
ARTÍCULO

Uso de un diagrama histórico como fuente de aprendizaje de la geometría

Using a historical diagram as a source for learning geometry

Josep María Fortuny Aymemí*

 ORCID iD 0000-0002-8231-346X

Rafael Rodríguez Gayarre**

 ORCID iD 0000-0002-9855-2078

Victoria Sánchez García***

 ORCID iD 0000-0003-2134-8025

Resumen

El objetivo de este artículo es reportar cómo se progresa de la visualización a la argumentación, a partir de una trayectoria de aprendizaje que ha sido diseñada haciendo uso de un diagrama histórico como parte del proceso de aprendizaje de la geometría. La secuencia de las tareas de aprendizaje se corresponde con el proceso de transformación de las distintas figuras del diagrama. Se experimenta la trayectoria hipotética de aprendizaje con un grupo de estudiantes de Secundaria y se confronta con la trayectoria real de aprendizaje. El paso de la visualización a la argumentación se produce en la secuencia graduada de las tareas que conllevan diferentes tipos de actividades de aprendizaje. Esta graduación estimula un cambio en las producciones de los estudiantes que es una evidencia clara de su progreso hacia lo que consideramos competencia argumentativa.

Palabras clave: Proceso de aprendizaje de la geometría. Trayectoria hipotética de aprendizaje. Textos matemáticos clásicos. Competencia argumentativa.

Abstract

The objective of this study is to investigate how one progresses from visualization to argumentation, from a learning trajectory that has been designed using a historical diagram as a source of learning geometry. The sequence of the learning tasks corresponds to the transformation process of the different figures in the diagram. The hypothetical learning trajectory is experienced with a group of high school students and confronted with the actual learning trajectory. The move from visualization to argumentation occurs in the graded sequence of tasks involving different types of learning activities. This graduation stimulates a change in the students' productions that is clear evidence of their progress towards what we consider argumentative competence.

* Doctor en Matemáticas, UIB. Catedrático emérito de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), campus UAB, Bellaterra, España. E-mail: josepmaria.fortuny@uab.cat

** Doctor en Pedagogía, UAB. Profesor asociado (jubilado) de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), campus UAB, Bellaterra, España. E-mail: rrodrig3@xtec.cat

*** Doctor en Pedagogía, US. Catedrática (jubilada) de la Universidad de Sevilla (US), Sevilla, España. E-mail: vsanchez@us.es

Keywords: Learning geometry. Hypothetical learning trajectory. Classical mathematical texts. Typology of the argumentative behavior of the student.

1 Introducción

El papel que puede jugar la Historia de las Matemáticas en el currículum escolar ha sido ampliamente tratado en diferentes publicaciones; por ejemplo, Kazim (1983) menciona diferentes objetivos para su uso en la enseñanza de las Matemáticas en los niveles 6-12 años y 12-6 años (correspondientes a distintas etapas educativas según los países considerados). Por ejemplo, tal como menciona Santaló (1994, p. 82) citando a este autor, entre los objetivos del uso de la Historia de las Matemáticas se enfatiza la importancia de incluir en su enseñanza “ejemplos de casos en que la matemática ha progresado gracias a la idea de generalizar resultados conocidos”. Para otros autores, la Historia de las Matemáticas y de su enseñanza puede servir como inspiración para el diseño de actividades didácticas que amplían sus efectos pedagógicos (Castelnuovo, 1966; Richard; Meavilla; Fortuny, 2010; Fried, 2001; Fauvel; Maanen, 2002; Freiman; Volkov, 2022). Tradicionalmente, al menos en nuestro sistema educativo, las Matemáticas escolares suelen presentar conceptos y hechos matemáticos aislados. Tampoco es frecuente abordar como contenido explícito el trabajo con procesos como los argumentativos, cuyo papel se suele presentar de una manera transversal, sin incidir en su presencia. Y esto puede dar lugar a que los estudiantes de los primeros niveles vean las matemáticas como algo impersonal, alejado de los contextos, situaciones y procesos que contribuyeron a su generación.

El objetivo de este artículo es reportar cómo progresan de la visualización a la argumentación unos estudiantes de un curso de Secundaria (13-14 años), utilizando un diagrama histórico (entendiendo esta última palabra, en el sentido de que ha influido en la comprensión de estudios posteriores (Haskins, 1967)), como parte del proceso de aprendizaje de la geometría. El trabajo de observación y exploración ejerce procesos de visualización que hacen aumentar la comprensión de relaciones figurales y, por tanto, el aprendizaje de la geometría. Consideramos que el progreso de visualizar a argumentar no solo puede ejemplificarse, sino también generarse, a partir de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) que ha sido diseñada haciendo uso del mencionado diagrama. Autores como van Eemeren *et al.* (1996) han destacado la importancia de la argumentación como

[...] una actividad verbal y social de la razón dirigida a aumentar (o disminuir) la aceptabilidad de un punto de vista controvertido para el oyente o lector, mediante la presentación de una serie de proposiciones destinadas a justificar (o refutar) el punto

de vista ante un 'juez racional' (Van Eemeren *et al.*, 1996, p. 5).

Basándonos en el Libro de Geometría de Abraham bar Hiyya (ca. 1065-1136), conocido en latín como “Savasorda” (Guttman, 1903; Millàs, 1931), centramos nuestra atención en una secuencia de imágenes, usadas en el cálculo del área del círculo. Savasorda escribió sus obras originales en hebreo, en la Barcelona gobernada por cristianos, respondiendo a una petición urgente de notables judíos de Provenza; allí también colaboró con Platón de Tivoli (1110-1145) en la traducción de varias obras árabes al latín. El mayor logro de bar Hiyya es la creación de un idioma matemático hebreo rabínico, gran parte del cual sobrevive en el hebreo moderno.

