ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Los campos interpretativos en la didáctica de la matemática: el caso del teorema de Pitágoras

Interpretive fields in mathematics education: the Pythagorean theorem case

Carlos **Rondero-Guerrero** *

ORCID iD 0000-0003-0663-8366

Aarón V. **Reyes-Rodríguez** **

ORCID iD 0000-0001-8294-9022

Resumen

En este trabajo exponemos y explicamos aquellos elementos que conforman un constructo teórico denominado *campo interpretativo* (CI), el cual se genera a partir de un objeto matemático llamado núcleo del CI. Para ejemplificar y evidenciar el proceso constructivo de un CI, elegimos al teorema de Pitágoras (TP) como núcleo, dada su relevancia dentro de la matemática y como objeto de aprendizaje en la didáctica. Un CI está integrado por redes conceptuales que estructuran los objetos matemáticos inmersos en el núcleo, las cuales se explicitan mediante herramientas hermenéuticas, particularmente la analogía. Durante el proceso constructivo del CI asociado al Teorema de Pitágoras (CI-TP) se destaca la relevancia de la tensión entre opuestos (por ejemplo, particularización-generalización) como generadora de relaciones que articulan significados e interpretaciones entre objetos matemáticos. La finalidad de generar un CI, es obtener una visión global de las relaciones y articulaciones que se desprenden del núcleo, en la que se destaca y transparenta la equivocidad de las interpretaciones en diferentes contextos. Estas relaciones son de utilidad para identificar y diseñar trayectorias didácticas, las cuales son evidencia de un entendimiento matemático, que se puede lograr a través de un proceso de reconstrucción orientada del conocimiento. Como resultado del trabajo, presentamos una representación gráfica de la red parcial de relaciones constituyentes del CI-TP. Dicha red es parcial e incompleta, porque el CI es un constructo dinámico en permanente construcción, cuya estructura se relaciona dialécticamente con los conocimientos de cada persona y de los avances científicos en un cierto momento histórico. Todo lo anterior es muestra de la complejidad inherente a los objetos matemáticos que son puestos en el escenario didáctico, y cuya consideración es fundamental para el desarrollo del entendimiento.

Palabras clave: Campo interpretativo. Articulación. Interpretaciones. Entendimiento. Tensión.

Abstract

In this work, we expose and explain the elements of a theoretical construct called the interpretive field (IF), which is generated from a mathematical object called the IF core. To exemplify and demonstrate the construction process of an IF, we chose the Pythagorean Theorem (PT) as the core, given its relevance within mathematics and as a learning object in didactics. An IF is made up of conceptual networks that structure the mathematical objects immersed in the core, which are made explicit through hermeneutic tools, particularly analogy. During the construction process of the IF associated with the Pythagorean Theorem (IF-PT), the relevance of the tension between opposites (for example, particularization-generalization) is highlighted as a generator of relationships that

* Doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. Profesor investigador titular de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. E-mail: ronderocar@gmail.com.

** Doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. Profesor investigador titular de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. E-mail: aaronr@uaeh.edu.mx.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

articulate meanings and interpretations between mathematical objects. The purpose of generating an IF is to obtain a global vision of the relationships and articulations that emerge from the nucleus, in which the equivocal interpretations in different contexts are highlighted and made transparent. These relationships are useful to identify and design didactic trajectories, which are evidence of mathematical understanding, which can be achieved through a process of oriented reconstruction of knowledge. As a result of the work, we present a graphic representation of the partial network of constituent relationships of the IF-PT. This network is partial and incomplete, because the IC is a dynamic construct in permanent construction, whose structure is dialectically related to the knowledge of each person and to scientific advances at a certain historical moment. The previous ideas exemplify the inherent complexity of the mathematical objects that are placed in the didactic scenario, and which consideration is fundamental for the development of understanding.

Keywords: Interpretive field. Articulations. Interpretations. Understanding. Tension.

1 Introducción

En la didáctica tradicional, la consideración de los objetos matemáticos como a-históricos y descontextualizados, ha generado una problemática de restricción de significados, lo cual, a su vez, se ha traducido en una carencia de herramientas conceptuales que permitan a los estudiantes resolver problemas (FONT; PINO-FAN; BREDA, 2020). Esta perspectiva tradicional es sumamente reduccionista, dado que los objetos matemáticos se caracterizan, precisamente, por su condición histórica y contextual. En lo histórico se puede identificar su génesis, incluyendo necesidades o condiciones sociales que los propiciaron o impulsaron. Por otra parte, lo contextual es importante porque del contexto se desprenden significados, representaciones e interpretaciones diversas.

