
ARTÍCULO

Análisis de errores en estudiantes de secundaria al resolver actividades de PISA asociadas al sentido espacial**Analysis of errors of Secondary School students when solving PISA activities associated with spatial sense**

María Isabel Elvas Fernández*

 ORCID iD 0000-0003-1502-0381

Rafael Ramírez Uclés**

 ORCID iD 0000-0002-8462-5897**Resumen**

Se presenta una investigación acerca de los errores que manifiestan 122 estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo al resolver actividades de PISA en el contenido Espacio y Forma. El estudio tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo. Se establecen diez categorías de errores, seis relativos al sentido espacial, y los otros cuatro generales en matemáticas. Los resultados muestran que los errores asociados al sentido espacial más frecuentes responden a la incorrecta interpretación de enunciados y de gráficos, y se vinculan más a un bajo desarrollo de las habilidades de visualización que al conocimiento de los conceptos geométricos. Las habilidades que han tenido un mayor impacto en los errores son la percepción de las relaciones espaciales y la percepción de las posiciones en el espacio y, en menor medida, la percepción figura-contexto y la discriminación visual. Los errores generales han tenido una menor incidencia en la resolución de las actividades.

Palabras clave: Sentido espacial. Habilidades de visualización. Errores. Dificultades.

Abstract

An investigation is presented about the errors manifested by 122 15-year-old students who are in the first year of Uruguayan high school when solving PISA activities in the content, space and form. The study has a qualitative approach of a descriptive nature. Ten categories of errors are established, six related to spatial sense, and the other four consist of general mistakes in mathematics. The results show that the most frequent errors associated with spatial sense respond to the incorrect interpretation of formulations and graphs and are more related to a low development of visualization skills than to knowledge of geometric concepts. The skills that have had the greatest impact on errors are the perception of spatial relationships and the perception of positions in space, and to a lesser extent, figure-context perception and visual discrimination. General errors have had a lower impact on the resolution of activities.

* Doctora en el departamento de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Docente de Didáctica de la Matemática en el Instituto de Profesores Artigas (IPA), Montevideo, Uruguay. E-mail: isabelevas24@gmail.com.

** Doctor en el Departamento de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Titular de Universidad en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: rramirez@ugr.es.

Keywords: Spatial sense. Visualization skills. Errors. Difficulties.

1 Introducción

La capacidad de pensar espacialmente fue reconocida a finales del siglo XIX, como una de las facetas cruciales de la inteligencia humana. Desde entonces, en diferentes ramas de la ciencia se ha desarrollado una intensa investigación en esta área (Maresch; Sorby, 2021). Más que nunca, nuestro mundo moderno y tecnológico necesita del pensamiento espacial, por lo que algunos estudios proponen incorporarlo en el currículo contemporáneo (Diezmann; Lowrie, 2009). Otros consideran el desarrollo de las habilidades espaciales y la alfabetización espacial como aprendizajes fundamentales para los trabajos en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM) (Novitasari *et al.*, 2021).

Desde la investigación, se reconoce un trabajo continuo vinculado con el razonamiento espacial, la medición geométrica, la visualización relacionada con la geometría, el desarrollo del conocimiento de los estudiantes con respecto a la comprensión de figuras geométricas, definiciones y relaciones de inclusión e identificación de formas y problemas de lenguaje involucrados en la resolución de tareas geométricas (Jones; Tzekaki, 2016). Algunos investigadores al analizar la interacción entre la visualización y la didáctica de la matemática encuentran beneficioso el uso de la visualización en la mejora de la educación matemática (Presmeg, 2006); mientras otros consideran que el desarrollo de las habilidades espaciales tiene una estrecha relación con la mejora del desempeño en matemáticas (Mix *et al.*, 2021).

En los informes de PISA en Uruguay se muestra una baja puntuación promedio obtenida en matemáticas, 422 puntos en 2003, 427 en 2006 y 2009, 409 puntos en 2012, 418 en 2015 y 2018 y vuelven a ser 409 puntos en 2022 mientras que el desempeño promedio de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) es de 472 puntos, según la Administración Nacional de Educación Pública (ANEP, 2023). En el contenido *Espacio y Forma* se obtiene la mejor puntuación promedio en relación con los resultados en otras áreas. De los seis niveles de puntuación definidos, el estudiante promedio uruguayo accede al nivel 1 de desempeño, siendo el nivel 2 el que involucra las capacidades mínimas que se espera que tenga para insertarse en la sociedad actual (ANEP, 2013).

Para lograr una mejora en la comprensión, conocimiento y aprendizaje de las matemáticas se define y desarrolla como línea de investigación el análisis del error en tareas matemáticas específicas. Los errores son datos objetivos, constituyen un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, forman parte de las producciones

de los alumnos durante su aprendizaje, e intervienen diversos aspectos del proceso educativo: el currículo establecido, las características personales y profesionales del profesor, y el centro educativo y sus interacciones con el entorno social y cultural donde se ubica (Rico, 1995).

En este artículo se pretende aportar información sobre los errores relativos al sentido espacial que manifiestan estudiantes de primer año de bachillerato de Uruguay. Para ello se proponen categorías para describir los errores en las respuestas a las actividades de PISA de 122 estudiantes de una institución privada de Montevideo. Las tareas PISA no responden al perfil de actividades matemáticas más comunes en las aulas tradicionales centradas en el dominio de algoritmos y realización de ejercicios de aplicación directa de fórmulas y procedimientos (Sáenz; Bruno, 2018). El análisis de los errores del colectivo de estudiantes permite una mejor comprensión de los resultados de las evaluaciones internacionales y marcar pautas de actuación que sean de utilidad para los profesores, para los desarrolladores de currículos y de políticas educativas y para los investigadores en la mejora de las prácticas educativas en el aula (Gris; dos Santos; dos Santos, 2019).

El análisis cognitivo por su parte busca organizar hasta dónde se aprenden determinados conocimientos acerca de un tópico, centrado sobre las dificultades de aprendizaje empíricas y conocidas, y sobre los errores que se detectan en la práctica (Rico; Fernández, 2013). De aquí la importancia de abordar el sentido espacial desde la perspectiva de los errores.

Para ello se formulan dos preguntas principales: ¿qué errores manifiestan los estudiantes cuando resuelven actividades de PISA del contenido *Espacio y Forma*?, ¿qué relación se establece entre los errores encontrados y las componentes del sentido espacial? Se plantean como objetivos orientadores: identificar y categorizar los errores que manifiestan los estudiantes de 15 años al resolver las actividades de PISA.

Se considera relevante el aporte del trabajo en varios contextos. Por un lado, la categorización establece unos indicadores para identificar los errores relativos al sentido espacial, lo que permite obtener información más precisa en relación con el conocimiento geométrico. Por otro lado, la identificación de los aspectos concretos que dificultan el aprendizaje geométrico brinda elementos a los docentes para ayudar a establecer conexiones entre registros visuales y simbólicos de las mismas nociones matemáticas (Presmeg, 2006). Además, aporta información que ayuda a describir cómo la conceptualización geométrica interactúa con la visualización durante el desarrollo (Battista, 2007).

