas.

2 EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS

Seja M_g uma superfície fechada e orientada com gênero g . Seja $\iota : G \rightarrow M_g$ um mergulho do grafo conexo G . A imagem $\iota(G)$ será denotado por \mathcal{G} . Em [3] foram introduzidas a extensão e a contração do grafo \mathcal{G} sobre a superfície M_g , aplicada aos grafos de emparelhamentos de arestas de polígonos regulares.

Seja $G(V, A)$, ou simplesmente G , um grafo com V vértices e A arestas. Alguns conceitos básicos sobre um grafo G , são

1. Um *ciclo* de comprimento n no grafo G é um caminho fechado $\{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$, onde os vértices v_1, \dots, v_n são todos diferentes.
2. Um *laço* no grafo G é uma aresta que conecta duas vezes o mesmo vértice.
3. O *grau* de um vértice v de G , denotado por $deg(v)$, é o número de arestas incidentes a v , sendo que o laço conta duas vezes no grau do vértice no qual é incidente.
4. G será dito grafo *K -regular* se todos os seus vértices tiverem grau K .
5. A *característica de Euler* de G é dada por $\chi(G) = V - A$.

O *gênero* do grafo G é o menor número g para o qual existe um mergulho de G em M_g . Se G tem gênero $m \leq g$, então existe um mergulho $\iota : G \rightarrow M_g$. O complemento do grafo \mathcal{G} em M_g será

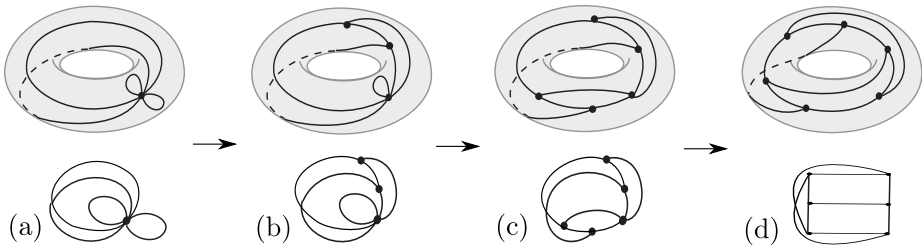


Figura 1: Exemplos de extensões de grafos sobre o toro.

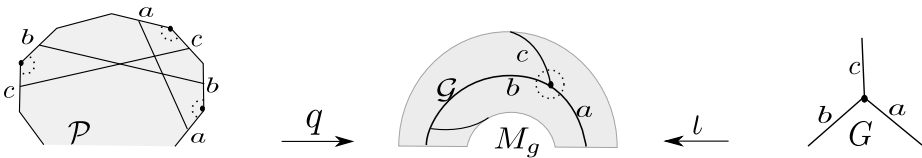


Figura 2: Exemplo local de emparelhamentos de arestas.

denotado por $M_g \setminus \mathcal{G}$. O número de componentes conexas de $M_g \setminus \mathcal{G}$ será denotado por F . Esse número é sempre menor que o número de ciclos do grafo e depende do mergulho $\iota : G \rightarrow M_g$. A característica de Euler de uma superfície fechada e orientada M_g é dada por $\chi(M_g) = 2 - 2g$. Se todas as F componentes de $M_g \setminus \mathcal{G}$ são regiões simplesmente conexas, então $\chi(M_g) = V - A + F$ e $\chi(G) = 2 - 2g - F$ (ver [7]).

Definição 2.1. Uma aresta $uv \in \mathcal{G}$ é dita uma *extensão do vértice* $w \in \mathcal{G}_1$ sobre a superfície M_g , quando os vértices $u, v \in \mathcal{G}$ e a aresta uv podem ser obtidos por um “estiramento” do vértice w . Nesse caso, dizemos que \mathcal{G} é uma *extensão* de \mathcal{G}_1 sobre M_g , ou que \mathcal{G}_1 é uma *contração* de \mathcal{G} (ver Figura 1).

Note que se w é uma contração da aresta uv , então $deg(w) = deg(u) + deg(v) - 2$. O estiramento de um vértice de grau 3 resulta em um vértice de grau 3 e um vértice de grau 2. Em [3], vimos que a extensão e a contração de grafos sobre uma superfície preservam o número de ciclos livres do grafo, denotado por $\beta = 1 - V + A$, e também não altera o número de componentes conexas do complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$, como se pode observar na Figura 1. Consequentemente, todo grafo conexo mergulhado em M_g , com β ciclos livres, pode ser contraído sobre M_g em um grafo com um único vértice e β arestas. Como exemplos, citam-se as sequências inversas na Figura 1.

Seja M_g uma superfície fechada, orientada e com gênero g e \mathcal{P} um polígono regular com $2A$ lados. Os emparelhamentos de arestas de polígonos regulares \mathcal{P} , sobre a superfície M_g , são aplicações quocientes $q : \mathcal{P} \rightarrow M_g$ que levam pares de arestas (a_i, a_j) , do bordo de \mathcal{P} , sobre um arco de curva α_s em M_g e leva k vértices de \mathcal{P} sobre um ponto v_n de M_g . A aplicação q é injetora no interior do polígono \mathcal{P} .