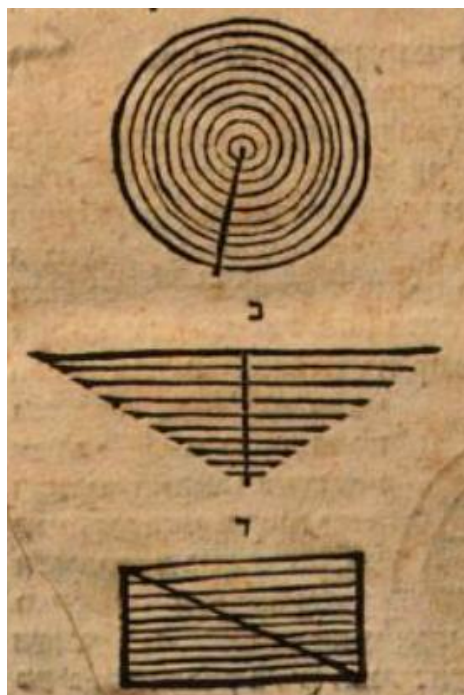


Figura 1 – Reproducción de una imagen del texto del original de Savasorda.
Fuente: Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliográfico¹

A partir de una secuencia de imágenes (ver Figura 1) de su obra de geometría práctica en la que intenta demostrar la fórmula del área del círculo se ha diseñado una trayectoria hipotética de aprendizaje (Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021; Simon, 1995) con la finalidad de indagar sobre cómo pueden progresar de la visualización a la argumentación estudiantes de Secundaria. Consideramos que hay un paralelismo entre la transformación en la secuencia de imágenes y los procesos de figuración implícitos en la geometría. En el progreso de la visualización a la argumentación, damos mucha importancia al aprendizaje de procesos matemáticos relacionados con el hecho de *argumentar*. Por ello, caracterizaremos el aprendizaje de los estudiantes por medio de los progresos en sus acciones argumentativas.

¹ Disponible en: https://bvpb.mcu.es/es/catalogo_imagenes/grupo.do?path=154236

Entendemos estas acciones como las actividades que apoyan e impulsan la producción de una argumentación matemática. Su manejo lleva a la competencia argumentativa, entendida como la habilidad del razonamiento que permite explicar y entender el orden de las partes de un proceso, así como la relación que existe entre estas partes para llegar a una conclusión (Solar; Azcárate; Delofeu, 2012).

2 Marco conceptual

El marco de esta investigación contempla establecer unos referentes que nos permitan abordar el mencionado progreso. Estos referentes se basan en: la noción de competencia argumentativa, los procesos de visualización, el papel jugado por la información aportada por el análisis a priori del texto de Savasorda y las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) de Simon (1995), específicamente, el proceso hipotético de aprendizaje. A continuación, pasamos a desarrollar brevemente cada uno de estos referentes.

2.1 Aproximación a la competencia argumentativa

Como hemos indicado al final del apartado Introducción, en este estudio asumimos que la competencia argumentativa requiere unas acciones argumentativas que se pueden desarrollar con la práctica de una gradación de tareas. Estas acciones comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, pasan por la formulación de conjeturas y luego se concentran en la búsqueda de ideas o argumentos que conforman la argumentación del enunciado y la organización de dichas ideas en un discurso. En las acciones que conllevan una producción de argumentación incluimos los modos de explorar, conjeturar, argumentar y demostrar (Balacheff, 2000; Thurston, 1994; Crowell; Kuhn, 2014). También consideramos acciones argumentativas el dar razones que sean aceptables, es decir, que sean pertinentes al contenido y capaces de resistir los contraejemplos (Duval, 1993). Los argumentos producidos por los estudiantes pueden variar desde simples observaciones hasta argumentos formales y estructurados.

Acorde con la perspectiva de la concepción social del aprendizaje de Yackel, Cobb y Wood (1991), consideramos que el aprendizaje surge, por una parte, durante las interacciones sociales entre estudiantes y profesor y, por otra, en la utilización de artefactos, en nuestro caso diagramas extraídos de trabajos pretéritos. Entendemos así las oportunidades de aprendizaje matemático como la relación entre contenidos matemáticos, acciones discursivas del profesor

y del alumnado, y la mediación de distintos recursos. En este sentido, una oportunidad de este tipo se transforma en aprendizaje real cuando existen evidencias, en términos de competencias argumentativas por parte del estudiante, que denotan cambios o transiciones en las argumentaciones.

2.2 Procesos de visualización

Para analizar la emergencia de las argumentaciones de los estudiantes usamos el concepto de inferencia figural de Fischbein (1993), Richard (2004) y la perspectiva de Duval (2007) en relación con el aprendizaje de la geometría. Para estos autores, los procesos de visualización se entienden como las acciones que corresponden a observación y exploración. Este proceso conlleva el desarrollo de habilidades espaciales de interpretación de información figurativa y del procesamiento visual. En este estudio, se considera el papel que desempeñan los procesos de visualización en el reconocimiento de propiedades y relaciones en las figuras geométricas y en los procesos de justificación; además, se subraya el papel heurístico de las figuras en el aprendizaje y en el desarrollo de los procesos de visualizar, justificar y construir en los contextos geométricos (Bishop, 1989). También, siguiendo literalmente a Presmeg (2020 p. 900), entendemos la visualización como:

[...] la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar en y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión.

2.3 Análisis a priori del texto de Savasorda

En la traducción al catalán de la obra de Savasorda (Millàs, 1931, p.72) de la edición en hebreo de Guttmann (1903) se declara:

La demostración del área del círculo es: Si se abre la superficie del círculo, por un lado, y se allanan todas las circunferencias concéntricas desde el exterior hasta el centro, se convertirán en rectas que irán disminuyendo sucesivamente hasta un punto que será el centro del círculo, por lo que nos resultará un triángulo, cuya área será la mitad de la base -o sea la circunferencia-, por la altura o sea el radio (ver Figura 1). Por ejemplo, sea un círculo el diámetro del cual mide 14; se multiplicará 14 por 3 y 1/7 y tendremos la circunferencia; multiplicando la mitad del diámetro, 7, por la mitad de la circunferencia, 22, tendremos 154, que es el área del círculo.

Interpretamos la secuencia de imágenes que acompañan a esta descripción como los fotogramas que se suceden mediante transformaciones. Desde esta perspectiva, se puede afirmar que el proceso que sigue Savasorda en su demostración se realiza en los siguientes

pasos (ver Cuadro 1).

Transformaciones	Procesos	Figuración
1. El círculo se descompone en infinitas circunferencias concéntricas que se cortan por un radio R del círculo inicial.	Descomponer	
2. Las infinitas circunferencias concéntricas son modificadas (desenrolladas) para convertirlas en segmentos con una longitud que va desde $2\pi R$ hasta cero.	Desarrollar	
3. Los segmentos son convertidos en rectángulos de altura cero (o infinitesimal), y por reconfiguración se disponen formando un triángulo isósceles con base $2\pi R$ y altura R .	Reconfigurar	
4. Se descompone el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de base πR y altura R .	Descomponer	
5. Por reconfiguración (como las piezas de un puzle) los triángulos rectángulos se unen para formar un rectángulo de base πR y altura R . Como sabemos calcular el área de este nuevo objeto obtenido a partir del objeto inicial podemos determinar el área del círculo: πR^2 .	Reconfigurar	

Cuadro 1 – Transformación dinámica del círculo en un rectángulo
Fuente: Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliográfico²

Las imágenes del Cuadro 1 son como fotogramas de una secuencia imágenes de Savasorda. La secuencia de fotogramas se puede apreciar como una transformación dinámica que conlleva procesos de descomponer, desarrollar y reconfigurar una imagen, tal como lo entiende Duval (2007).