Otro aspecto problemático en la didáctica tradicional consiste en que, generalmente, el profesor aborda el estudio de un objeto matemático por medio de una única interpretación, en tal caso, emerge un fenómeno de *univocidad interpretativa*, misma que trae aparejado un pensamiento lineal y reduccionista acerca de los objetos matemáticos; restringiendo y obstaculizando, de este modo, el entendimiento de los estudiantes. Consideramos que tal hecho puede revertirse al mostrar, por contraste, una perspectiva amplia y enriquecedora en lo conceptual, cognitivo y aplicativo, de la matemática, al explicitar múltiples interpretaciones de los objetos matemáticos.

Para atender las problemáticas antes mencionadas de reduccionismo histórico y contextual, así como la univocidad de significados, se plantea la pregunta ¿cómo el análisis de la complejidad de los objetos matemáticos puede ser utilizado en la didáctica, para apoyar los procesos de instrucción, específicamente para propiciar de mejor manera el entendimiento de los estudiantes?

Siguiendo la aproximación de Morin (2008), utilizamos a la complejidad como metodología de acción, lo cual implica analizar la complejidad inherente a los objetos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

matemáticos para, de ese modo, propiciar su mayor comprensión, al identificar y resaltar características que no se toman en cuenta en la didáctica tradicional. Lo anterior es importante para superar la visión simplista y reduccionista, que se expresa al considerar que es suficiente mostrar a los estudiantes una única interpretación de los objetos matemáticos, a pesar de la existencia de una multiplicidad de ellas. Por ejemplo, cuando se considera que una definición describe completamente a un objeto matemático.

Atendiendo a la complejidad de la matemática, interesa responder ¿cuáles son algunas de las múltiples interpretaciones de los objetos asociados con el TP que se han ido constituyendo histórica y contextualmente? Con el propósito de dilucidar esta pregunta, nos dimos a la tarea de rescatar diferentes interpretaciones de los objetos asociados con el teorema de Pitágoras (TP). Para enmarcar teóricamente tales interpretaciones, nos apoyamos de la hermenéutica, la cual es una disciplina que estudia la interpretación de los textos (BEUCHOT, 2007; ORTIZ-MILLÁN, 2015) y, por extensión, consideramos que también es útil para explicitar ciertas interpretaciones, que dan origen a relaciones y articulaciones novedosas en la matemática. Como señala Gadamer (1999), la hermenéutica es esencialmente una forma de comprensión y, precisamente, por ello se emplea como dispositivo para comprender la complejidad de los objetos matemáticos.

Un CI puede pensarse como un proceso complejo, en el cual se van estructurando relaciones entre objetos matemáticos y articulando, a su vez, las diferentes interpretaciones que emergen según sea el núcleo de referencia. La estructura develada de relaciones en un CI tiene implicaciones didácticas, debido a que, a partir de dichas estructuras, se pueden identificar y construir trayectorias para favorecer el entendimiento, concebido como una articulación entre objetos, significados e interpretaciones (HIEBERT *et al*., 1997). Con el objetivo de analizar la génesis, constitución y desarrollo de un CI, empleamos a la analogía como herramienta generatriz, dado que ésta proporciona elementos para construir, ampliar y robustecer la estructura de interrelaciones o articulaciones entre objetos matemáticos asociados con el TP, en diferentes contextos.

La analogía es un recurso que permite complementar el sentido literal de los objetos, con el propio sentido alegórico, lo que posibilita dar cuenta de su complejidad. Considerar diferentes interpretaciones de un objeto matemático, favorece la modificación de esquemas cognitivos, al romper con una literalidad interpretativa predominante en el ámbito escolar. Dicha literalidad, obstaculiza la idoneidad didáctica, (FONT; SECKEL; BREDA, 2018) en lo que se refiere a lo epistémico, en cuanto a la adecuada valoración de los contenidos matemáticos que se enseñan y, en lo cognitivo, referido a intentar propiciar un adecuado proceso

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

instruccional, referido a los aprendizajes esperados de los objetos matemáticos.

En esta dirección argumentativa, la equivocidad se manifiesta en un CI, al ir mostrando cómo se propician diferentes articulaciones; es decir, se interrelacionan objetos, conceptos e ideas, lo que posibilita el transitar de una a otra interpretación, favoreciendo una mejor comprensión conceptual, lo que es incidente en la idoneidad didáctica, en lo epistémico y lo cognitivo.