2 Antecedentes

En las investigaciones no hay consenso en la definición y la terminología asociada al sentido espacial y se presentan matices de diferencia según la disciplina que lo requiere. Se habla, entre otros, de habilidad espacial, pensamiento o imaginación espacial de los estudiantes. La noción de sentido espacial resaltada por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) propone que los estudiantes desarrollen el sentido espacial y la capacidad de usar propiedades y relaciones geométricas para resolver problemas en matemáticas y en la vida cotidiana.

Las investigaciones en el campo de las capacidades espaciales son de interés porque el razonamiento espacial, más que ser una componente importante de la acción y el pensamiento humanos, está estrechamente relacionado con el pensamiento y el desarrollo del conocimiento geométrico. Los resultados de los estudios indican un bajo desarrollo de habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones y transformaciones espaciales, así como la comprensión de las dimensiones y la posición (Jones; Tzekaki, 2016).

Los estudios de Diezmann y Lowrie (2009), se centran en el conocimiento de los niños sobre mapas de posición, una prueba sobre lenguajes gráficos en matemáticas. Los resultados revelan dificultades clave, incluida la interpretación incorrecta del vocabulario, prestar atención a los enfoques incorrectos en los mapas y pasar por alto información crítica, además de otros errores generales como adivinar la respuesta e interpretar mal la pregunta.

Otros trabajos analizan los errores de los estudiantes en el tratamiento de la medida geométrica. La medición juega un papel central en el razonamiento sobre todos los aspectos de nuestro entorno espacial (Battista, 2007). Algunos atienden el proceso de iteración de la unidad de longitud y concepto de longitud: los errores encontrados en alumnos de primaria fueron procedimentales, en la técnica del uso de la regla, y conceptuales, en comprender la construcción de una escala (Bragg; Outhred, 2000; Watson; Jones; Pratt, 2013). La comprensión de los estudiantes de secundaria del área como una cuantificación de la superficie y sus características espaciales fue investigada por Outhred y Mitchelmore (2004) quienes encuentran que la mayor dificultad es considerar el área como un concepto abstracto de multiplicación; mientras que Furinghetti y Paola (1999) afirman que la dificultad está en la ausencia de una definición matemática clara y concisa de área que provoca en los estudiantes dos errores: confusión entre área y perímetro, y creer que existen una relación directa entre ellos. Fernández y de Bock (2013), encuentran que el error está en tratar las relaciones entre longitud y área, o entre longitud y volumen, como lineales en lugar de cuadráticas y cúbicas respectivamente, la dificultad radica en la distinción entre dimensionalidad y direccionalidad. La medición del ángulo es otro escollo para los estudiantes, las dificultades varían desde

comprender el ángulo como un atributo de la forma y la noción de ángulo desde una perspectiva estática o dinámica (Masuda, 2009).

Diferentes investigaciones se centran en analizar y clasificar los errores que manifiestan los estudiantes de nivel terciario o universitario cuando resuelven actividades geométricas. Bocco y Canter (2010), encuentran que los errores que repiten con mayor frecuencia son: utilizar datos de forma errónea; inventar datos; confundir el concepto involucrado en la resolución del ejercicio (confunden superficie con perímetro, diámetro con perímetro, asociar superficie de un área cualquiera con la superficie de un cuadrado); no relacionar el concepto con las unidades que le corresponden; conversión incorrecta de unidades o bien operar sin tener en cuenta las unidades involucradas, ante el desconocimiento de la fórmula apropiada inventar una; realizar operaciones aritméticas de forma defectuosa; operar sin relacionar con la situación planteada; y no comprender el enunciado del problema. Ramírez, Flores y Ramírez (2018) analizan los errores que comenten estudiantes de secundaria con talento matemático al resolver actividades de geometría, de argumentación visual y los clasifican en: establecer falsas analogías entre plano y espacio, no discutir todos los casos posibles y generalizar a partir de ejemplos concretos; y del uso incorrecto de técnicas de razonamiento y de manejo de contenidos y procedimientos.

Se encuentran siete categorías de errores propios del lenguaje geométrico, con estudiantes de ingeniería: errores gráficos, errores de razonamiento, de transferencia, de técnica, de tecnología y errores azarosos (Franchi; Hernández, 2004); y con estudiantes de profesorado de matemáticas: tres referidos al empleo impreciso de lenguaje matemático y de definiciones, axiomas y propiedades geométricas; dos referidos a la acción de demostrar; uno con relación al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades (Gotte; Mántica, 2021).

La detallada investigación de Clements y Sarama (2007) acerca de la composición y descomposición de formas, describe el proceso cognitivo que lleva a relacionar las partes con el todo y cada parte desempeña un único papel funcional en la estructura del patrón. Los estudios se realizan en distintas edades y afirman que los niños poseen múltiples estrategias de análisis espacial como las de los adultos. El desarrollo incluye ambas componentes del análisis espacial: identificación de las partes en una forma geométrica e integración de esas partes en un todo coherente. La dificultad es tener una cognición madura, resultado de un proceso de desarrollo en el que las partes y el todo están interrelacionados a través de niveles jerárquicos.

En distintos países y contextos se han realizado investigaciones de los errores que manifiestan los estudiantes durante el proceso de representar en 2D cuerpos geométricos

tridimensionales. Por ejemplo, en Chile, Ramírez, González y Zambrano (2023), atienden los errores que cometen estudiantes de tercer y cuarto año (16-18 años) en el dibujo de vistas ortogonales de figuras 3D, y de figuras 3D desde vistas ortogonales. Los resultados muestran mayor error en la representación de vistas superiores y vistas traseras y en el apartado principal del cuestionario más de la mitad de las respuestas no coinciden con la correcta, así las dificultades en la manipulación mental y en las habilidades espaciales quedan manifiestas. Por su parte, Saralar, Ainsworth y Wake (2018), trabajan con estudiantes de séptimo año (12-13 años) del Reino Unido, el análisis muestra que les resultó difícil construir dibujos ortogonales e isométricos, si bien fueron mejores los resultados en dibujos ortogonales sobre los dibujos isométricos; además los autores establecen un listado de errores específicos para cada tipología de dibujo con la perspectiva de elaborar lecciones que ayuden a superar los errores. Mientras que Fujita *et al.* (2017), en Japón, presentan los hallazgos, con estudiantes de séptimo grado (12-13 años) cuando representan en 2D cuerpos geométricos 3D; los estudiantes manifestaron dificultades en manipular mentalmente las representaciones y razonar sobre ellas para alcanzar soluciones correctas.