Con el fin de relacionar el texto de Savasorda con las respuestas de los estudiantes, nos centramos en la numeración hebrea de la imagen (ver Figura 1) y observamos que aparece el número 2 ($\beth$ Bet) debajo de la primera figura; esto induce a pensar que Savasorda distingue dos elementos en la construcción de la figura, las circunferencias concéntricas y un radio, todas de trazo grueso. De la misma manera distingue dos elementos ($\daleth$ Dálet) más debajo de la segunda figura, las líneas paralelas alisadas formando un triángulo y el segmento, que representa la altura; así puede dar a entender que las tres imágenes se construyeron mediante elementos, como si fueran los fotogramas de un sistema visual de explicación del Cuadro 1.

² Disponible en: https://bvpb.mcu.es/es/catalogo_imagenes/grupo.do?path=154236

De hecho, parece que Savasorda, si nos fijamos en un detalle constructivo que puede verse en la Figura 1, divide el círculo en un conjunto finito de coronas circulares, que se convierten en rectángulos. El propio Millàs (1931, p. xiii) hace notar en su introducción, que el procedimiento de Savasorda consiste en dividir el círculo en tiras o anillos estrechos, y allanarlos después. En la página siguiente del texto de Savasorda en la que aparece la Figura 1, se muestra otra imagen (Figura 2) que se puede interpretar como la obtención de un rectángulo a partir de una corona circular y a la rectificación de los rectángulos en trapecios.

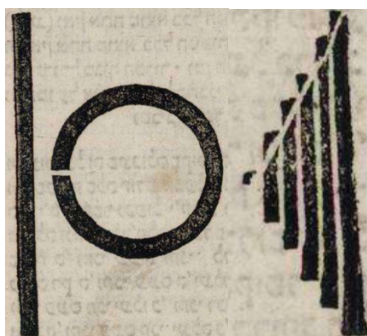


Figura 2 – Reproducción de una imagen en el texto del original de Savasorda.
Fuente: Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliográfico³

2.4 Sobre las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

En una trayectoria hipotética de aprendizaje se distinguen los siguientes componentes: el objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje, es decir, la predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionan en el contexto de las actividades de aprendizaje (Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021). Se destaca la importancia de la tarea, su diseño, los objetivos de aprendizaje y la progresión de aprendizaje. En las tareas y en su diseño se consideran los momentos en los que se producen las interacciones entre el profesor y el alumno y entre los propios estudiantes como una actividad de todo el proceso de aprendizaje.

3 Metodología

Dado que se trata de un estudio exploratorio, intentamos obtener una mayor información y una comprensión general de lo que sucede cuando se utiliza la Historia como elemento didáctico en una clase de Matemáticas. Para ello, se hizo el seguimiento de unos estudiantes que participaron en una secuencia didáctica real, desarrollada en esa clase con su profesor de

³ Disponible en: https://bvpb.mcu.es/es/catalogo_imagenes/grupo.do?path=154236

Matemáticas habitual para, posteriormente, siguiendo un enfoque cualitativo, focalizar el trabajo en dos de los estudiantes participantes. A continuación, nos centramos en el diseño de las tareas y en los indicadores que suponíamos nos permitirían seguir el proceso de aprendizaje, para continuar con su implementación en el aula, y la recogida y análisis de datos en distintas etapas del desarrollo de las sesiones de enseñanza.

3.1 Diseño de las tareas que conformaron la trayectoria hipotética de aprendizaje y enumeración de los indicadores del proceso de aprendizaje pretendido

Se diseñó una THA (Cuadro 2) considerando que se iba a desarrollar en un aula de segundo año de enseñanza obligatoria (13-14 años), y que los estudiantes ya habían abordado los elementos necesarios de geometría y medida. La THA constaba de tres componentes: un objetivo de aprendizaje general (aprender a pasar de la visualización a la argumentación a partir de situaciones en contextos históricos), unas tareas y los objetivos que se pretendían con cada una de ellas (ver el Cuadro 2, en el que se recoge una síntesis de las tareas de la THA y el objetivo pretendido con ellas).

Estas tareas fueron propuestas a los estudiantes en una guía escrita, incluyéndose la solicitud de que sus respuestas tuvieran un desarrollo detallado.

Tarea	Objetivos que se pretenden
Tarea 1: ¿Qué ves en esta secuencia de figuras de Savasorda? (Se hace referencia a la Figura 1) •Escribe todo lo que te sugieren estas figuras •¿Qué interpretas en la Figura 1?	Interpretar el proceso de visualización.
Tarea 2: •Compara los objetos incluidos en la Figura Cadenas con la primera y segunda imagen de la Figura 1. •Escribe las semejanzas entre ambas figuras.  Figura: Cadenas Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=whYqhpc6S6g&t=34s	Comprender un método de transformación geométrica entre un círculo y un triángulo (tarea que involucra la acción de visualizar).
Tarea 3: •¿Existe alguna relación entre las figuras anteriores y la Figura 1? •¿Crees que recoge lo que Savasorda trata de explicar mediante las imágenes de la Figura 1 para deducir una propiedad geométrica de la primera figura?	Analizar una representación gráfica de unas situaciones en contextos históricos de la Figura 1.

 Tarea 4: •Para cada una de las imágenes de la secuencia escribe una expresión algebraica que la pueda denotar. •Redacta la interpretación que te sugiere esta secuencia de imágenes. Compáralas con las de Savasorda. •Argumenta tu explicación y confróntala con las de tus compañeros. Figura: Secuencias Fuente: https://learning.hccs.edu/faculty/sukhlal.ramharack/cal-math-2413/math-articles-1/Proof%20Without%20Words.pdf	Interpretar el significado de las imágenes (esta tarea involucra la competencia figurativa y estructuración de una secuencia de imágenes). Comunicar las diferentes interpretaciones, situándonos en una posible negociación de significados.
Tarea 5: Presentamos la traducción al catalán de 1931 del libro de Savasorda en la que se puede leer: <i>“La demostración del área de un círculo es: Si se abre la superficie del círculo, por un lado, y se aplanan todas las circunferencias concéntricas desde el exterior hasta el centro, se convertirán en ...”</i> Continúa redactando lo que crees que Savasorda explica en su demostración	Comunicar y establecer una prueba, que estimule la competencia argumentativa.