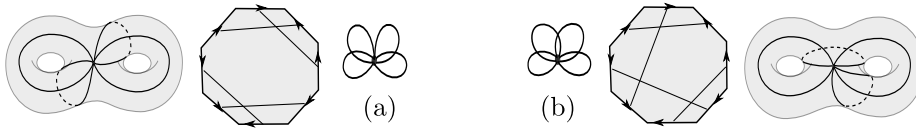


Figura 3: Exemplos de emparelhamentos canônicos sobre o bitoro.

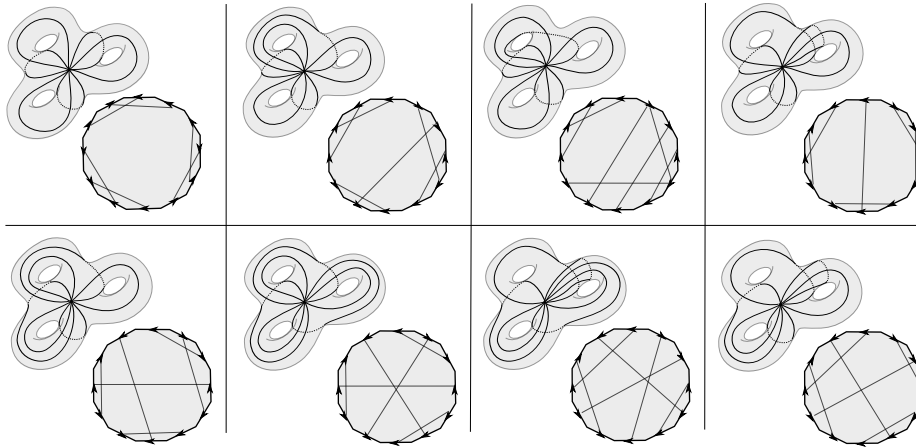


Figura 4: Exemplos de emparelhamentos canônicos sobre o tritoro.

O conjunto dos arcos de curvas α_s ($s = 1, \dots, A$) e os pontos v_n ($n = 1, \dots, V$) sobre M_g correspondem, respectivamente, às arestas e aos vértices do grafo \mathcal{G} , com V vértices e A arestas, e o número k corresponde ao grau do vértice v_n de \mathcal{G} .

Definição 2.2. Um grafo \mathcal{G} sobre M_g é dito *grafo de emparelhamentos de arestas do polígono* \mathcal{P} , se existe uma aplicação $q : \mathcal{P} \rightarrow M_g$, onde \mathcal{G} é a imagem do bordo de \mathcal{P} . Se \mathcal{G} tem único vértice, então \mathcal{G} será dito *grafo de emparelhamento canônico sobre M_g* .

Note que, em um emparelhamento canônico $q : \mathcal{P} \rightarrow M_g$, todos os vértices do polígono \mathcal{P} são identificados por q num único ponto sobre a superfície M_g . O próximo resultado é consequência imediata dos resultados provados em [3].

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{G}(V, A)$ um grafo de emparelhamentos de arestas. Então*

1. $V - A = 1 - 2g$.
2. Se $A = 2g$, então q é um emparelhamento canônico.
3. $A = V - 1$ se, e somente se, $M_g = \mathcal{S}^2$.

Definição 2.3. *Seja $\mathcal{G}(V, A)$ um grafo de emparelhamentos de arestas do polígono regular \mathcal{P} . Um diagrama de emparelhamentos de arestas associado a $\mathcal{G}(V, A)$ (ou a \mathcal{G}) é o conjunto de*

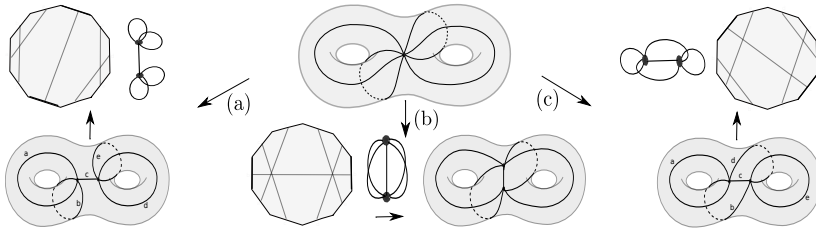


Figura 5: Exemplos de emparelhamentos sobre o bitoro com grafos 5- regulares.

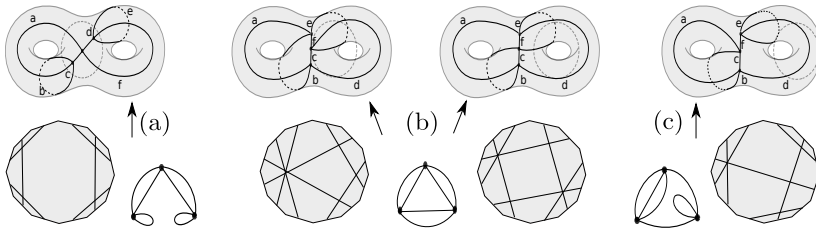


Figura 6: Diagramas de emparelhamentos sobre o bitoro com grafos 4- regulares.