Los análisis de los resultados en evaluaciones estandarizadas acerca de los errores de los estudiantes marcan líneas de actuación en cuanto a tomar decisiones pedagógicas, favorecer la práctica docente e informar al estudiante acerca de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, Villarroel, García y Melipillán (2012), tras analizar resoluciones de actividades de PISA 2009 concluyen que, en los problemas largos, las dificultades estarían en el corto tiempo de concentración de los estudiantes y la estrategia de resolución de encontrar la respuesta correcta en vez de construirla. En los problemas de más de una variable, el error aumenta: los estudiantes razonan en forma adecuada pero incompleta y consideran alguno de los aspectos, pero no todos. En actividades que solicitan datos en distintos formatos, cuando el estudiante se encuentra ante los textos discontinuos (gráficos, tablas, otros) se le dificulta integrar la información en una respuesta correcta. En los problemas contextualizados se hace difícil seleccionar una estrategia que conduzca a resolverlos.

En los trabajos mostrados se refleja el interés de las investigaciones por los errores que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas geométricas. Este trabajo organiza la información de los errores recogida en la revisión de antecedentes y establece unas categorías particulares para comprender la manifestación del sentido espacial.

3 Marco Conceptual

El marco teórico se estructura a partir de dos concepciones que se ponen en diálogo, el sentido espacial y el error en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

3.1 Sentido espacial

La competencia matemática es considerada por PISA como esencial para describir, explicar y predecir el mundo (OCDE, 2016). El NCTM (2000), plantea que el estudio de la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas. Entre otros aspectos, deben proponer, analizar características y propiedades de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Desde esta perspectiva, la diversidad de terminología y las continuas investigaciones relacionadas con el sentido espacial ponen de manifiesto la complejidad de acciones e interacciones involucradas al resolver tareas que lo implican (Ortiz; Sandoval, 2018). Los estudios en educación de la geometría han abarcado el pensamiento y razonamiento espacial y un aspecto que recibe atención es la visualización (Jones; Tzekaki, 2016) y la relación positiva con la resolución de problemas (Stylianou, 2001). Además, distintos trabajos manifiestan que la inteligencia espacial es necesaria para la resolución de problemas (Riastuti; Mardiyana y Pramudya, 2017). Así el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de aplicación de la geometría a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Flores, Ramírez y Del Río (2015, p. 129-130) definen el sentido espacial como una forma intuitiva de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas”. Estos autores conciben el sentido espacial constituido por tres componentes: conceptos geométricos; relaciones geométricas; y ubicación y movimientos. Añaden la visualización como una componente transversal que establece conexiones entre las tres anteriores y da fortaleza al sentido espacial.

Por su parte, Gutiérrez (1996) concibe la visualización integrada por cuatro elementos: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización. Este trabajo se centra en las habilidades de visualización porque la definición de un concepto y la imagen del concepto adquieren un papel relevante en los distintos procesos de la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 2006).

3.1.1 Conceptos geométricos

Flores, Ramírez y Del Río (2015), consideran que el manejo de conceptos geométricos está compuesto por algunos apartados: conocer figuras y formas, que implica definirlas, identificarlas, construirlas y caracterizarlas; reconocer y establecer relaciones geométricas, que consiste en apreciar cualidades de los cuerpos geométricos y las formas; la ubicación y los movimientos como capacidad para situar los elementos en el plano y en el espacio, identificar elementos invariantes y regularidades para realizar movimientos y la orientación como la capacidad para comprender la disposición de los elementos en el espacio y no confundirlos. La Figura 1 expresa que la conexión entre las componentes es la mayor fortaleza del sentido espacial.

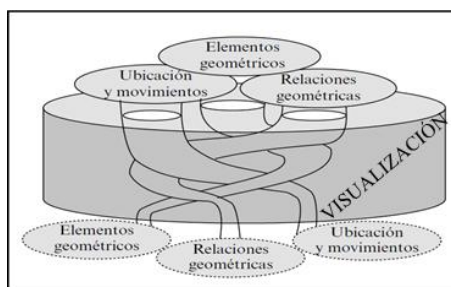


Figura 1 – Conexión entre los conceptos geométricos
Fuente: Flores, Ramírez y Del Río (2015, p. 134)

3.1.2 Habilidades de visualización

Mizzi (2017) define las habilidades espaciales como una colección de habilidades que apoyan o cambian la percepción del espacio, que se representan en términos reales o mentalmente usando el conocimiento espacial. Del Grande (1990) considera siete habilidades de visualización que intervienen en la percepción espacial, en el proceso de generación y manipulación de imágenes: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual.

La *coordinación ojo-motor*, supone coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La habilidad *percepción figura-contexto* implica apreciar cambios en la percepción de las figuras contra fondos complejos y permite identificar una componente en una situación. La *conservación de la percepción* implica reconocer un objeto pese a sufrir variaciones de posición y tamaño. La *percepción de la posición en el espacio* determina la relación de un objeto con el observador o con otros objetos. La *percepción de las relaciones espaciales* involucra ver dos o

más cualidades que caracterizan objetos relacionados entre sí o con uno mismo. La *discriminación visual* permite identificar las diferencias y similitudes entre objetos. La *memoria visual* significa recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

3.2 Errores y su clasificación

La noción de error y sus diferentes denominaciones: ideas erróneas, dificultades, obstáculos, o errores, se sustenta en reflexiones de epistemólogos y filósofos de la ciencia detrás de la preocupación por el conocimiento erróneo que en educación deriva en una teoría de la didáctica de las matemáticas (Rico, 1995).

Los errores son concebidos como elementos estables en el proceso de aprendizaje (Lupiáñez, 2009; Rico, 1995; Socas, 1997). Conocer el tipo de error que manifiestan los estudiantes permite al docente seleccionar las estrategias que optimicen la enseñanza, favorezca la superación de los errores y facilite la adquisición de un nuevo conocimiento, de conceptos correctos y completos que el estudiante pueda relacionar con fluidez según le interese (Franchi; Hernández, 2004; Gutiérrez, 2006).

De acuerdo con las diferentes tipologías de errores consultadas, se presentan aquellas de las que se selecciona algún error para esta investigación. Además, se muestran cuatro investigaciones que plantean un error específico relativo al sentido espacial (ver Cuadro 1).

Autor	Criterio de clasificación de errores	Tipología de errores
Radatz (1979)	Procesamiento de la información.	Errores por la dificultad del lenguaje. Errores para obtener información espacial. Errores en el aprendizaje de hechos, destrezas y conceptos previos. Errores por la rigidez del pensamiento. Errores en la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
Movshovitz et al. (1987)	Clasificación empírica de los errores fundamentada en el conocimiento matemático.	Errores en el uso de los datos. Errores en la interpretación del lenguaje. Errores en inferencias lógicas. Errores en el uso de teoremas o definiciones. Errores en verificar la solución. Errores técnicos.
Socas (1997)	Origen de los errores.	En un obstáculo. En la ausencia de sentido. En actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.
Astolfi (1999)	Perspectiva general.	Errores en la comprensión de las instrucciones. Errores en los hábitos escolares o en la interpretación de las expectativas. Errores en las concepciones alternativas de los alumnos. Errores en las operaciones intelectuales implicadas.