Cuadro 2 – Tareas de la THA
Fuente: elaboración propia

Con respecto al proceso de aprendizaje, en el Cuadro 3 se presenta un resumen de los indicadores que permitieron, en este estudio, el seguimiento del proceso hipotético de aprendizaje del paso de la visualización a la argumentación con la ayuda de las tareas de la THA. En la columna de acciones se han incluido aquellas acciones discursivas que se esperaban del alumnado y que asumimos podrían ser consideradas como pre-argumentativas (en cursiva en el Cuadro 3), y alguna posible acción a desarrollar por el profesor. En la segunda columna se recoge el efecto esperado y, en la tercera, una reflexión sobre ese efecto de la realización de las acciones que conllevan las tareas. Se pretende que estas ayuden a una transición y progreso hacia niveles cada vez más sofisticados de argumentación.

Tarea	Proceso hipotético de aprendizaje		
	Acciones esperadas	Efecto	Reflexión sobre efecto de las acciones
1	Se espera que los estudiantes participantes en la THA <i>observen</i> las imágenes de la Figura 1 y <i>describan</i> las características de cada una. Se puede dar alguna orientación en el sentido de que la imagen se construyó mediante cinco pasos, como si fueran cinco fotogramas de un sistema visual de explicación (ver Cuadro 1).	Permitir relacionar las características del círculo, el triángulo y el rectángulo de la imagen.	El método de Savasorda para obtener el área del círculo, incluye de forma implícita dos conceptos (procedimientos) geométricos de gran interés didáctico: (i) la equivalencia de figuras (principio de conservación de la cantidad, pero no de la forma), y (ii) la transformación de figuras.

2	Se espera que los estudiantes <i>construyan</i> la Figura Cadenas usando trozos de una cadena de cuentas. Primero, inician con una cuenta y luego, la van rodeando de manera sucesiva.	Poder observar un modelo físico de la primera figura y concluir que se ve como la colección de todos los círculos concéntricos que contiene.	Los estudiantes tienen la posibilidad de argumentar que, si cortan los círculos de la primera imagen y los abren en forma de segmentos, entonces obtendrán un triángulo. Esto es porque la razón entre las longitudes de las circunferencias de los círculos y sus diámetros es constante. La longitud de la base del triángulo resultante es igual a la longitud de la circunferencia del círculo original y su altura es igual al radio de este círculo. Por tanto, podrían argumentar que el área de un círculo es igual a la mitad del producto del radio por la longitud de la circunferencia.
3	Se espera que los estudiantes <i>comparen</i> las figuras anteriores con las formas de estores, tapetes, etc.	Interpretar los segmentos como rectángulos y coronas en lugar de circunferencias. Deben intuir un procedimiento de integración. En la Figura 1 pueden ver cómo Savasorda divide el círculo en coronas circulares que corta y desenrolla, convirtiéndolas en rectángulos.	Los estudiantes llegan a apreciar que la animación recoge lo que Savasorda trata de explicar mediante las figuras de la imagen que se muestra en la Tarea 1 para argumentar una propiedad geométrica.
4	Se espera que los estudiantes <i>relacionen</i> la secuencia de imágenes con expresiones algebraicas.	Observar las expresiones algebraicas vinculadas a la secuencia de imágenes y realizar una interpretación del proceso dinámico: Descomponer, Desarrollar, Reconfigurar, Descomponer y Reconfigurar (ver Cuadro 1).	Se intenta que inicien el proceso de argumentación a partir de un proceso visual.
5	Se espera que los estudiantes <i>analicen</i> cómo comienza la argumentación del área del círculo que se les presenta y los elementos involucrados. Esta tarea implica aprender a establecer conclusiones colectivas. Se trata de seguir un proceso de razonamiento que permita demostrar la igualdad entre las áreas de un círculo y un triángulo cuya base sea la longitud de la circunferencia y la altura su radio.	Apreciar procedimientos como cortar, desplazar y pegar usados en la protoálgebra babilónica y en el álgebra árabe medieval. Una manera de demostrar “ingenua”, porque se fía de lo que se ve cuando se manipulan figuras geométricas cortando, desplazando y pegando.	Lograr argumentar la redacción de la Tarea 4 mostrando que hacen uso del control y gestión de su propio aprendizaje verificando y confrontando sus producciones.

Cuadro 3– Resumen del proceso hipotético de aprendizaje de la THA diseñada
Fuente: elaboración propia

3.2 Experimentación

La THA (Cuadro 2) de este estudio implementó en un aula de 25 estudiantes de segundo año de enseñanza obligatoria (13-14 años). En una de sus clases, el profesor les presentó las tareas de la THA en una guía escrita elaborada en el diseño. La dinámica de clase se organizó, inicialmente, con trabajo individual, seguido de un trabajo conjunto de discusión en el grupo general y, posteriormente, de un trabajo reflexivo y retrospectivo individual. Esta forma de trabajar era bastante habitual en el aula para esos estudiantes. Como las oportunidades de aprendizaje son generadas durante las discusiones en grupo, se hizo que los estudiantes entregaran el trabajo realizado inicialmente. Tras la reflexión individual al finalizar la discusión en grupo, se les solicitó que entregaran una versión modificada incluyendo todo lo que creían haber aprendido.

3.3 Recogida de datos

Para acceder a lo que sucedía en una sesión de clase, y así poder identificar una trayectoria real de aprendizaje, se recogieron datos en distintas etapas del desarrollo de la THA como unidades de análisis:

- escritos individuales antes y después de cada sesión.
- videograbaciones de: a) diferentes sesiones de la realización y discusión conjunta de las tareas del Cuadro 2, b) algunos trabajos en grupo.
- reflexión final individual escrita en la que cada estudiante expresa lo que cree haber aprendido.

Se tomaron como punto de partida cada una de las videograbaciones de la realización de las tareas descritas en el Cuadro 2. En cada una de ellas, se identificaron las acciones realizadas para abordar cada una de las tareas, anotando la frase verbal o escrita, de dónde salían y el proceso del paso de la visualización a la argumentación, que se infiere de ahí. Asimismo, se recogieron las características de dichas acciones y si se repetían en las discusiones del aula, trabajos en grupo o material escrito. En la etapa final nos centramos en si los procesos identificados en las acciones evolucionaban a través de la trayectoria y si realmente habían sido asumidos por el estudiante, identificando los cambios de registro entre la resolución inicial, la confrontación en la discusión y la reflexión retrospectiva personal.

3.4 Análisis de datos

Se realizaron dos tipos de análisis:

- Análisis del contenido de los protocolos escritos por los estudiantes antes y después de la puesta en común (se centra en el desarrollo individual del pensamiento matemático y en los cambios que se han producido).

- Método comparativo constante para hacer emerger, por una parte, los procesos argumentativos que hayan sido contruidos por los participantes e identificados en las transcripciones de las sesiones videogradas, así como para mostrar las interrelaciones que pueden haber entre las aportaciones de los estudiantes y, por otra parte, la dependencia de estas entre sí. Se considera, además, la reproducción y transformación de las ideas durante la comunidad de clase, por medio de las transcripciones de las sesiones videogradas.