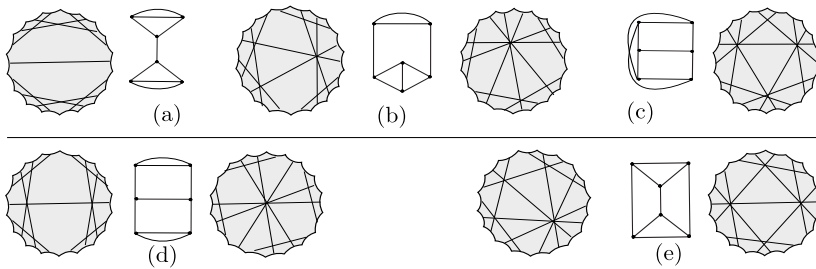


Figura 7: Diagramas de emparelhamentos sobre o bitoro com grafos trivalentes.

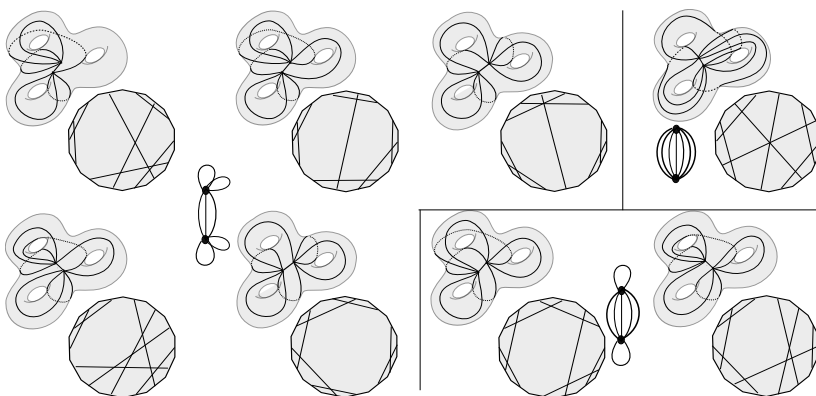


Figura 8: Exemplos de diagramas de emparelhamentos sobre o tritoro.

segmentos de retas sobre \mathcal{P} , onde cada segmento de reta conecta um par de aresta no bordo de \mathcal{P} que são identificados pela aplicação quociente $q: \mathcal{P} \rightarrow M_g$.

Definição 2.4. Sejam q_1 e q_2 dois emparelhamentos de arestas do polígono regular \mathcal{P} sobre a superfície M_g . Dizemos que q_1 e q_2 são equivalentes, se o diagrama associado a q_2 pode ser obtido do diagrama associado a q_1 por movimentos de rotação e reflexão sobre o plano.

Dois grafos associados a diferentes emparelhamentos de arestas podem ser isomorfos. A Figura 3 ilustra dois emparelhamentos canônicos não equivalentes sobre o toro, como se pode observar em seus diagramas, mas os grafos são isomorfos, pois ambos têm único vértice e o mesmo número de arestas. O mesmo ocorre com os emparelhamentos canônicos do tritoro ilustrados na Figura 4.

Os emparelhamentos de arestas com grafos K -regulares podem estar associados a alguma tesselação. Para $K = 3$ os grafos são chamados *grafos trivalentes* estão associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$, sendo que $12g - 6$ corresponde ao número total de lados do polígono e o número 3 corresponde ao número de vértices do polígono que são identificados em um único ponto de M , ou seja, o grau dos vértices do grafo.

Definição 2.5. Seja \mathcal{G} um grafo de emparelhamentos de arestas de um polígono regular. Se \mathcal{G} é K -regular, então diremos que \mathcal{G} é um *grafo de emparelhamentos de arestas K -regular*.

As Figuras 5, 6 e 7 ilustram diferentes diagramas com grafos de emparelhamentos K -regulares (não equivalentes) sobre o bitoro, para K igual a 5, 4 e 3, respectivamente. Sendo que os oito diagramas de emparelhamentos ilustrados na Figura 7, associados aos cinco grafos trivalentes (3-regulares), foram determinados por Jorgensen-Naatanen em [6]. A Figura 8 ilustra alguns diagramas (não equivalentes) com grafos de emparelhamentos 7-regular sobre o tritoro. Em [8], Nakamura determinou 927 diagramas de emparelhamentos associados a 65 grafos trivalentes (com 10 vértices e 15 arestas) sobre o tritoro. Alguns desses grafos trivalentes estão ilustrados na Figura 13.

Definição 2.6. Seja G um grafo conexo e $\iota: G \rightarrow M_g$ um mergulho. Nesse sentido, G é um *grafo de emparelhamentos de arestas sobre M_g* se o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ é uma região simplesmente conexa (homeomorfa a um disco).