Desde una perspectiva hermenéutica, para intentar superar la univocidad interpretativa, se requiere admitir las diversas *tensiones entre opuestos*, mismas que expresan una equivocidad, manifiesta en múltiples interpretaciones que coexisten y conviven dialécticamente, y, al mismo tiempo, se complementan para construir conocimiento y entendimiento (MONTERO *et al*., 2016).

Para Morin (2008), los antagonismos permanecen, y son constitutivos de entidades, procesos o fenómenos complejos. En tal enmarcamiento, efectivamente en el CI conviven diferentes antagonismos: particular-general; univocidad-equivocidad; linealidad-multidimensionalidad, discreto-continuo, finito-infinito, inducción-deducción, entre otros. En este mismo sentido, desde la perspectiva de Beuchot (2019), los opuestos aprenden a convivir, no se resuelven, sino que coexisten, aportando cada uno su carácter contradictorio al otro, pero en una armonía lograda mediante una especie de negación y de pacto, como mostraremos que ocurre con los elementos integrados en un CI.

Vale la pena remarcar la relevancia del contexto en la constitución de un CI, desde un punto de vista hermenéutico: de acuerdo con Beuchot (2019), mientras más conozcamos el contexto de un texto, lo entenderemos y aplicaremos eficientemente a nuestro propio contexto. Este principio hermenéutico, se puede utilizar para nuestros propósitos al extender, por *analogía*, el contexto de un texto, a los contextos asociados a un objeto matemático. Usualmente lo que ocurre en el aula, es que se intenta propiciar el aprendizaje de un objeto matemático sin su contexto histórico que, al ser desconocido por estudiantes y profesores, limita su interés por comprenderlo. El desconocimiento de la génesis, desarrollo histórico y contextos de un objeto matemático, por parte de los profesores, les impide, muchas veces, diseñar estrategias para incorporar estos aspectos, mismos que son fundamentales, para ampliar el bagaje cognitivo y aplicativo de los estudiantes.

Por otra parte, mientras más se conozcan los contextos inherentes a ciertos objetos, identificados como ideas germinales básicas y fundamentales, estaremos en mejores posibilidades de constituir campos interpretativos robustos de los mismos, lo cual puede ser un indicador que potencie a cierto nivel de profundidad, el entendimiento y comprensión de las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

ideas matemáticas, así como la posibilidad de su aplicación. Es importante resaltar que un CI siempre está en proceso de construcción, dado que nuevos avances científicos, o bien una mayor explicitación de sus elementos constitutivos, pueden dar lugar a la identificación de nuevas relaciones. Un CI es un constructo revelador del tejido fino e inacabado del conocimiento, en forma tal que siempre es posible incorporar nuevas analogías e interpretaciones, según sea el contexto de interés que vaya siendo identificado.

2 Génesis, constitución y estructuración de un campo interpretativo del TP

En este apartado damos inicio al análisis del CI-TP. Como es bien sabido, el TP es un resultado que aparece formalizado y demostrado desde el siglo V a.C., aunque hay referencias históricas de que era conocido por sumerios y egipcios, no en su forma general, sino expresado únicamente como relaciones particulares entre números y formas, lo que se muestra en diversas tablillas de arcilla, por ejemplo, la Plinton 322 (GONZÁLEZ-URBANEJA, 2009). Adicionalmente, el TP, tiene como una de sus características más relevantes, la de ser un saber ancestral, parte de una herencia cultural de la obra humana, y en tal sentido nos interesa identificar los elementos y relaciones constituyentes del CI-TP debido a las implicaciones que puede tener en la didáctica.

Aclaramos que el TP es uno de los resultados más importantes de la matemática (BRONOWSKI, 2011), pero en el ámbito educativo, no se le da su valía histórica y conceptual, dado que, usualmente, se presenta como un resultado general, sin haber explorado en forma previa casos particulares, al estilo de los sumerios o los egipcios, a partir de los cuales, los estudiantes, con ayuda del profesor, pudiesen generalizar el resultado por sí mismos. Cuando el TP se presenta a los estudiantes, sin considerar su génesis histórica, se quedan con una visión restringida del mismo, dejando de lado su trascendencia y relevancia en la elaboración de otras ideas, conceptos y resultados más complejos.