El visionado conjunto de los videos junto con sus transcripciones permitió apreciar el carácter de las interacciones y analizar lo que sucede en las que se identificaron (profesor/estudiantes, estudiantes/estudiantes, estudiante consigo mismo). Para ello, nos centramos en las oportunidades de participación en la discusión de clase, en las que ciertas acciones se orientaron a contenidos matemáticos específicos, a diferentes estrategias o a actividades de auto-regulación, de manera que los estudiantes pudiesen ser capaces de comparar y negociar sus respectivas ideas, con la intencionalidad de establecer un significado compartido.

Durante la puesta en común, muchos estudiantes pudieron haber entendido nuevos conceptos o pudieron haber mejorado en su proceso de aprendizaje de nuevos procesos matemáticos. Las evidencias de este progreso fueron obtenidas en la comparación de los documentos escritos por los estudiantes antes y después de las discusiones en el grupo general. Así, para valorar que una oportunidad de aprendizaje había sido aprovechada por un estudiante, se debieron cumplir los siguientes dos requisitos:

- el estudiante tenía que haber evidenciado no tener los conocimientos claros durante el trabajo inicial.
- el estudiante tenía que haber evidenciado en su escrito final que había hecho un progreso respecto a la oportunidad de aprendizaje, tratando de identificar momentos de formalización, de aprender a ver la estructura de una imagen como una inferencia figural, de ser consciente de la necesidad de argumentar, distinguiendo lo que es una evidencia empírica de una deductiva.

Para hacer operativo el análisis de los datos obtenidos de las sesiones videogradas, se utilizaron cuadros como el Cuadro 4, cuyos encabezamientos se corresponden con el número de identificación, el participante, la acción, el tipo de intervención y su interpretación. Estos datos fueron triangulados por tres personas (un investigador perteneciente al equipo investigador, el profesor del aula actuando como investigador y un investigador externo que no

pertenecía al equipo), que rellenaron los cuadros separadamente, analizando tanto las respuestas escritas de varios estudiantes en la realización de actividades, así como las transcripciones de video grabaciones de episodios de aula. Se tuvo en cuenta una revisión exhaustiva de la literatura que se cita en el manuscrito y se llegaron a los consensos que respaldan las aportaciones que se presentan. El posterior análisis consensuado en una puesta en común, llevada a cabo por las tres personas anteriormente mencionadas, condujo a una identificación común de resultados que se presenta en el siguiente apartado.

4 Resultados

Dado el carácter exploratorio y cualitativo de este estudio, aquí nos centramos en los progresos de aprendizaje de dos casos ilustrativos correspondientes a dos estudiantes que se mostraron altamente motivados en este experimento de enseñanza y en los que se identificaron avances muy diferentes: Bruno y Rita (nombres ficticios). Se presentan a modo de ilustración, los progresos de estos dos estudiantes, analizando las acciones, el efecto y reflexión de su trayectoria real de aprendizaje, que se evidencian en los documentos escritos recogidos antes y después de las discusiones en grupo, junto con el análisis de sus aportaciones en el aula recogidas en las videograbaciones; el contraste con lo recogido en el Cuadro 3 nos permite establecer comparaciones entre lo hipotético y lo real, con especial detalle en el caso de Bruno. En el caso de la otra estudiante, Rita, para no redundar en el análisis, se va directamente al Cuadro 4, centrado en el desarrollo de la competencia pre argumentativa. La coordinación de los resultados obtenidos de los distintos análisis nos permite obtener diferentes aproximaciones a lo sucedido en cada caso, es decir, evidenciaremos cómo una misma THA produce en unos estudiantes distintos efectos, facilitando la apreciación de la competencia argumentativa lograda.

4.1 El caso del progreso de Bruno

En los documentos escritos iniciales como respuesta a las demandas de las Tareas 1 y 2, Bruno observa las figuras de la imagen y describe las características de cada una e infiere que el círculo se puede transformar en el triángulo y este en rectángulo, como se observa en el siguiente registro:

Bruno: En las tres imágenes podemos ver cosas relacionadas con la proporcionalidad.

Bruno: La primera muchas redondas dentro de las otras, podemos ver una línea que atraviesa

todas hasta llegar al final. Este radio nos demuestra que son proporcionales, ya que el radio de la penúltima más pequeña será el doble de la pequeña. En la segunda, las líneas que atraviesan horizontalmente el triángulo son proporcionales y la vertical que lo atraviesa nos hace ver el Teorema de Tales. En la última, con horizontales paralelas y una diagonal, encontramos el teorema de Tales ya que los triángulos que se forman con la diagonal y las paralelas son semejantes.

(Aportaciones iniciales del estudiante Bruno, 2021).

En los episodios transcritos de la videgrabación, se puede apreciar cómo Bruno participa interactivamente en la discusión, haciendo un trabajo de acompañamiento. En episodios de figuración y deducción, Bruno hace una exposición sin argumentación; podríamos interpretar que asume la relación entre las tres figuras y que justifica utilizando la expresión del área del triángulo; de aquí sus afirmaciones:

Bruno: Savasorda nos intenta explicar por qué el área del círculo es πr^2 y lo podemos ver a partir del triángulo, donde la base del triángulo es el perímetro del círculo y el radio del círculo es la altura.

Bruno: perímetro $\rightarrow b$ $h \rightarrow$ radio

Bruno: Área del triángulo $= b.h/2 \rightarrow 2 \pi r . r/2 = \pi r^2 \rightarrow$ Área de un círculo

Bruno: Así podemos entender por qué es πr^2 .

(Aportaciones durante la discusión colectiva del estudiante Bruno, 2021).

En otro episodio pre argumentativo de figuración, Bruno se muestra de acuerdo con la justificación deductiva que hace la estudiante Rita, pero no explicita el porqué de dicho acuerdo tal como se puede ver el registro siguiente. Él sigue sin argumentar, realizando una justificación con la ayuda de un ejemplo. Da la sensación de que asume lo dicho anteriormente por otro estudiante y parece como si aún no hubiese incorporado todo lo que se estaba discutiendo. Posteriormente, en la reflexión final, escribe en su cuaderno:

Bruno: Si se abre la superficie del círculo, por un lado, y se aplanan todas las circunferencias concéntricas desde el exterior hasta el centro, se convertirán en una forma parecida a un triángulo donde su altura será el radio y su base el perímetro.

(Aportaciones finales del estudiante Bruno, 2021).