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{G}(V, A)$ um grafo de emparelhamentos de arestas K -regular sobre a superfície M_g , do polígono regular \mathcal{P} com n lados. Então $V = \frac{2(2g-1)}{K-2}$, $A = \frac{K(2g-1)}{K-2}$ e $n = \frac{K(4g-2)}{K-2}$.*

3 EXTENSÃO DE GRAFOS E TROCA DE ARESTAS

A extensão e a contração de grafos foram introduzidas em [3]. Acrescenta-se a troca de arestas de grafos sobre uma superfície, que também é uma ferramenta para auxiliar na determinação de novos grafos de emparelhamentos.

O menor grau que pode ter cada vértice de um grafo K -regular de emparelhamentos de arestas é 3, pois um grafo 2-regular é homeomorfo ao círculo e não é grafo de emparelhamentos de

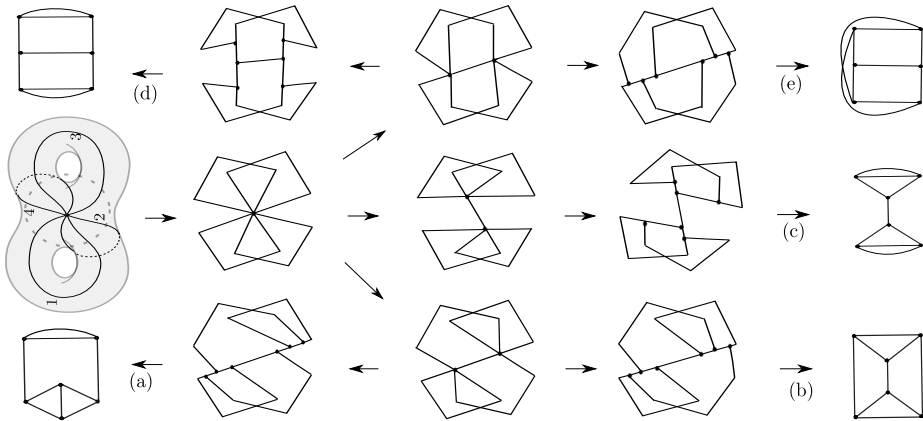


Figura 9: Exemplos de extensões de grafos sobre o bitoro.

arestas. A extensão de grafos pode determinar os mais diversos grafos de emparelhamentos, entre estes estão os grafos K -regulares.

Proposição 3.3. [3] *Todo grafo de emparelhamentos de arestas sobre a superfície M_g ($g > 0$) pode ser obtido pela extensão de algum emparelhamento canônico com grafo $\mathcal{G}(1, 2g)$ sobre M_g .*

A Figura 9 ilustra seqüências de extensões de grafos de emparelhamentos de arestas sobre o bitoro, partindo de um grafo emparelhamento canônico, chegando a cinco grafos trivalentes não isomorfos, determinados em [6]. Verifica-se que as extensões são feitas todas dentro de uma região homeomorfa a um disco sobre o bitoro.

A extensão de grafos sobre a superfície, além de ajudar na determinação dos possíveis grafos de emparelhamentos, também ajuda a determinar os possíveis diagramas de emparelhamentos. A proposta aqui não é determinar todos os possíveis grafos de emparelhamentos sobre M_g , para um dado g , nem determinar todos os possíveis diagramas de emparelhamentos associado a um determinado grafo de emparelhamento. O objetivo aqui é apresentar ferramentas que possam contribuir para a determinação dos grafos e dos diagramas de emparelhamentos para g predeterminado.

A extensão de grafos, a partir de um emparelhamento canônico, pode chegar a vários grafos isomorfos, que podem estar associados a emparelhamentos equivalentes ou não equivalentes. Determinar quais grafos que não são isomorfos pode exigir muito trabalho. Por exemplo, o tritoro tem pelo menos oito emparelhamentos canônicos diferentes, como ilustrado na Figura 4. Os emparelhamentos trivalentes não podem ser obtidos pela extensão de somente um dos emparelhamentos canônicos e não é fácil escolher em qual emparelhamento que será aplicado a extensão para obter o grafo desejado.

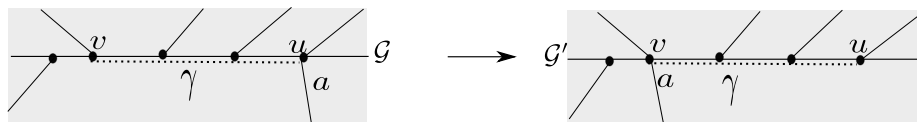


Figura 10: Exemplo local de troca de arestas no grafo.

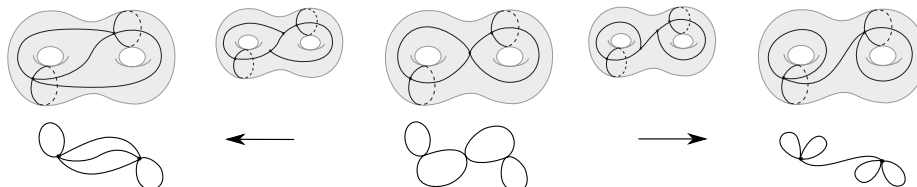


Figura 11: Exemplos de troca de arestas do grafo sobre o bitoro.