Cabe señalar, de inicio, que se manifiesta un fenómeno de *reduccionismo didáctico* asociado con el TP (REYES-RODRIGUEZ *et al*., 2017), cuando este resultado se queda reducido en el aula al enunciado: *en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*. La literalidad se hace presente, por medio del supuesto, por parte del profesor, de que es suficiente que los estudiantes lo repitan, para propiciar su aprendizaje, sin entender que esta única interpretación incide en una reducción didáctica, que en todo caso habría que romper, precisamente al ir develando e incorporando sus múltiples interpretaciones, en diferentes ámbitos y contextos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Tanto el reduccionismo didáctico como la literalidad impiden a los estudiantes apreciar la estructura global de relaciones alrededor del TP, y por tanto la matemática se concibe, erróneamente, como un conjunto de hechos, resultados y conceptos aislados, parcializados, disgregados y sin relación entre sí, lo que incide en una desarticulación conceptual y falta de interacción entre los mismos. En esta línea de ideas, se persigue el objetivo mencionado por Morin (2005), de integrar en la complejidad las diferentes simplicidades, sin sus correspondientes aspectos reduccionistas y limitativos.

La linealidad interpretativa antes descrita, es un caso de interpretación unívoca, dejando de lado sin que se consideren y aprovechen otras interpretaciones, que, potencialmente, mostrarán por qué el TP es un saber (teorema) que ha pervivido durante poco más de veinticinco siglos como un conocimiento fundamental. Por supuesto, lo señalado conlleva una finalidad didáctica, que es la de incitar y comprometer a los estudiantes, para ampliar su entendimiento del TP, al ir identificando y explicitando, en varias asignaturas, las múltiples interpretaciones y aplicaciones contextuales de este.

Cabe aclarar que, cuando en este trabajo se identifican múltiples interpretaciones de un objeto matemático, se emplea el calificativo *equívoco*, que proviene de la hermenéutica, no en el sentido de algo erróneo, sino indicando multiplicidad, en contraste a lo *univoco*. Para ejemplificar lo anterior, pensemos en otra interpretación unívoca, referida al TP, como la relación existente entre las áreas de cuadrados construidos sobre lados de un triángulo rectángulo. Ahora bien, mediante la analogía, se puede extender esta interpretación, a una relación analógica entre figuras proporcionales, como semicírculos o triángulos equiláteros, entre otros; de forma tal que la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa. Lo anterior es una muestra de cómo se puede realizar un rompimiento con la interpretación única y restrictiva, referida al hecho de que el TP sólo se cumple para los cuadrados de los lados (BARRETO, 2009).

Propiciar un pensamiento analógico, caracterizado como la capacidad para identificar y construir analogías, en diversas direcciones, promueve la equivocidad de interpretaciones, lo que a su vez proviene de la tensión, siempre presente, entre univocidad y equivocidad. Hay que remarcar que dicha tensión, como ya lo mencionamos, no se supera del todo, sino que, por el contrario, la univocidad pervive en la equivocidad, sin las consecuencias negativas de la primera. En esta línea de ideas, el CI permite tener una visión integradora de los objetos de la matemática, lo que posteriormente se puede mostrar y utilizar en el escenario didáctico, con todo su potencial, para organizar el proceso de instrucción y propiciar aprendizajes más robustos, conforme se avanza en los diferentes niveles educativos, y bajo una perspectiva

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

articuladora.

Cuando se va conformando un CI, de manera más amplia y estructurada, se identifican redes conceptuales, en donde están involucradas relaciones entre objetos, interpretaciones, contextos y significados, todo lo cual se va ampliando progresivamente, al incorporar además en éstas redes, a conjeturas, métodos, teoremas, demostraciones, casos particulares, generalización, todo con la finalidad, de generar trayectorias didácticas, a partir de las cuales los estudiantes articulen y organicen sus conocimientos previos, con los nuevos conocimientos que se van desplegando en las asignaturas de matemáticas. A continuación, mostramos algunas aportaciones en tal dirección.

3 Algunas interpretaciones del TP en el contexto escolar actual

Para un desglose interpretativo orientado a la equivocidad, donde se involucren múltiples interpretaciones del TP, se requieren conocimientos previos, tales como los conceptos de triángulo, ángulo recto, cateto, hipotenusa, entre otros. Además, intervienen las ideas de cuadrado, suma, igualdad (equivalencia, equilibrio), comparación. Cuando de inicio no se explicitan tales conceptos, ideas y sus relaciones, resulta muy difícil que se puedan constituir ideas más complejas, lo cual, desde nuestra perspectiva, podría hacerse mediante la aplicación de herramientas hermenéuticas como la analogía.

En el ámbito educativo, frecuentemente cuando el profesor intenta justificar el resultado del TP, hace uso de la representación gráfica del triángulo rectángulo, con la finalidad de que el estudiante identifique la relación entre las áreas de los cuadrados, con el ejemplo más usual $3^2 + 4^2 = 5^2$ (REYES-RODRÍGUEZ *et al*., 2017). Después de conocer el caso particular, los estudiantes llegan a creer, erróneamente, que eso es suficiente para demostrar la validez del teorema, lo que restringe el entendimiento y comprensión profunda del TP.