Interpretamos que asume la relación entre las tres figuras y que justifica utilizando la expresión del área del triángulo, afirmando que: *podemos entender por qué es pi por radio al cuadrado*. Su progreso lo podemos resumir indicando que, inicialmente, observa las figuras de la imagen y describe las características de cada una. Después, en grupo, infiere que el círculo se puede transformar en el triángulo y este en el rectángulo. En la discusión en grupo realiza una pre-argumentación con la ayuda de un ejemplo y finalmente su escrito de reflexión lo podemos interpretar más como un proceso empírico que deductivo.

Desde el marco de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, si comparamos la trayectoria hipotética con la real de Bruno, notamos que sus acciones son más bien expositivas y solo se justifican a través de ejemplos; no se incorporan ideas en sus afirmaciones, adolecen

de acciones argumentativas que expliquen el porqué de las cosas y justifiquen razonadamente las ideas. Basándose en estas acciones, podemos afirmar que su trayectoria real solo se aproxima, ligeramente, a la hipotética, no alcanzándose la competencia argumentativa. A falta de evidencia estas acciones argumentativas, se puede decir que no se aprecia un aprendizaje real.

4.2 El caso del progreso de Rita

En la resolución inicial de las tareas, Rita redibuja las figuras de la siguiente manera (ver Figura 3):

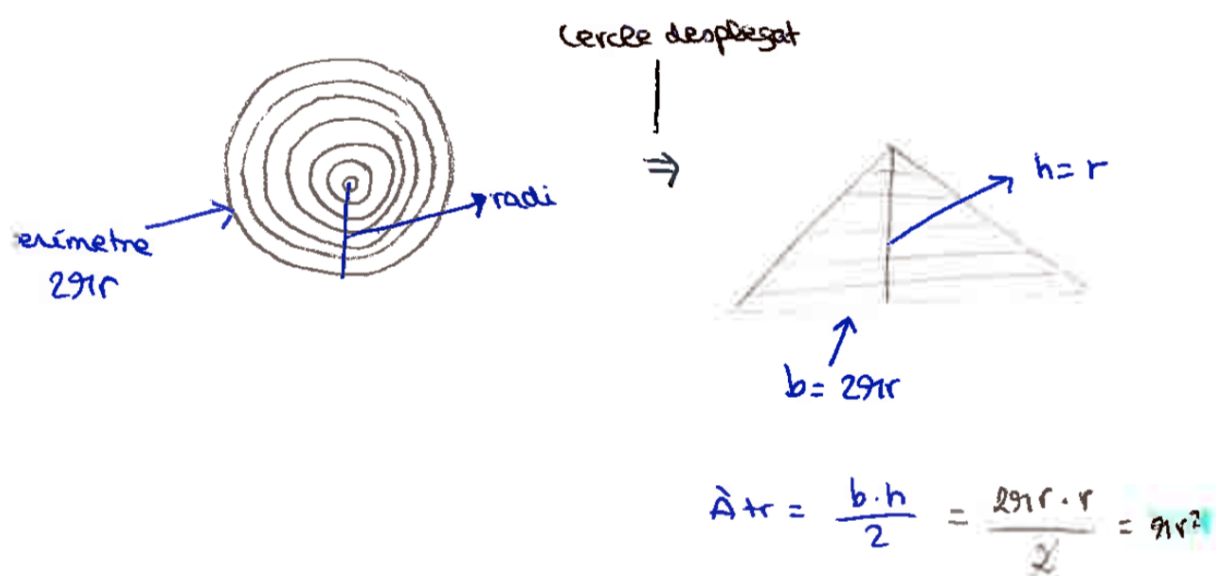


Figura 3 – Inicio de Rita
Fuente: autores basados en las aportaciones de Rita

Luego, en un documento escrito, respondiendo a preguntas de la Tarea 3, mostrando y explicando los pasos de la Figura 3 realiza los siguientes aportes:

Rita: Desde el centro de la circunferencia desplegamos los círculos hasta que estén aplanados y conseguir un triángulo.

Rita: Círculo desplegado.

Rita: perímetro $2\pi r$

Rita: Área círculo.

(Aportaciones iniciales en un documento escrito de la estudiante Rita, 2021).

Rita realiza una inferencia figural (Richard, 2004), como un paso de razonamiento gráfico a uno discursivo. Deduce que, si cortan los círculos de la primera imagen y los abren en forma de segmentos, entonces obtendrán un triángulo e infiere que el círculo se puede transformar en el triángulo y este en el rectángulo.

Rita: Lo que intenta explicar con estas imágenes es la relación entre las áreas de tres figuras. Observamos que, si esta circunferencia de alguna manera la desplegamos, se transforma en el triángulo que es la segunda figura y vemos que el radio es la altura del triángulo isósceles rectángulo. El rectángulo está conformado por dos triángulos rectángulos que también podemos encontrar si partimos el triángulo anterior y los juntamos de manera que podemos formar un rectángulo.

Rita: Podemos ver que la relación entre las áreas es por saber de dónde proviene el área de la circunferencia. Para saberlo lo hacemos a partir de las otras figuras. Es decir, principalmente tenemos el área de un rectángulo ($b \cdot h$) que transformamos en un triángulo ($b \cdot h/2$) y a partir de eso vemos el área del círculo.

(Aportaciones iniciales de la estudiante Rita, 2021).

Rita participa interactivamente en la discusión, con acciones discursivas, de conexión y de formulación como inicio a acciones argumentativas. La estudiante realiza una generalización en las tareas 1 a 4 como mostramos a continuación en un extracto transcrito del episodio de visualización (ver Cuadro 4; en cursiva se indican las acciones).

Turnos	Participante	Acción	Intervención	Interpretación
11	Rita	<i>Representar gráficamente el triángulo en la pizarra e ir explicando</i>	<i>Justificar la longitud de la última circunferencia y la altura del triángulo.</i>	Es importante esta situación pues se lleva a cabo una interacción en la que es la estudiante en concreto quien pasa a centrar la explicación y no el profesor; se produce una interacción /regulación por la acción argumentativa llevada a cabo por Rita
12	Profesor	Referenciar	<i>A todas las circunferencias</i>	Se invita a la estudiante a que realice la conexión entre los diferentes elementos
13	Rita	<i>Dibujar de nuevo</i>	<i>Vuelve a su discurso intentando justificar el radio y la altura del triángulo</i>	Conecta círculo y triángulo. Relaciona los diferentes elementos y empieza a establecer conexiones discursivas entre ellos
14	Profesor	Demandar concreción	<i>¿Esto que acabas de dibujar qué es?</i>	Se pide a la estudiante que concrete y relacione los elementos que va generando en su discurso
15	Rita	<i>Identificar</i>	<i>El radio</i>	Va apareciendo la concreción de los elementos
16	Profesor	Preguntar	<i>¿El radio de qué?</i>	Incidencia en uno de los elementos (radio) en referencia a la circunferencia. De manera general, en esta situación se facilita que los estudiantes vayan negociando los significados
17	Rita	<i>Señalar las circunferencias</i>	<i>Identifica los elementos que intervienen</i>	Observación de evidencia empírica y conexión entre los elementos de las figuras

Cuadro 4– Episodio de desarrollo de las competencias de visualización
Fuente: elaboración propia

En la fase de trabajo reflexivo final, Rita escribe en su cuaderno una retrospectiva basada en operaciones de transformación de objetos y anticipación de resultados.