Se o objetivo é determinar por extensão de grafos todos os possíveis diagramas de emparelhamentos K -regulares sobre uma superfície M_g , uma sugestão é seguir o seguinte algoritmo:

1. Determinar todos os possíveis grafos de emparelhamentos canônicos sobre M_g .
2. Determinar todos os possíveis grafos K -regulares por extensões dos grafos canônicos sobre M_g .
3. Determinar os diagramas de emparelhamentos associados a esses grafos.
4. Para cada grafo, determinar o conjunto de diagramas não equivalentes.

Seja γ um caminho sobre o grafo \mathcal{G} com extremos nos dois vértices u e v , sobre a superfície M_g . Seja a uma aresta conectada ao vértice u em \mathcal{G} , onde $\text{deg}(u) > 3$. Suponha que exista um grafo \mathcal{G}' que difere de \mathcal{G} somente pela aresta a que conecta o vértice v em vez de conectar o vértice u (ver Figura 10).

Definição 3.7. O grafo \mathcal{G}' é obtido de \mathcal{G} pela *troca de aresta* entre os dois vértices u e v , sobre a superfície M_g , se ao arrastar a aresta a , de u para v ao longo do caminho γ , a aresta a não intercepta nenhuma outra aresta de \mathcal{G} , conforme ilustrado na Figura 10.

Note que a troca de arestas é composta por extensões e contrações de vértices sobre a superfície M_g , permitindo fazer as alterações nos grafos de uma forma mais rápida (ver Figura 11). A troca de arestas deixa invariante o número de componentes conexas de $M_g \setminus \mathcal{G}$, tendo-se, como consequência imediata, o referido resultado.

Proposição 3.4. *Todo grafo obtido por trocas de arestas de algum grafo de emparelhamento \mathcal{G} , sobre a superfície M_g , é também um grafo de emparelhamento sobre M_g .*

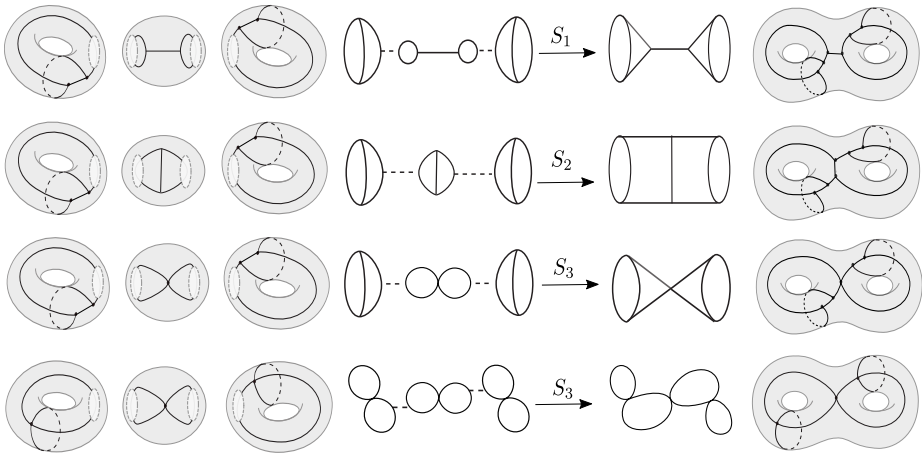


Figura 12: Exemplos de cirurgias entre emparelhamentos de arestas.

4 CIRURGIAS DE EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS

Em [4] foram introduzidas duas cirurgias de emparelhamentos trivalentes, denotadas por S_1 e S_2 . Essas cirurgias permitem obter famílias de grafos de emparelhamentos trivalentes, a partir de grafos de emparelhamentos já conhecidos. Faz-se um resumo sucinto de tais cirurgias, sem entrar em detalhes sobre os diagramas. Adicionalmente, é introduzida outra cirurgia, denotada por S_3 .

Sejam $q_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow M_{g_1}$ e $q_2 : \mathcal{P}_2 \rightarrow M_{g_2}$ emparelhamentos de arestas com os respectivos grafos associados \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 . Na cirurgia S_i ($i = 1, 2$) entre q_1 e q_2 , ocorre a soma conexa entre as superfícies M_{g_1} e M_{g_2} ao mesmo tempo que conecta os grafos $\mathcal{G}(V_1, A_1)$ e $\mathcal{G}(V_2, A_2)$. Denota-se a cirurgia S_i ($i = 1, 2$) entre q_1 e q_2 por $q_1 +_{S_i} q_2$, por $\mathcal{G}(V_1, A_1) \oplus_{S_i} \mathcal{G}(V_2, A_2)$ e $M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}$ os respectivos grafos e a superfície resultante da cirurgia S_i . Denota-se a superfície resultante da cirurgia S_i ($i = 1, 2, 3$) por $M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}$ e o grafo resultante dessa cirurgia por $\mathcal{G}(V_1, A_1) \oplus_{S_i} \mathcal{G}(V_2, A_2)$. Note que $M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}$ é homeomorfa a superfície $M_{g_1+g_2}$. As cirurgias S_1 e S_2 ocorrem da seguinte forma (ver Figura 12):