En lo anterior, hay una problemática más amplía, que consiste en que los estudiantes no perciben la estructura global de las múltiples relaciones, significados e interpretaciones alrededor del TP, propiciando implicaciones diversas sobre sus creencias, que se convierten en restricciones de aprendizaje, al no distinguir adecuadamente, lo particular y lo general, lo que lleva, a su vez, a un reduccionismo con diversas implicaciones didácticas. En tal caso, el TP sólo se ejemplifica, en lo numérico, con algunos casos particulares de números enteros que lo satisfacen y no se explica que tales números, (n,m,k) se llaman ternas pitagóricas y su importancia en las matemáticas, dejando de lado múltiples relaciones que podrían contribuir a un entendimiento más general del TP.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Para ir superando algunas de las restricciones interpretativas del TP, se pueden elaborar preguntas pertinentes para establecer generalizaciones, tales como: ¿los números enteros que lo satisfacen son un número finito o infinito?, ¿si son infinitos, existirá un único método para calcular estos números? O, en otros ámbitos, se pueden hacer las preguntas, ¿cómo elaborar una demostración del TP? ¿Habrá alguna o algunas otras? O bien, ¿la relación entre áreas involucrada en el TP, sólo se cumple para cuadrados o también para otras figuras? Cuando se piensa en la relación algebraica $a^2 + b^2 = c^2$, válida para triángulos rectángulos, puede surgir la pregunta, ¿habrá una relación semejante que sea válida para otros triángulos?

Este tipo de preguntas difícilmente aparecen en el ámbito escolar, entre otros aspectos, debido a que no se fomentan como parte de un desarrollo intelectual, de carácter científico, entre los profesores y los estudiantes, el cual requiere de esta actitud conjetural e inquisitiva, que se puede considerar como indispensable en la formación de un individuo pensante. Las trayectorias didácticas que se pueden diseñar con base en el CI, involucran la puesta en práctica de un pensamiento analógico, el cual trae aparejado las formas de pensamiento inquisitivo y conjetural.

En tal caso, al ir respondiendo a las preguntas antes mencionadas, se van incorporando nuevas interpretaciones, formándose redes que, a su vez, van estructurando el CI-TP. De manera que para ir constituyendo al CI-TP, la participación de la analogía se orienta en diferentes direcciones, en tal caso, una amplitud conceptual se manifiesta por medio de una generalización y ampliación de las interpretaciones. La tensión particular-general, favorece la articulación de saberes, y promueve posibles rutas para recuperar saberes complejos a partir de saberes más simples, lo que es muestra de cómo se puede transitar entre diferentes interpretaciones.

Lo anteriormente señalado, propicia que se vayan explicitando redes conceptuales que resultan necesarias para desarrollar, en los estudiantes, un pensamiento matemático que los atrape y los lleve a descubrir nuevas rutas de conocimiento, recuperando saberes previos y construyendo nuevos. También se ha resaltado la relevancia del pensamiento analógico, en la construcción y estructuración de nuevos saberes, incluyendo la generación de nuevas interpretaciones de los objetos matemáticos.

4 Diferentes contextos e interpretaciones del TP

En lo que sigue se profundizará en cómo se estructura el CI-TP, a través de la identificación de diferentes contextos los cuales, de alguna forma, son un requisito necesario para un análisis hermenéutico, de donde habrán de desprenderse múltiples interpretaciones, que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

robustecen la estructura de relaciones involucradas en un CI. Es importante señalar que un CI marca pautas generales para el diseño de trayectorias didácticas, donde se indican, específicamente, los objetos matemáticos y las relaciones que se deben considerar entre ellos.

4.1 Contexto numérico

Con la finalidad de mostrar la relevancia del contexto numérico, como es bien sabido, el TP, se expresa como, $a^2 + b^2 = c^2$, siendo a y b, los catetos y c la hipotenusa. En principio, esta relación es válida en el ámbito de los números reales, interpretándose a, b y c, como longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y la ecuación pitagórica como una relación entre los cuadrados de números reales.