		Errores en los procesos adoptados. Errores por la sobrecarga cognitiva en la actividad. Error en otra disciplina. Errores por la complejidad del contenido.
Owens y Outhred (2006)	Complejidad de la medición.	Errores en el concepto y la estructura de las unidades.
Diezmann y Lowrie (2009)	Interpretación de gráficos.	Errores en la interpretación de gráficos.
Clements y Sarama (2007)	Aprendizaje de las matemáticas, en particular para las formas.	Errores en interrelacionar la parte con el todo.
Battista (2007)	Pensamiento geométrico y espacial, centrado en la medida geométrica.	Errores en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria.

Cuadro 1 – Tipologías de errores
Fuente: elaborado por los autores (2024)

4 Metodología

El estudio tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo mediante la aplicación de una metodología propia de la didáctica de la matemática, el análisis didáctico. Se emplea como un método preciso y reglado para comprender conocimientos y conceptos; maneja categorías matemáticas y educativas; subraya la precisión de ideas y juicios; trabaja a través de la división de lo complejo en partes más simples mediante la definición de categorías; y se caracteriza por el orden, la coherencia y una estructura bien determinada (Rico; Fernández, 2013). En este estudio, se busca comprender los conocimientos del sentido espacial de los estudiantes a través del análisis de los errores que manifiestan al resolver las actividades de PISA.

4.1 Selección de las actividades de PISA, recolección de datos y respuestas

De las actividades liberadas por PISA referidas al contenido *Espacio y Forma* se seleccionan las correspondientes a PISA 2012 porque permanecieron como referencia y preparación para la última medición del 2022. Las actividades interactivas se descartan porque los enlaces encontrados no permiten su acceso. Las ocho actividades seleccionadas son: compra de apartamento, heladería (pregunta 1, 2 y 3), vertido de petróleo, barcos a vela (pregunta 1, 3 y 4), la noria (pregunta 1 y 2), una construcción con dados, garaje (pregunta 1 y 2) y puerta giratoria (pregunta 1, 2 y 3).

Para la recolección de datos se aplican las ocho actividades de PISA 2012 a seis grupos de primero de bachillerato de una institución educativa de Montevideo. Se determina que se resuelven en 80 minutos correspondiente a dos horas de clase, que no siempre fueron consecutivas. Se dividen las tareas en dos cuestionarios para su aplicación a los grupos por parte de sus profesores de matemáticas y los tutores. Se elabora y entrega el protocolo de aplicación

del cuestionario. Se seleccionan 122 estudiantes que forman la población del estudio. Para la selección de las respuestas, se descartan las resoluciones de las tres preguntas de los barcos a vela porque buscan un resultado numérico, sin que se requiera de las componentes del sentido espacial para resolverlas. Las siete actividades de PISA constituyen 13 preguntas que se nombran con las iniciales de su título y número de pregunta, CA, H1, H2, H3, VP, N1, N2, CD, G1, G2, PG1, PG2 y PG3.

4.2 La organización de los datos y clasificación de respuestas

Las resoluciones de los 122 estudiantes a cada una de las preguntas de las siete actividades de PISA se dividen en grupos excluyentes: *sin hacer*, significa que no responde la pregunta; *bien resuelta*, llega a la respuesta esperada a través de alguna de las posibles estrategias de resolución; *no aporta información*, cuando hay una respuesta errónea sin registro del camino realizado para llegar a ella; *con errores*, cuando el estudiante manifiesta errores en su proceso de resolución. En este estudio nos centramos en el análisis de los errores manifiestos (ver Tabla 1).

4.3 Descripción del análisis

Con el fin de establecer categorías de errores *a posteriori* se realiza un proceso de síntesis de los errores manifiestos por los estudiantes en todas las actividades y en cada una de las resoluciones de las 13 preguntas. Se agrupan los errores: se los divide en *errores relativos al sentido espacial* cuando van asociados a algunas de sus componentes y en *errores generales* en matemáticas. Se determina la frecuencia y el número de estudiantes que incurren en el error, discriminado por pregunta.

A partir de las tipologías de errores en matemáticas y de los resultados de estudios específicos, con relación a ciertos aspectos del sentido espacial dispuestos en el marco teórico, en el Cuadro 2 se organizan los errores encontrados en 10 categorías: los primeros seis, del e1 al e6, corresponden al sentido espacial; y los otros, del e7 al e10, responden a errores generales.

Autor	Error	Categoría
Radatz (1979)	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: producidos por la alta demanda que implica el análisis y síntesis perceptivos involucrados en la situación matemática.	<i>e1</i>
Movshovitz et al. (1987)	Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformada: incluye los errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema, definición o fórmula reconocibles, por ejemplo, aplicar un teorema sin las condiciones necesarias.	<i>e2</i>
Owens y Outhred (2006)	Error en el concepto y la estructura de las unidades al medir los atributos organizados espacialmente de longitud, área y volumen.	<i>e3</i>
Diezmann y Lowrie (2009)	Error en la interpretación de gráficos: involucra la interacción entre un sistema de símbolos visuales, y procesos perceptuales y cognitivos.	<i>e4</i>
Clements y Sarama (2007)	Error en interrelacionar la parte con el todo: la composición y descomposición de las formas es el resultado de un proceso cognitivo que interrelaciona niveles jerárquicos, aislar las partes, organizarlas de forma contigua, combinarlas de manera integradora y crear unidades complejas.	<i>e5</i>
Battista (2007)	Error en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria: el proceso de abstraer iteraciones unitarias suficientes para medir varios atributos geométricos es complejo.	<i>e6</i>
Movshovitz et al. (1987)	Errores técnicos: incluye los errores de cálculo, la manipulación de signos algebraicos, la ejecución de algoritmos básicos y los errores al tomar datos de una tabla.	<i>e7</i>
Socas (1997)	Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: derivan de la falta de concentración, bloqueos, olvidos, ansiedad y otras.	<i>e8</i>
Astolfi (1999)	Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: surgen por la mala comprensión de la formulación de trabajo, sea oral o escrita.	<i>e9</i>
	Errores en los procesos adoptados: surgen cuando el estudiante se aparta del método dado en clase y utiliza otro procedimiento que no corresponde.	<i>e10</i>

Cuadro 2 – Categoría de errores
Fuente: elaborado por los autores (2024)

4.4 Dificultades asociadas a las componentes del sentido espacial en cada actividad

Se realiza un análisis de contenido de las resoluciones de las siete actividades para identificar las componentes del sentido espacial requeridas al estudiante cuando las resuelve (Elvas; Ramírez; Flores, 2022). Por ejemplo, en la heladería, hay que identificar la parte externa del mostrador y obtener la medida del lado oblicuo a partir del teorema de Pitágoras (ver Figura 3). Para ello se requiere del manejo de conceptos geométricos, de propiedades de los triángulos rectángulos y del proceso de medición indirecta. Además de las habilidades de visualización: percepción de la figura contexto, para reconocer la parte externa del mostrador y la medida de la baldosa; percepción de la posición en el espacio, para identificar las direcciones horizontales y verticales; percepción de las relaciones espaciales, para vincular las medidas y la perpendicularidad; y la discriminación visual, para distinguir los segmentos del mostrador, el triángulo rectángulo y la unidad de medida.