1. Considera-se uma superfície N homeomorfa a esfera com um grafo trivalente H com dois vértices. Retiram-se dois discos em N , obtendo uma superfície N' com dois bordos. Denota-se por H' o "subgrafo" obtido de H pela retirada dos dois arcos contidos nos discos. Os dois discos devem ser retirados de forma que H' seja conexo.
2. Retira-se de M_{g_i} ($i = 1, 2$) um disco centrado em uma aresta de \mathcal{G}_i , obtendo a superfície M'_{g_i} ($i = 1, 2$) com um bordo. Denota-se por \mathcal{G}'_1 e \mathcal{G}'_2 os respectivos "subgrafos" obtidos de \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , pela retirada dos arcos contidos nos discos.
3. Identifica-se um bordo de N' com o bordo da superfície M'_{g_i} , unindo ao mesmo tempo o grafo H' com os grafos \mathcal{G}'_1 e \mathcal{G}'_2 .

As regiões complementares aos subgrafos H' , \mathcal{G}'_1 e \mathcal{G}'_2 são todas simplesmente conexas. Em [4], foi mostrado que a união destas regiões, pela cirurgia, resulta em uma única região simplesmente conexa, como pode ser observado na Figura 12. As cirurgias são denotadas por:

S_1 : quando o grafo H tem dois laços (aresta conecta duas vezes o mesmo vértice) e os discos retirados de N estão centrados cada um em um dos laços de H .

S_2 : quando as três arestas do grafo H conectam os dois vértices e cada um dos discos retirados em N está centrado em uma aresta de H .

Proposição 4.5. *Sejam \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 grafos de emparelhamentos sobre as respectivas superfícies M_{g_1} e M_{g_2} . Então, o grafo $\mathcal{G}_j \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2$ ($i, j = 1, 2$), obtido pela cirurgia S_i , é um grafo de emparelhamento sobre a superfície $M_{g_1+g_2}$.*

Teorema 4.1. [4] *Todo grafo resultante de um número finito de cirurgias S_1 e S_2 entre grafos de emparelhamentos trivalentes é, também, um grafo de emparelhamento trivalente.*

Corolário 4.1.1. *Sejam $\mathcal{G}(V_1, A_1)$ e $\mathcal{G}(V_2, A_2)$ grafos de emparelhamentos trivalentes sobre as respectivas superfícies M_{g_1} e M_{g_2} . Então, o grafo $\mathcal{G}(V_1, A_1) \oplus_{S_i} \mathcal{G}(V_2, A_2)$ ($i = 1, 2$) é um grafo de emparelhamento trivalente sobre a superfície $M_{g_1+g_2}$.*

A Figura 13 ilustra grafos de emparelhamento trivalentes sobre o tritoro, obtidos por cirurgias S_1 e S_2 entre o grafo $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_i} \mathcal{G}(2, 3)$ ($i = 1, 2$) e o grafo $\mathcal{G}(2, 3)$. De acordo com os grafos sinalizados, nota-se que podem ocorrer grafos isomorfos, até mesmo para grafos obtidos de diferentes cirurgias entre grafos distintos.

Proposição 4.6. *Se $\mathcal{G}(2, 3)$ é um grafo de emparelhamento, então existe um grafo de emparelhamento trivalente (não isomorfo) resultante de $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_i} \mathcal{G}(2, 3)$ e 10 grafos de emparelhamentos trivalentes não isomorfos resultantes de duas cirurgias S_i ($i = 1, 2$) entre três grafos $\mathcal{G}(2, 3)$.*

Proof. A Figura 7 ilustra os possíveis grafos de emparelhamentos com seis vértices sobre o bitoro (ver [6]). Dois desses grafos podem ser obtidos pela cirurgia S_i ($i = 1, 2$) entre dois grafos base $G(2, 3)$, onde $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3)$ e $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} \mathcal{G}(2, 3)$ resultam em dois grafos não isomorfos. A Figura 13 ilustra os possíveis grafos de emparelhamentos com 10 vértices, que foram determinados em [8]. Os dois grafos $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3)$ e $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} \mathcal{G}(2, 3)$ são simétricos em relação a uma das arestas. Assim, é possível fazer três cirurgias S_i para $i = 1, 2$, entre $G(2, 3)$ e $G(2, 3) \oplus_{S_j} G(2, 3)$, para $j = 1, 2$. Qualquer outra cirurgia será equivalente a uma dessas. Note que, dos 12 grafos resultantes dessas cirurgias, um grafo de $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$ é isomorfo a um grafo de $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$. Dois grafos de $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$ são isomorfos a dois grafos de $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} \mathcal{G}(2, 3))$. Logo, dos 12 grafos, nove são não isomorfos. \square