Ahora bien, no siempre el ámbito más general es el más adecuado para la estructuración de un CI, ocurre que, en ocasiones, partiendo de una determinada restricción, se pueden plantear preguntas relevantes que ayuden a identificar nuevas interpretaciones. Cuando el TP se restringe a considerar números enteros positivos, nos adentramos al ámbito de las ternas pitagóricas; de donde se desprenden algunas preguntas detonantes de posibles relaciones e interpretaciones: ¿Las ternas pitagóricas son infinitas? ¿Existen diferentes métodos para generar ternas pitagóricas? ¿Hay ternas en las cuales los elementos no sean consecutivos o cuyos elementos sean primos? Las posibles respuestas, potencialmente podrán ampliar y enriquecer la constitución del propio CI-TP.

A continuación, para intentar responder, en parte, a las preguntas anteriores, se muestra un método conocido que permite calcular ternas pitagóricas con dos elementos consecutivos, es decir enteros (n, m, k), que satisfacen la ecuación $n^2 + m^2 = k^2$. Como se sabe, la diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es siempre igual a un impar, esto es, $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, y cuando $2n+1$ es igual al cuadrado de otro número, k^2, se cumple la condición pitagórica $k^2 + n^2 = (n+1)^2$. De manera que en un caso particular, cuando n=12, k^2=2(12)+1= 25, o sea k=5, por lo tanto $5^2 + 12^2 = 13^2$. La terna pitagórica buscada es: (5,12,13). Otro caso particular se obtiene cuando k=7, la terna correspondiente será: (7, 24, 25). Con lo anterior se establece una conexión o articulación entre el TP y la diferencia de cuadrados.

En términos generales, para construir una terna pitagórica con este método, se elige como k, a cualquier número impar y a continuación la terna generada será (k, n, n+1), donde $n=(k^2-1)/2$. Este método permite generar ternas con dos elementos consecutivos, y como hay infinitos impares, se pueden obtener, a su vez, infinitas ternas pitagóricas. Como se puede ver, se mostraron dos casos particulares y, a partir de ellos, fue posible generalizar el método. Es

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

importante destacar la relevancia de la tensión entre los opuestos particular-general como generadora de conexiones o articulaciones.

Para tratar de responder a otra de las preguntas: ¿en una terna pitagórica siempre aparecen números consecutivos? La respuesta es no. Lo que llevaría a encontrar otras relaciones para obtener un método *más general*, que genere ternas pitagóricas, sin elementos consecutivos como en el caso particular: (8, 15, 17). La búsqueda de un método para generar cualquier terna pitagórica, involucra dividir entre c^2, cada elemento de la ecuación pitagórica para obtener:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Lo que significa, a su vez, que la suma de los cuadrados de estas razones entre los lados del triángulo rectángulo es siempre igual a un valor constante unitario, sin importar las longitudes de los lados a, b, c, con valores enteros, tales que, $c > a$ y $c > b$.

Nuevamente, en el ámbito de las ternas pitagóricas, una simple operación algebraica permite una *nueva interpretación*, en la que, ahora, la búsqueda de tales ternas, se transforma en identificar puntos en la circunferencia unitaria, con coordenadas racionales, para lo cual se requiere, necesariamente, *relacionar y articular dos contextos*, el numérico y el de la geometría analítica, lo que va a permitir generar nuevas relaciones para robustecer el CI, y en particular, otro método para calcular ternas pitagóricas.

Dicho método consiste en lo siguiente: se considera una recta, con pendiente racional, que pasa por cualquier punto sobre la circunferencia que tenga coordenadas racionales. Dicha recta interseca a la circunferencia unitaria, en otro punto que también tiene coordenadas racionales (a/c, b/c), de donde la terna buscada es (a, b, c) (FALLAS, 2009). Por ejemplo, si consideramos la recta de pendiente 3/8, que pasa por el punto (0,1), entonces el otro punto de intersección de la recta con la circunferencia será (-48/73, 55/73) y, por tanto, la terna pitagórica es (48, 55, 73).

En forma tal que la analogía hace su intervención, para hacer convivir, dialécticamente, a la univocidad y la equivocidad de interpretaciones, dependiendo de algunos aspectos en los que la atención se centre en los métodos de resolución, e identificando otras características que permitan aprovechar la tensión entre opuestos. En el primer caso, en la diferencia de cuadrados de dos elementos consecutivos y en el segundo, la atención se centra en la interpretación geométrica de la ecuación de la circunferencia de radio uno en el plano, y la búsqueda de puntos con coordenadas racionales sobre ésta. La dialéctica nos lleva a la consideración de que siempre se pueden interrelacionar casos particulares (univocidad), y los casos generales (equivocidad), según sea el ámbito de tratamiento, lo que, a su vez, se desprende de un pensamiento analógico.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Cabe resaltar que la analogía es un elemento integrador del funcionamiento cognitivo humano (MORIN, 2008). En este sentido, la analogía interviene en el proceso de construcción de generalizaciones, como las antes mencionadas. Así, el pensamiento analógico es preponderante en la *reconstrucción orientada del conocimiento* (BIEHLER, 2005; FAST, 1999), actividad que requiere ser apoyada por el propio docente.