5 Resultados

Para mostrar los resultados, abordamos cada uno de los errores relativos al sentido espacial, las formas de manifestación en cada una de las actividades y su relación con las componentes del sentido espacial. Posteriormente se atienden los errores generales que afectan también el desempeño de los estudiantes. En la Tabla 1 se detalla la distribución de frecuencia de los errores en cada una de las 13 preguntas.

Tabla 1 – Clasificación de respuestas y frecuencia de errores

Actividad	Sin hacer	Bien resuelta	No información	Con errores	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
CA	16	81	0	25	19		1		7				3	2
H1	18	46	2	56		5	13	12	10	26	2	1	15	
H2	28	24	2	68	4	14	2		25	26	2	1	11	
H3	26	28	14	54	1	18	1	25		1	2		11	
VP	56	4	11	51		3	1		37	26	3		1	10
N1	10	64	0	48		27		43					27	
N2	11	60	0	51	3			30			2		30	15
CD	14	102	2	4	2			2					1	
G1	9	110	0	3	3			3						
G2	36	26	3	57	23	6	9	17		29	5	1		1
PG1	32	66	5	19		2				1			17	
PG2	86	7	4	25			18	5		2		3		
PG3	36	67	0	19				15			3	1		
					55	75	45	152	79	111	19	7	86	28

Fuente: elaborada por los autores (2024)

5.1 Errores relativos al sentido espacial

Se presenta la manifestación de cada error en las respectivas preguntas y se establece la relación con las componentes del sentido espacial menos desarrolladas.

Error debido a dificultades para obtener información espacial (e1) aparece en siete de las preguntas, sólo en dos con una frecuencia mayor a cuatro, entre 19 y 23 estudiantes. El error se manifiesta al reconocer e identificar los elementos necesarios en un diagrama que permita aplicar propiedades o definiciones. Las componentes del sentido espacial asociadas son la orientación, la percepción de las relaciones espaciales y de las posiciones en el espacio. La resolución del E111 de la actividad G2 muestra el *e1*, se evidencia una de sus dificultades al identificar en las dos vistas dadas las dimensiones que necesita ubicar y determinar para alcanzar la respuesta esperada (ver Figura 2).

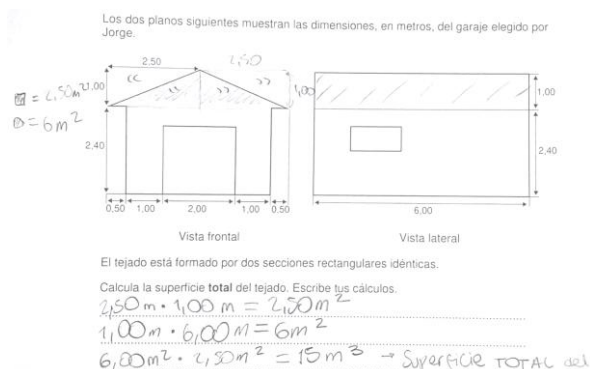


Figura 2 – Resolución de la actividad G2 por E111
Fuente: elaborada por los autores (2024)

Error debido al uso de teoremas o definiciones deformadas (e2) aparece en siete de las preguntas, sólo en tres con una frecuencia mayor a seis, entre 14 y 27 estudiantes. El error se manifiesta en conocer la medida indirecta del área de polígonos y circunferencia, así como en la determinación de propiedades, entre ellas el teorema de Pitágoras. Las componentes del sentido espacial asociadas son las propiedades de las formas y las relaciones geométricas, y la percepción de las relaciones espaciales. La resolución del estudiante 57 (E57) de la actividad N1 muestra el e2: su respuesta no es la esperada y en sus registros manifiesta confusión en el concepto de radio y diámetro de una circunferencia, así como dificultad en la percepción de las relaciones espaciales, en ubicar el centro (ver Figura 4).

Error en el concepto y la estructura de las unidades al medir los atributos organizados espacialmente de longitud, área y volumen (e3), aparece en siete de las preguntas si bien sólo en tres de ellas con una frecuencia mayor a dos. El error se manifiesta la mayoría de las veces al confundir área y perímetro, en menor medida la confusión entre área y volumen, y entre la distancia entre dos puntos de una circunferencia y la longitud del arco que ellos determinan. Las componentes del sentido espacial asociadas son los propios conceptos geométricos implicados y el poco desarrollo de la percepción de las relaciones espaciales. La H1 es la actividad con mayor frecuencia del e3, un ejemplo lo presenta el estudiante 20 (E20) que confunde los conceptos de área y perímetro y pareciera no percibir que los bordes del mostrador son segmentos a los que se les puede determinar su longitud (ver Figura 3).

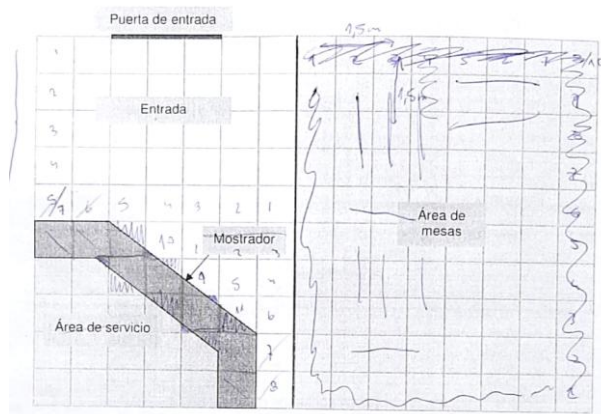


Figura 3 – Resolución de la actividad H1 por E20
Fuente: elaborada por los autores (2024)

Error en la interpretación de gráficos (e4), es el error más frecuente, aparece en nueve de las preguntas, en seis de ellas con una frecuencia entre 12 y 43 estudiantes. El error se manifiesta en interpretar diagramas, en identificar en ellos datos necesarios para la resolución y en utilizar a la vez los datos o las condiciones para alcanzar la respuesta esperada. Las componentes del sentido espacial asociadas son las habilidades de visualización, percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio. La resolución del estudiante 57 (E57) de la actividad N2 evidencia el *e4* cuando le asigna el nombre P al punto más cercano a la letra, sin poder interpretar que los puntos que tenían nombre se correspondían con los puntos cardinales (ver Figura 4).