Uma pergunta pode ser feita sobre tais cirurgias: são equivalentes os diagramas associados a grafos isomorfos obtidos de diferentes cirurgias de emparelhamentos? Para grafos trivalentes,

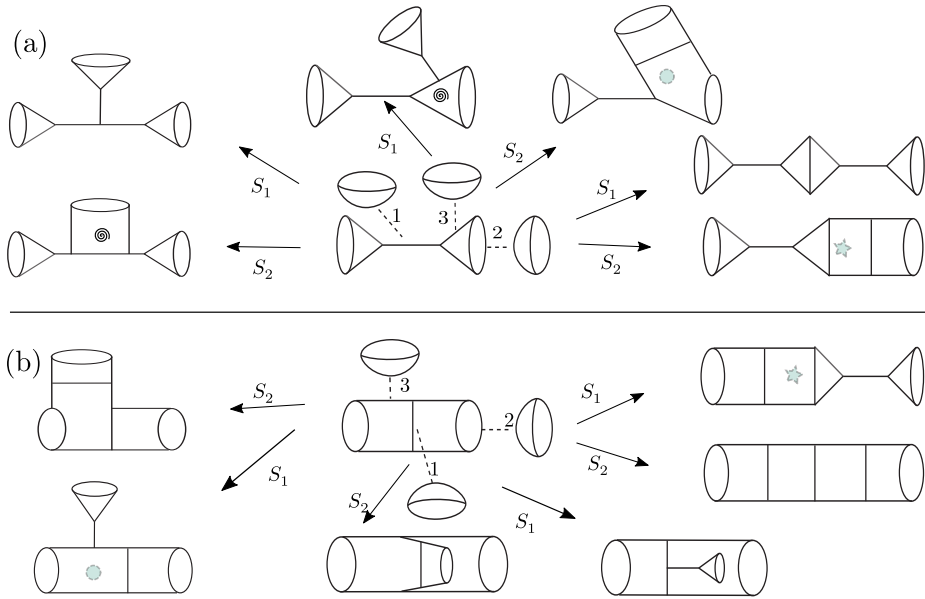


Figura 13: Exemplos de cirurgias de grafos de trivalentes

a resposta para $g = 2$ está em [6] e para $g = 3$ está em [8]. As técnicas apresentadas aqui não pretende responder qualquer caso para $g > 3$ e sim apresentar ferramentas que podem contribuir para este estudo.

Sejam $q_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow M_{g_1}$ e $q_2 : \mathcal{P}_2 \rightarrow M_{g_2}$ dois emparelhamentos de arestas com os respectivos grafos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 . Na cirurgia S_3 entre q_1 e q_2 , similar às cirurgias S_1 e S_2 (ver Figura 12), ocorre a soma conexa $M_{g_1} \#_{S_3} M_{g_2}$ ao mesmo tempo que ocorre a soma dos grafos $\mathcal{G}(V_1, A_1) \oplus_{S_3} \mathcal{G}(V_2, A_2)$. A cirurgia

S_3 : ocorre quando o grafo H em N (superfície homeomorfa a esfera que conecta M_{g_1} e M_{g_2}) tem um único vértice e dois laços. Os dois discos retirados em N , para obter a superfície N' e o "subgrafo" conexo H' , está centrado em um dos laços de H .

Na cirurgia S_3 é identificado o bordo de M'_{g_i} , com o "subgrafo" \mathcal{G}'_i ($i = 1, 2$), com um dos bordos de N' , unindo os "subgrafos" H' , \mathcal{G}'_1 e \mathcal{G}'_2 . Nessa identificação, une duas regiões de $N' \setminus H'$ com a região de $M_{g_i} \setminus \mathcal{G}'_i$ ($i = 1, 2$), sendo que cada uma das regiões de $N' \setminus H'$ identifica com um "lado" de $M_{g_i} \setminus \mathcal{G}'_i$, resultando na região simplesmente conexa complemento de $\mathcal{G}_1 \oplus_{S_3} \mathcal{G}_2$ (ver Figura 12). Uma consequência imediata é o seguinte resultado.

Lema 4.1. *Todo grafo resultante da cirurgia S_3 entre dois grafos de emparelhamentos de arestas \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 sobre as respectivas superfícies M_{g_1} e M_{g_2} é também um grafo de emparelhamento de arestas sobre a superfície $M_{g_1+g_2}$.*

Proposição 4.7. *Todo grafo resultante de n cirurgias S_3 entre grafos de emparelhamentos 4-regular $\mathcal{G}(1,4)$ sobre o toro é também um grafo emparelhamento de arestas 4-regular sobre o $n+1$ -toros.*