Las relaciones, hasta ahora obtenidas, del CI-TP se pueden ampliar al considerar algunos otros casos particulares; por ejemplo, el del triángulo rectángulo, con catetos unitarios que, incluso, llamó la atención de la escuela pitagórica, y de cuya consideración se desprende la existencia de los números irracionales, los cuales contravienen uno de los postulados básicos de la misma escuela: todo es número, referido sólo a números racionales.

En tal caso, si se quiere calcular algunos números irracionales a través de valores enteros positivos, cuando en un triángulo rectángulo los catetos son, a=1 y b=1, entonces, el valor de la hipotenusa, c, calculada mediante el TP, dados los valores de entrada (1,1), da como valor de salida $\sqrt{2}$. Tal consideración proviene de un enfoque en el que se considera a la representación algebraica del TP, como un *operador*, al cual de entrada se le proporcionan dos valores enteros, y de salida el operador arroja como resultado un irracional algebraico, esto es, en el caso mencionado: $1^2 + 1^2 = c^2$, de donde, $c^2 = 2$.

El valor de c no se puede calcular en los racionales, lo que obliga a la consideración de la existencia de otro tipo de números, en este caso, los irracionales, siendo $c = \sqrt{2}$.

Otro procedimiento, para obtener geométricamente las raíces de cualquier entero, consiste en aplicar el TP de forma iterativa. Si se considera inicialmente al triángulo de catetos unitarios, se obtiene como resultado un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El segundo paso de la iteración consiste en considerar como entradas al racional 1 y al irracional $\sqrt{2}$, o sea $(1, \sqrt{2})$, de modo que el valor de salida sería el segmento de longitud $\sqrt{3}$. Es importante mencionar que la representación gráfica de este procedimiento permite conectar al TP con la espiral de Teodoro, la cual se relaciona, a su vez, con la espiral de Arquímedes. Estas consideraciones pueden llevar, incluso, a relacionar el TP con la aritmética de curvas elípticas (ZALDIVAR, 2006).

En lo mencionado anteriormente, intervienen significados asociados con los contextos numérico y geométrico, de los cuales se identifica un método de cálculo según sea las consideraciones de inicio. De manera que se pueden derivar dos nuevas interpretaciones complementarias del TP, la de ser un operador y a su vez un mecanismo iterativo generador de raíces de enteros positivos. Es de resaltar cómo se van ampliando las interpretaciones del TP, como núcleo referencial, mismas que se incorporan en la estructuración del CI-TP, integrando

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

redes conceptuales y relacionales que son la base para sustentar el entendimiento matemático, a partir de trayectorias didácticas.

La reflexión llevada a cabo en los párrafos previos ha permitido identificar, a partir de la analogía y las diferentes tensiones entre opuestos, relaciones que parten del TP y que conectan o articulan a este con otros objetos matemáticos. Estas relaciones, bien aprovechadas, indican posibles trayectorias de instrucción, mediante las cuales se puede promover lo que hemos denominado reconstrucción orientada del conocimiento, la cual tiene incidencias relevantes en el aprendizaje de las matemáticas, como dispositivo didáctico de apoyo en una perspectiva instruccional basada en el descubrimiento, previa elaboración de preguntas pertinentes sugeridas por el propio CI-TP (AUSUBEL, 1977, 2000).

4.2 Contexto geométrico

Partiendo de una perspectiva histórica, el contexto geométrico se puede analizar, haciendo una contrastación entre la geometría griega clásica, representada por Pitágoras a través de su teorema, $a^2 + b^2 = c^2$, donde cada término, como ya se ha mencionado, puede interpretarse como un área, y la ecuación en su conjunto representa una equivalencia entre áreas. Ahora bien, por contraste, desde un punto de vista de la geometría analítica, representada por Descartes, se pueden obtener nuevas interpretaciones, cuando el teorema se transmuta, mediante una analogía, a una ecuación de la forma, $x^2 + y^2 = r^2$.