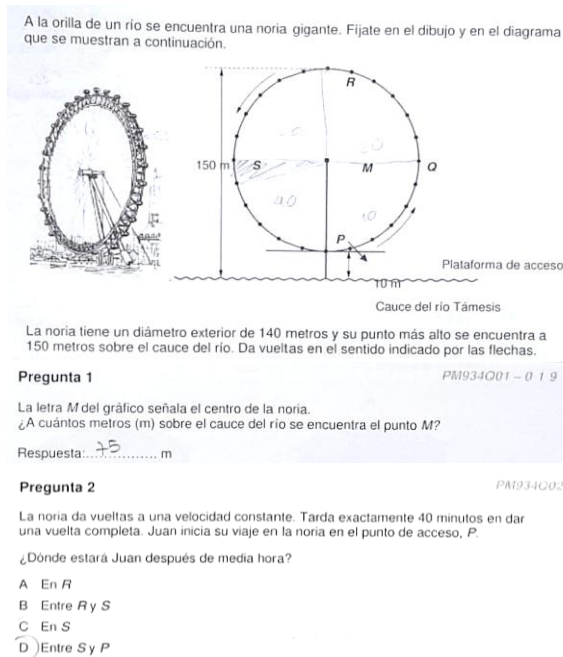


Figura 4 – Resolución de la actividad N1 y N2 por E57
Fuente: elaborada por los autores (2024)

Error en interrelacionar la parte con el todo (e5) aparece en cuatro actividades con una frecuencia entre 7 y 37 estudiantes. El error se manifiesta en la composición y descomposición

de figuras geométricas, cuando no se considera que un segmento se obtiene como la suma de dos o tres menores, cuando no se determinan las formas (polígonos o circunferencias) en las que se puede dividir un área para poder calcularla o cuando la división obtenida no se aproxima a la superficie real de la forma, sino que es solo por exceso o por defecto. Las componentes del sentido espacial asociadas son las relaciones geométricas, la orientación, la percepción figura-contexto y la discriminación visual. La frecuencia mayor la tiene la actividad del vertido de petróleo, donde los estudiantes para calcular el área solo determinan un rectángulo exterior, se les dificulta visualizar su descomposición en polígonos menores para obtener una aproximación más precisa del área, un ejemplo es la resolución del estudiante 2 (E2) (ver Figura 5).

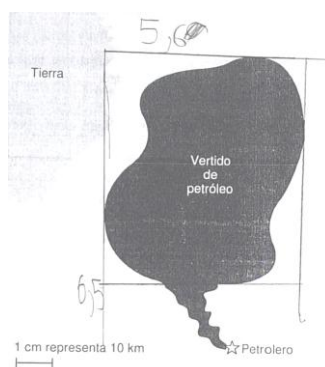


Figura 5 – Resolución de la actividad VP por E2
Fuente: elaborada por los autores (2024)

Error en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria (e6) aparece en siete de las preguntas, sólo en cuatro con una frecuencia mayor a dos, entre 26 y 29 estudiantes. El error se manifiesta en identificar la unidad de medida, en el uso de medida directa o en realizar las conversiones convenientes a las unidades solicitadas. En el sentido espacial se ven poco desarrollados los conceptos geométricos. La resolución del estudiante 111 (E111) de la actividad G2 muestra el e6, en la confusión de su respuesta, se solicita el cálculo de un área y responde con unidades cúbicas, además cuando multiplica unidades cuadradas, le dan cúbicas (ver Figura 2).

5.2 Errores generales

Los otros cuatro errores generales en matemáticas son: e7, e8, e9 y e10, si bien no se establece un vínculo directo con el desarrollo del sentido espacial influyen en el rendimiento en geometría de los estudiantes, en el contenido *Espacio y Forma*, evaluado en las actividades de PISA.

Error técnico (e7) aparece en siete de las preguntas, en todos los casos con una

frecuencia menor a seis. El error se manifiesta la mayor parte de las veces en los cálculos operatorios o en algún caso como error de conteo.

Error que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales (e8) aparece en cinco preguntas con una frecuencia menor a cuatro, su manifestación en todos los casos es que el estudiante realiza un esbozo adecuado de un posible camino de resolución que lo evidencia en un diseño gráfico o en un procedimiento algebraico, pero parece detenerse en la producción final. Consultados los docentes interpretan que se debe a algún tipo de bloqueo por falta de confianza en los pasos que ha realizado.

Error debido a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo (e9) aparece en ocho de las respuestas con una frecuencia entre 11 y 27 en cinco de ellas. El error se manifiesta en comprender e interpretar las instrucciones y las condiciones que establece el enunciado de la actividad. La dificultad aparece en la interpretación de algunas expresiones en concreto, por ejemplo, en H1 *la parte externa*, en N1 *sobre el cauce del río* y en PG1 *el ángulo formado por dos hojas*.

Error en los procesos adoptados (e10) aparece en cuatro respuestas y solo en dos con una frecuencia de 10 y 15 estudiantes. El error se manifiesta en procedimientos inadecuados, en la imposibilidad de determinar la causa del error o en la falta de continuidad a la estrategia de resolución iniciada.

6 Discusión y Conclusiones

En relación con los objetivos planteados, por un lado, se ha conseguido categorizar y clasificar los errores relativos al sentido espacial y errores generales para cada una de las actividades de PISA 2012. Por otro, se han establecido relaciones entre los errores encontrados y las componentes del sentido espacial, el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización.

Se han establecido unos indicadores de análisis a posteriori que han permitido identificar los errores relativos al sentido espacial y errores generales en matemáticas. Se ha conseguido operativizar el análisis de los errores lo que permite obtener información más precisa en relación con las capacidades espaciales, el desarrollo del conocimiento geométrico y su relación con la resolución de problemas que permite entre otros, tomar decisiones pedagógico didácticas que favorezcan la práctica docente y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Riastuti; Mardiyana y Pramudya, 2017; Jones; Tzekaki, 2016).

De acuerdo con los resultados se establecen dos errores vinculados que interfieren en el

acceso a la información brindada y solicitada en las actividades. Uno de los errores relativo al sentido espacial, el *e4*, es el predominante por las nueve veces que aparece en las 13 preguntas, evidencia que la interpretación de gráficos en matemática es una práctica más problemática que rutinaria (Diezmann; Lowrie, 2009). Las dificultades muestran coincidencia con los investigadores, en los enfoques incorrectos de los diagramas y en pasar por alto información relevante, que se atribuye a un escaso desarrollo de las habilidades de visualización, percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio. Relacionado al anterior, con características matemáticas más generales, acerca de la comprensión e interpretación del enunciado, el *e9* (Astolfi, 1999), con similar relevancia por las ocho veces que aparece en las respuestas, se une a las dificultades clave señaladas por otros investigadores como la interpretación incorrecta del vocabulario e interpretar mal la pregunta (Diezmann; Lowrie, 2009) y no comprender la formulación del problema (Bocco; Canter, 2010). También Villarroel, García y Melipillán (2012) señalan la dificultad que representa para el estudiante integrar la información que se entrega en distintos formatos.