Proof. Se o grafo $\mathcal{G}(1,4)$ é um grafo de emparelhamento sobre o toro, então, pela Proposição 4.1, $\mathcal{G}(1,4) \oplus_{S_3} \mathcal{G}(1,4)$ é um grafo emparelhamento sobre o bitoro 4-regular, pois S_3 acrescenta um único vértice de grau 4. Da mesma forma, $\mathcal{G}(1,4) \oplus_{S_3} \mathcal{G}(1,4) \oplus_{S_3} \mathcal{G}(1,4)$ também é um grafo emparelhamento 4-regular sobre o tritoro, pela Proposição 4.1. Por indução, verifica-se que n cirurgias entre $n+1$ grafos $\mathcal{G}(1,4)$ é um grafo emparelhamento 4-regular sobre o $n+1$ -toro. \square

Como consequência imediata do Teorema 4.1 e do Lema 4.1

Teorema 4.2. *Todo grafo resultante de um número finito de cirurgias S_1 , S_2 e S_3 entre grafos de emparelhamentos é, também, um grafo de emparelhamento.*

5 CIRURGIAS, EXTENSÕES E TROCAS DE ARESTAS

As cirurgias permitem construir famílias de grafos a partir de grafos de emparelhamentos já conhecidos, enquanto a extensão e a contração de grafos podem determinar os possíveis grafos de emparelhamentos sobre M_g , por meio de um emparelhamento canônico com $2g$ arestas (ver [3]). Contudo, isso requer um trabalho exaustivo, a depender do tamanho de g . Combinar cirurgias com trocas de arestas, para $g \leq 3$, constitui uma técnica mais eficiente para a determinação de novos emparelhamentos. Uma consequência imediata é o resultado apresentado a seguir.

Teorema 5.3. *Todo grafo resultante da combinação de um número finito de cirurgias S_i ($i = 1, 2, 3$), entre grafos de emparelhamentos arestas, e de troca de arestas sobre superfície é, também, um grafo de emparelhamentos arestas.*

O emparelhamento de arestas com grafo 5-regular sobre o bitoro, como exibido na Figura 11, também pode ser obtido pela cirurgia S_3 entre dois emparelhamentos $\mathcal{G}(1,4)$ sobre o bitoro, passando pela extensão e contração de vértices para chegar ao emparelhamento 5-regular.

Proposição 5.8. *Sejam \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 grafos de emparelhamentos sobre as respectivas superfícies M_{g_1} e M_{g_2} e $\mathcal{G} \oplus_{S_i} \mathcal{G}$ o grafo obtido pela cirurgia S_i ($i = 1, 2, 3$) entre os dois emparelhamentos, então:*

1. *se \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos trivalentes, nota-se que o grafo obtido de $\mathcal{G} \oplus_{S_3} \mathcal{G}$ pela extensão é também um grafo de emparelhamento trivalente sobre $M_{g_1+g_2}$.*
2. *se \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos 4-regulares, então o grafo $\mathcal{G} \oplus_{S_i} \mathcal{G}$, para $i = 1, 2$, pela contração dos dois vértices trivalentes é, também, um grafo 4-regular de emparelhamentos de arestas sobre a superfície $M_{g_1+g_2}$.*

6 CONCLUSÃO

A extensão de grafos de emparelhamentos de arestas sobre uma superfície de gênero g permite construir as famílias todos os grafos de emparelhamento. Para $g > 3$ não é fácil ter controle sobre os grafos não isomorfos e também sobre o conjunto dos diferentes diagramas de emparelhamentos associado a cada um destes grafos. As cirurgias entre os emparelhamentos com $g \leq 3$ permitem construções de famílias de emparelhamentos para qualquer $g > 3$. Além disso, as cirurgias e a extensão podem contribuir para determinar se um dado grafo $G(V,A)$ está associado a algum emparelhamento de arestas sobre a superfície M_g , com $g = (1 - V + A)/2$.

ABSTRACT. The combination between surgeries of the pairing of edges of regular polygons (over on a closed and orientable surface) and the exchange of edges of the graph on the surface, allows more efficiently the families of graphs pairing on surfaces with genus $g \geq 2$.

Keywords: pairing of edges, regular polygons, orientable surface.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Albuquerque, R. Palazzo Jr & E.B. Silva. Topological quantum codes on compact surfaces with genus $g \geq 2$. *Journal of Mathematical Physics*, **50**(2) (2009), 023513.
- [2] G.F. da Silva, M.B. Faria & C. Jesus. Grafos que geram emparelhamento de arestas relacionados à tesselação $\{12g-6, 3\}$. *TEMA (São Carlos)*, **15**(2) (2014), 151–163.
- [3] C.M. de Jesus & P.D. Romero. Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **51**(2) (2020), 527–541.
- [4] M.B. Faria, C. Mendes de Jesus & P.D.R. Sanchez. Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **47**(4) (2016), 1085–1095.
- [5] M.B. Faria & R. Palazzo Jr. Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g- 6, 3\}$. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, **11**(1) (2010), 59–67.
- [6] T. Jørgensen & M. Näätänen. Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **33**(4) (1982), 451–461.
- [7] L.C. Kinsey. “Topology of surfaces”. Springer Science & Business Media (2012).
- [8] G. Nakamura. Generic fundamental polygons for surfaces of genus three. *Kodai Mathematical Journal*, **27**(1) (2004), 88–104.