Rita: La demostración del área de un círculo es: Si se abre la superficie del círculo, por un lado, y se aplanan todas las circunferencias concéntricas del exterior hasta el centro, se convertirán en un triángulo isósceles.

(Aportaciones finales de la estudiante Rita, 2021).

Rita aprecia el paso del corte de los círculos (Figura 1) a segmentos y la posterior obtención de un triángulo. En su trabajo en grupo, infiere que el círculo se puede transformar en el triángulo y este en el rectángulo; en la discusión aporta lo que podemos indicar como un proceso deductivo, ya que cumple las características de la deducción indicadas por Balacheff (2000).

Si comparamos la trayectoria hipotética con la real de Rita, podemos afirmar que se identifican acciones explicativas y justificativas. Sus afirmaciones son aceptables y muestran evidencias, por lo que sus acciones llevan a poder decir que coincide con la THA.

Para finalizar, queremos señalar que los resultados del análisis del progreso de aprendizaje de los dos estudiantes han puesto de manifiesto el efecto de las acciones de las tareas (ver Cuadro 3) y cómo estas acciones han ido variando desde una situación inicial, pasando con la confrontación en las sesiones de discusión y culminando con una sesión reflexiva. En el caso de Rita podemos concluir que, el grado de acercamiento de la Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) a la Trayectoria Hipotética (THA) es mucho más cercano que en el caso de Bruno. La utilización por Rita de las oportunidades de aprendizaje proporcionadas incidió en un grado de adquisición de la competencia argumentativa mayor que el de Bruno. Se puede decir que los resultados de este estudio, más allá de permitir aproximarnos a lo que sucede en el caso particular de dos estudiantes, nos han permitido mostrar los diversos aprendizajes que coexisten en el transcurso de una trayectoria, diferencias que, de no ser apreciadas por el docente, pueden pasar desapercibidas y ser afectadas positiva o negativamente por su actuación.

5 Conclusiones

El estudio realizado nos ha permitido aproximarnos al progreso de aprendizaje de la competencia argumentativa en dos estudiantes a través del contraste de una trayectoria hipotética de aprendizaje con algunos logros identificados en las trayectorias reales de aprendizaje.

Con respecto al uso de los recursos históricos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se ha apreciado el papel que puede jugar recurrir a trabajos matemáticos pretéritos en el desarrollo de la competencia argumentativa de unos estudiantes. El uso en la enseñanza de las Matemáticas de diferentes situaciones históricas, enmarcadas en diferentes culturas, puede dar a los estudiantes una visión multicultural de cómo se ha generado el saber

matemático, añadiendo un objetivo más a los mencionados por Kazim (1983). El introducir procesos como argumentar a través de una situación histórica, utilizada no como ejemplo sino para dar significado a través de ella, puede contribuir al aprendizaje de dicho proceso y ser una herramienta para valorar el desarrollo de la competencia argumentativa en los estudiantes. Lógicamente, una misma situación histórica puede reutilizarse con otros objetivos de aprendizaje (otros procesos, introducir determinados contenidos matemáticos), simplificando la labor del docente.

En cuanto al papel del profesor, tal como se ha planteado en la THA, en la interacción producida entre los estudiantes y este, emergen procesos tales como relacionar, explicar, enunciar, reconocer, argumentar y razonar, vinculados a estudiantes individuales. Esto nos conduce a reconsiderar el importante papel del profesor en el aula, añadiendo a sus tareas habituales la gestión y dinamización de las discusiones y potenciando las intervenciones de todos los estudiantes. El dominio de esta competencia docente es de gran importancia en el desarrollo de una nueva forma de comunicación entre todos los que intervienen en las THA. El estudio con figuraciones y textos históricos, aunque esté dirigido a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje, necesita la intervención del docente, que puede permitirle ser consciente de las diferentes trayectorias reales de aprendizaje que se originan en un aula y su correspondiente gestión. Consideramos que estas son también tareas en la labor en el aula del profesor a las que estudios como el aquí presentado pueden informar.

En relación con los estudios que se han ocupado del diseño e implementación de las trayectorias de aprendizaje, este estudio ha incorporado a las THA ya conocidas (Simon, 1995; Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021), el papel de la interpretación de las imágenes de un texto del siglo XII (Figura 1) en el desarrollo de la competencia argumentativa de unos estudiantes, aportando nuevas ideas a la evolución de dichas trayectorias. El progreso de aprendizaje se evidencia contrastando la THA con las trayectorias reales de aprendizaje en lo relativo al paso de la visualización a la argumentación, en la secuencia graduada de las tareas que conllevan diferentes tipos de actividades de aprendizaje. Esta graduación estimula un cambio de producciones tanto en las escritas como en el discurso oral en las discusiones. Los cambios se pueden valorar como una evidencia clara del progreso hacia la competencia argumentativa en el paso de la visualización a la argumentación, ya puesto de manifiesto en contextos más generales (Crowell; Khum, 2014), o con otros procesos matemáticos como puede ser la interpretación de gráficas funcionales (Solar; Azcárate; Delofeu, 2012). El diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje realizado conlleva a que los estudiantes den razones, para la aceptabilidad del discurso que van generando, de manera que van justificando sus

proposiciones como un proceso de argumentación, en el sentido de van Eemeren *et al.* (1996). Que el profesorado pueda acceder, fácilmente, comparando trayectorias, a reconocer dichos cambios, puede ayudar a reformular su actuación posterior en el transcurso de la trayectoria.

Somos conscientes de las limitaciones que presenta un estudio como el aquí presentado (una trayectoria de aprendizaje, un aula y dos estudiantes como ejemplos representativos). La incorporación en las aulas escolares de otras trayectorias como la aquí mostrada, o la misma con otros objetivos, pueden ser de gran utilidad, pero, evidentemente, es necesario el desarrollo de nuevos estudios de este tipo para poder validarlo. Nuevas trayectorias, con otros estudiantes y profesores, son necesarias para mejorar sus posibilidades de uso en un contexto escolar. Esto puede abrir nuevas líneas de investigación en el campo de la Educación Matemática.