En relación con el sentido espacial, dos de los errores, el *e3* y el *e6*, vinculados con la medida geométrica (Battista, 2007) ponen de manifiesto la dificultad asociada a un bajo desarrollo de los conceptos geométricos, sea en el concepto de unidad, de longitud, de área, en el proceso de iteración de la unidad (Bragg; Outhred, 2000; Outhred; Mitchelmore, 2004; Owens; Outhred, 2006; Watson; Jones; Pratt, 2013), así como en la confusión entre área y perímetro, longitud y área o longitud y volumen (Fernández; De Bock, 2013; Furinghetti; Paola, 1999) o las dificultades que se presentan con la noción de ángulo (Masuda, 2009).

La relación entre los errores, *e1*, *e2* y *e5*, se basa en la dificultad de un escaso desarrollo de las relaciones geométricas y la orientación (Jones; Tzekaki, 2016). Se manifiesta en la poca capacidad de establecer una interrelación jerárquica entre el todo y las partes que implica la composición y descomposición de figuras geométricas (Clements; Sarama, 2007). O la dificultad en generar información relevante a partir de diferentes representaciones como fue demandado en varias actividades, por ejemplo, identificar triángulos rectángulos que no estaban marcados o ubicar conjuntos en un espacio integrando condiciones (Radatz, 1979).

La mayoría de los errores en el sentido espacial, *e1*, *e2*, *e3*, *e4* y *e5*, tienen en común la dificultad de tener un escaso desarrollo de algunas habilidades de visualización: la percepción figura-contexto y la discriminación visual, en el *e5*; y la percepción de las relaciones espaciales y la percepción de las posiciones en el espacio, presentes en los otros cuatro. Este resultado se une a las dificultades en la comprensión de las dimensiones y la posición que plantean Jones y Tzekaki (2016) y a los resultados de los estudios referidos a las representaciones en 2D de

cuerpos geométricos tridimensionales que manifiestan dificultades en la manipulación mental y en las habilidades espaciales (Fujita *et al.*, 2017; Ramírez; González; Zambrano, 2023; Saralar, Ainsworth; Wake 2018).

Los errores generales, *e7*, *e8* y *e10*, parecieran tener menor incidencia en la resolución de actividades geométricas, por su reducida aparición en las respuestas o por su escasa frecuencia en los estudiantes. Se detecta la dificultad en los procedimientos matemáticos y en la selección de una estrategia adecuada (Ramírez; Flores; Ramírez, 2018; Villarroel, García y Melipillán, 2012); la dificultad técnica y de realizar operaciones (Bocco; Canter, 2010; Franchi; Hernández, 2004); y la dificultad emocional, que se reconoce como limitación la parte interpretativa del error (Villarroel, García y Melipillán, 2012).

Uno de los intereses del estudio es aportar información acerca de los errores relativos al sentido espacial en los estudiantes de primer año de bachillerato. Se puede considerar que el estudio de los errores es el primer paso para superar un problema que enfrenta no solo la educación en Uruguay sino también la de otros países, como es el bajo rendimiento en matemáticas alcanzado por los estudiantes en pruebas internacionales, como muestran los resultados obtenidos en PISA.

Se identifican algunas limitaciones del estudio: la muestra de actividades, únicamente las liberadas por PISA sin poder acceder a las actividades interactivas; y de estudiantes, por centrar el estudio en una sola institución educativa. Para sustentar los resultados se podría extender la investigación a más estudiantes que abarquen realidades diversas, incluir los procesos de enseñanza y las expectativas de los docentes que aporten información sobre posibles causas de los errores que colaboran a que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia definido por PISA.

Sin embargo, se reconoce como aporte la categorización de los errores en el sentido espacial y el análisis que permite trabajar con muestras mayores, con respuestas de estudiantes y comparar con otros países para brindar elementos objetivos en diseño de actividades de aula y estandarizadas, diseño de unidades para la formación del profesorado y para los desarrolladores de currículos.

Agradecimiento

Este trabajo forma parte de una de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Contribuciones de autoría

Todos los autores contribuyeron sustancialmente a la concepción y planificación del estudio; a la recopilación, análisis e interpretación de los datos; a la redacción y revisión crítica; y aprobaron la versión final para su publicación.

Disponibilidad de los datos

Los datos generados o analizados durante este estudio se incluyen en este artículo publicado.

Referencias

ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA - ANEP. **Uruguay en PISA 2012**. Informe de resultados. Montevideo: División de investigación, evaluación y estadística -DIEE, 2013.

ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA - ANEP. **Uruguay en PISA 2022**. Informe de resultados. Montevideo: División de investigación, evaluación y estadística - DIEE, 2023.

ASTOLFI, J.P. **El error**, un medio para enseñar. Sevilla: Diada, 1999.

BOCCO, M.; CANTER, C. Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. **Revista iberoamericana de educación**, Buenos Aires, v. 53, n. 2, p. 1-13, 2010.

BRAGG, P.; OUTHRED, L. Students' knowledge of length units: do they know more than rules about rulers? *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima. **Proceedings...** Hiroshima: PME, 2000. p. 97–104 (Vol. 2). Disponible en: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452032.pdf> Acceso en: 9 jul. 2025.

BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. *In*: LESTER, F. (ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: NCTM. IAP, 2007. p. 843-908 (Vol. 2).

CLEMENTS, D.; SARAMA, J. Early childhood mathematics learning. *In*: LESTER, F. (ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: NCTM. IAP, 2007. p. 461-556 (Vol. 1).

DEL GRANDE, J. Spatial sense. **The arithmetic teacher**, New York, v. 37, n. 6, p. 14-20, feb. 1990.

DIEZMANN, C.; LOWRIE, T. Primary students' spatial visualization and spatial orientation:

an evidence base for instruction. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION*, 33., 2009, Thessaloniki.

Proceedings... Thessaloniki: PME, 2009. p. 417-424 (vol. 2). Disponible en:

<https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME33-2009-Thessaloniki.zip> Acceso en: 22 agosto 2025.

ELVAS, I.; RAMÍREZ, R.; FLORES, P. Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. *In: SIMPOSIO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN*

MATEMÁTICA, 25., 2022, Santiago de Compostela. **Actas...** Granada: SEIEM, 2022. p.

249-257. Disponible en: <https://www.seiem.es/docs/actas/25/ActasXXVSEIEM> Acceso en: 19 jul. 2025.

FERNÁNDEZ, C.; DE BOCK, D. Does the confusion between dimensionality and ‘directionality’ affect students’ tendency towards improper linear reasoning? *In:*

INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF

MATHEMATICS EDUCATION, 37., Kiel. **Proceedings...** Kiel: PME, 2013. p. 297–304

(Vol. 2). Disponible en: <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME37-2013-Kiel.zip>. Acceso en: 22 agosto 2025.

FLORES, P.; RAMÍREZ, R.; DEL RÍO, A. Sentido espacial. *In: FLORES, P.; RICO L.*

(coords.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria**, Madrid: Pirámide, 2015. p. 127-146.

FRANCHI, L.; HERNÁNDEZ, A. Tipología de errores en el área de la geometría plana.

Educere, Mérida, v. 8, n. 24, p. 63-71, 2004.

FUJITA, T.; KONDO, Y.; KUMAKURA, H.; KUNIMUNE, S. Students’ geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. **The journal of mathematical behavior**, New Brunswick, v. 46, [s.n.], p. 96-111, 2017.

FURINGHETTI, F.; PAOLA, D. Exploring students’ images and definitions of area. *In:* INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF

MATHEMATICS EDUCATION, 23., 1999, Haifa. **Proceedings...** Haifa: PME, 1999. p. 345–352 (Vol. 2). Disponible en: <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME23-1999-Haifa.pdf>. Acceso en: 22 agosto 2025.

GÖTTE, M.; MÁNTICA, A.M. Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior. **Epsilon**, Sevilla, v. 2, n. 108, p. 27-44, 2021.

GRIS, G.; DOS SANTOS, L.; DOS SANTOS, J. Uma revisão sistemática de variáveis

relevantes na produção de erros em matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 649-671, 2019.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *In:*

INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF

MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. **Proceedings...** Valencia: PME, 1996.

p. 3-19 (Vol. 1). Disponible en: <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME20-1996-Valencia.zip>. Acceso en: 22 agosto 2025.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *In:*

FLORES, P.; RUÍZ, F.; DE LA FUENTE, M. (eds.). **Geometría para el siglo XXI**. Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales, 2006. p. 13-58.

JONES, K.; TZEKAKI, M. Research on the teaching and learning of geometry. *In*: GUTIÉRREZ, Á.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (eds.), **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**, Rotterdam: Sense Publishers, 2016. p.109–149.

LUPIÁÑEZ, J. L. **Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. 2009. n. 521. Tesis (Doctorado en Ciencias de la Educación: Educación Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2009.

MARESCH, G.; SORBY, S. Perspectives on spatial thinking. **Journal for geometry and graphics**, Vienna, v. 25, n. 2, p. 271-293, 2021.

MASUDA, T. Cultural effects on visual perception. *In*: GOLDSTEIN, E. B. (ed.). **Encyclopedia of perception**. California: Sage Publisher, 2009. p. 339-343 (Vol. 1).

MIX, K.S.; LEVINE, S.C.; CHENG, Y. L; STOCKTON, J. D.; BOWER, C. Effects of spatial training on mathematics in first and sixth grade children. **Journal of educational psychology**, Minnesota, v. 113, n. 2, p. 304-314, 2021.

MIZZI, A. **The relationship between language and spatial ability**. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for research in mathematics education**, Reston, v. 18 n. 1, p. 3-14, 1987.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NOVITASARI, D.; NASRULLAH, A.; TRIUTAMI, T.W.; APSARI, R.A.; SILVIANA, D. High level of visual-spatial intelligence's students in solving PISA geometry problems. **Journal of physics: Conference series**. Purwokerto: IOP, 2021. p. 1-9 (Vol. 1778).

ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO - OCDE. **Panorama de la educación 2016**. Indicadores de la OCDE. París: OCDE, 2016.

ORTIZ, A.; SANDOVAL, I. Representaciones de cuerpos geométricos: una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. *In*: SIMPOSIO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 22., 2018, Gijón. **Actas...** Granada: SEIEM, 2018. p. 427-436. Disponible en: <https://www.seiem.es/docs/actas/22/ActasXXIIDefinitivas.pdf> Acceso en: 19 jul. 2025.

OUTHRED, L.; MITCHELMORE, M. Students' structuring of rectangular arrays. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen. **Proceedings...** Bergen: PME, 2004. p. 465–472 (Vol. 3). Disponible en: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489538.pdf>. Acceso en: 19 jul. 2025.

- OWENS, K.; OUTHRED, L. The complexity of learning geometry and measurement. *In*: GUTIÉRREZ, Á.; BOERO, P. (eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 83-115.
- PRESMEG, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematics. *In*: GUTIÉRREZ, Á.; BOERO, P. (eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p.205-236.
- RADATZ, H. Error analysis in mathematics education. **Journal for research in mathematics education**, Reston, v. 10, n. 3, p. 163-172, 1979.
- RAMÍREZ, R.; FLORES, P.; RAMÍREZ, I. Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. **Revista latinoamericana de investigación en educación matemática**, Ciudad de México, v. 21, n. 1, p. 29-56, 2018.
- RAMÍREZ, B.; GONZÁLEZ, M.; ZAMBRANO, R. Errores que cometen los estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media en vistas ortogonales de figuras geométricas 3D. **Revista chilena de educación matemática**, Valparaíso, v. 15, n. 2, p. 46-62, 2023.
- RIASTUTI, N.; MARDIYANA, M.; PRAMUDYA, I. Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. **Journal of physics: Conference series**. Bandung: IOP Publishing, 2017. p. 1-7 (Vol. 895).
- RICO, L. Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. *In*: KILPATRICK, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (orgs.). **Educación matemática**. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 69-108.
- RICO, L.; FERNÁNDEZ, A. Análisis didáctico y metodología de investigación. *In*: RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. L.; MOLINA, M. (coords.), **Análisis didáctico en educación matemática**. Granada: Comares, 2013. p. 1-22.
- SÁENZ, C.; BRUNO, G. Calibración, autoconcepto y competencia matemática. **Avances de investigación en educación matemática**, Alicante, v. 14, [s.n.], p. 1-14, 2018.
- SARALAR, I.; AINSWORTH, S.; WAKE, G. Middle school students' errors in two-dimensional representations of three dimensional shapes. **Research in mathematics education**, Nottingham, v. 20, n. 2, p. 1-3, 2018.
- SOCAS, M. **Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la secundaria**, Barcelona: ICE/Horsori, 1997. p.124-154.
- STYLIANOU, D. On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE OF GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings...** Utrecht: PME, 2001. p.225-232 (Vol. 4). Disponible en: <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME25-2001-Utrecht.zip>. Acceso en: 22 agosto 2025.
- VILLARROEL, V.; GARCÍA, C.; MELIPILLÁN, R. **Caracterización del tipo de errores y**

aciertos comunes que cometen los estudiantes en los ítems de preguntas abiertas y cerradas de la prueba PISA en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias. Santiago de Chile: Fondo de investigación y desarrollo en educación, 2012.

WATSON, A.; JONES, K.; PRATT, D. **Key ideas in teaching mathematics:** Research-based guidance for ages 9–19. Oxford: Oxford University Press, 2013.

Submetido em: 18 de Março de 2024.

Aprovado em: 16 de Abril de 2025.

Editor-chefe responsável: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi.

Editor associado responsável: Prof. Dr. Vicenç Font.