Para finalizar, queremos destacar que, gracias a la aportación histórica, se ha mostrado cómo unos estudiantes han podido trabajar a partir de situaciones y tareas que comparten tanto un valor formativo como epistemológico, sin que los fenómenos de descontextualización, despersonalización y desincretización sean obstáculos insalvables en el diseño de actividades. En la presentación histórica puede darse conjuntamente el progreso de estos aprendizajes. Al comparar los progresos de aprendizaje de los estudiantes con la THA, podemos sugerir una mejora en el diseño de tareas, proporcionando más recursos de geometría, orquestada por el profesorado. Es esencial el papel del profesorado para favorecer la interacción social, necesaria para que los estudiantes desarrollen contenidos y habilidades relacionadas con los procesos de visualización, comunicación y argumentación.

Asimismo, es importante valorar que los procesos de regulación, que resultan de las interacciones entre los participantes de la comunidad de aprendizaje, contribuyen a los diferentes progresos de resolución de la tarea planteada, como en nuestro caso, de una visualización a una posible argumentación. Asumimos con Thurston (1994) que la argumentación es social y dialógica para explicar y convencer, y asumimos con Balacheff (2021) que la interacción social es el motor de los procesos de validación y, por tanto, hay que considerar en la enseñanza y el aprendizaje, como se ha intentado en este artículo, la transición de procesos básicos como es el paso de la visualización a la argumentación matemática.

Agradecimientos

Queremos agradecer a los profesores Josep Tarrés, Vicente Meavilla, Nuria Climent, y Andrea Cárcamo la pertinencia de sus comentarios, a los estudiantes participantes su total disponibilidad para hacer posible este estudio, y a los revisores del comité editorial por el interés

mostrado en la revisión de este trabajo.

Referencias

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas**. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BALACHEFF, N. The transition from mathematical argumentation to mathematical proof, a learning and teaching challenge. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 14., 2021. **Proceedings**. Shanghai: East China Normal University Press, 2024. Vol II p. 33. Disponible en: <https://www.icme14.org/ueditor/jsp/upload/file/20210525/1621952328361070184.pdf>. Acceso en: 1 dic. 2024

BISHOP, A. **Matemática y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional**. Barcelona: Graó, 1989.

CÁRCAMO, A.; FORTUNY, J. M.; FUENTEALBA, C. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 39, n. 1, p. 45-63. 2021, <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857>. Disponible en: <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v39-n1-carcamo-fortuny-fuentealba/2857-pdf-es>. Acceso en: 1 dic. 2024.

CASTELNUOVO E. **La via della Matematica: La Geometria**. Firenze. La Nuova Italia, 1966. Disponible en: http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/fare_scuola.pdf. Acceso en: 1 dic. 2024

CROWELL, A.; KUHN, D. Developing Dialogic Argumentation Skills: A 3-year Intervention Study. **Journal of Cognition and Development**, Londres, v. 15, n. 2, p. 363-381. DOI: 10.1080/15248372.2012.725187. Disponible en: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15248372.2012.725187> Acceso en: 1 dic. 2024

DUVAL, R. Argumenter, démontrer, expliquer; continuité ou rupture cognitive? **Petit X**, Grenoble, v. 31, p.37-61, 1993, Disponible en: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/31x5_1570192011747-pdf. Acceso en: 1 dic. 2024

DUVAL, R. **Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof**. *In*: BOERO, P. (ed.). **Theorems in School**. From History, epistemology and Cognition to Classroom Practice. Rotterdam: Sense Publishers, 2007. p. 137-162.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. (eds.). **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. New York, Kluwer academic publishers, 2002.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, p. 139-162, 1993. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689>. Acceso en: 1 dic. 2024

FREIMAN, V.; VOLKOV A. Historical and Didactical Roots of Visual and Dynamic Mathematical Models: The Case of “Rearrangement Method” for Calculation of the Area of a Circle. *In*: RICHARD, P. R. *et al.* (eds.). **Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence, Mathematics Education in the Digital Era**. Cham: Springer, 2002. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_16 Acceso en: 1 dic. 2024

FRIED, M. N. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? **Science & Education**, New York, v. 10, p. 391-408, 2001.

GUTTMANN, M. **Chibbur ha-Meschicha we-ha-Tishboret**. Berlin: Mekise Nirdamim, 1903.

Disponível em: <https://www.hebrewbooks.org/38608>. Acesso em: 1 dic. 2024

KAZIN, M.M. The use of History of Mathematics in the teaching of Mathematics in Secondary Education. *In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION*, 4., 1983, Berkeley. **Proceedings**. New York: Springer Nature, 1983. p. 402-404.

HASKINS, C. H. **Studies in the History of Mediaeval Science**. New York: Frederick Ungar Publishing, 1967.

HIYYA, A. B. **הספר סוראט הארצ' (Séfer Surat ha-aretz)**. Offenbach. Madrid: Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliográfico, 2010. Disponível em: https://bvpb.mcu.es/es/catalogo_imagenes/grupo.do?path=154236. Acesso em: 1 dic. 2024

MILLÀS, J. M. **Libre de geometria**. Barcelona: Editorial Alpha, 1931.

PRESMEG, N. Visualization and Learning in Mathematics Education. *In: LERMAN, S. (ed.). Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer, 2020.

RICHARD, P.R. L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 57, p. 229-263, 2020.

RICHARD, P.R., MEAVILLA, V. Y FORTUNY, J.M. Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. **Enseñanza de las ciencias**, 28(1), 95–112., 2010, <https://raco.cat/index.php/ensenanza/article/view/189099> Acesso em: 7 jun2 021.

SANTALÓ, L-A. **Matemáticas y Sociedad**. En Santaló y otros: La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia. Madrid: Rialp, 1994. p. 70-85.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749205>. Acesso em: 1 dic 2024

SOLAR, H.C.; AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 30, n. 3, p. 133-154, 2012. Disponível em: <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285687/373659>. Acesso em: 1 dic. 2024.

THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, New York, v. 30, n. 2, p. 161-167, 1994.

VAN EEMEREN, F. H.; GROOTENDORST, R.; HENKENMANS, F. S.; BLAIR, J. A.; JOHNSON, R. H; KRABB, E. C.; PLANTIN, C.; WALTON, D. N.; WILLARD, C. A.; WOODS, J.; ZAREFSKY, D. **Fundamentals of Argumentation Theory: a handbook of historical background and contemporary developments**, Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1996.

YACKEL, E.; COBB, P.; WOOD, T. Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 22, n. 5, p. 390-408, 1991.

**Submetido em 21 de Abril de 2023.
Aprovado em 16 de Agosto de 2024.**