En cuyo caso, el sustento de tal analogía, es el siguiente: los puntos de coordenadas (x, y), en el plano, equidistantes del origen, se representan por medio de la ecuación anterior que es una circunferencia, de radio r y centro en el origen. Mientras que, para Pitágoras, hay una referencia geométrica a ciertas áreas de cuadrados; desde la perspectiva de Descartes, a través de una ecuación análoga, hace referencia a una curva, que es la circunferencia. La tensión de las visiones pitagórica-cartesiana y sintético-analítico, después de más de veinte siglos, se confrontan como opuestos para dar un salto en la construcción del conocimiento matemático, y pasar de la geometría clásica (euclidiana) a la geometría analítica (cartesiana), cuya constitución, en gran medida, está sustentada en una complementación dialógica/analógica/epistemológica entre Pitágoras-Euclides-Descartes.

Todo lo anteriormente descrito, en gran parte se logra debido a la ruptura epistemológica, que Descartes desarrolla al considerar a las potencias n-ésimas como longitudes, a diferencia de los griegos, quienes consideraban sólo a los términos lineales como longitudes, a los cuadráticos como áreas y a los cúbicos como volúmenes, pero no tenían una

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

interpretación análoga para potencias mayores o iguales a cuatro. Esto es lo que le dio la posibilidad a Descartes, de representar curvas en el plano, mediante ecuaciones de dos variables. Cabe señalar que fue posible, precisamente, por tener el antecedente epistémico del TP, que es uno de los elementos fundamentales, junto con *El Discurso del Método*, que le permitió la construcción de su geometría analítica. Siendo el sustento de esta, la distancia entre dos puntos, que se desprende de la ecuación: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$.

Se observa, una vez más, la participación de una analogía, referida al TP, en la que la relación de la suma de dos cuadrados es igual al tercer cuadrado, manteniéndose la estructura de la ecuación anterior. También se puede ver que otra analogía transita de la distancia entre dos puntos, a la ecuación de la circunferencia, con centro en (h, k): $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Cada una de las analogías mencionadas, conlleva sus respectivas interpretaciones y, por ello, se requiere transitar de una u otra como antecedente, para poder identificar, en cierto modo, otra analogía más potente. De modo tal que en este proceso se encuentra interactuando la tensión entre opuestos particular-general y univocidad-equivocidad, siempre enriqueciendo al conocimiento. Las analogías dan lugar a generalizaciones, en este caso específico, los objetos que intervienen son un conjunto infinito de puntos en el plano con coordenadas, (x, y), que se relacionan con un punto fijo (visión sintética), a través de la condición de mantener una distancia constante r, relación que analíticamente se expresa por la ecuación, $x^2 + y^2 = r^2$ (visión analítica). Nuevamente, se aprecia cómo el considerar la tensión entre opuestos se traduce en la identificación de articulaciones entre objetos matemáticos.

Dicha generalización involucra un cambio de literales, al pasar de a, b, c, en la ecuación pitagórica, a las literales x, y r, en la ecuación de la circunferencia, lo que lleva a un cambio en la interpretación, ya que en el primer caso, las literales, a, b, c, representan números, mientras que, en el segundo caso, las literales, x , y representan una posición de un punto en el plano y, por su parte, la literal r, una medida. En cuyo caso se muestra una relación de la variabilidad, que existe según el contexto de referencia; lo cual debiera ser explicitado en la didáctica.

4.3 Contexto trigonométrico

Como se mencionó anteriormente, una operación algebraica, aparentemente simple y sin relevancia, puede llevar a identificar nuevos métodos o contextos. Al dividir nuevamente por c^2, la ecuación pitagórica, básica, $a^2+b^2=c^2$, queda expresada como,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Ahora bien, instalados en el contexto trigonométrico, podemos identificar a los objetos matemáticos que son cocientes de las longitudes de cada uno de los catetos, con respecto a la longitud de la hipotenusa, esto es, a/c y b/c, lo que nos lleva a reflexionar acerca de relaciones entre ellos. Resulta relevante mencionar que, en algún momento histórico, a estos números se les denominó razones trigonométricas, seno y coseno, de uno de los ángulos agudos, del mismo triángulo.

Cabe señalar que la analogía, entre la ecuación pitagórica y la relación trigonométrica fundamental, $sen^2\, x + cos^2\, x = 1$, es consecuencia de la propia operación algebraica, donde ambos cocientes, son estrictamente menores que uno, porque en un triángulo rectángulo, la hipotenusa, es siempre mayor que la longitud de los catetos. En el tránsito de los cocientes de la relación pitagórica a las razones trigonométricas está actuando las tensiones: discreto-continuo y racional-irracional, como generadoras de saberes. Dentro de la multiplicidad de representaciones, de misma relación fundamental, se desprenden:

$$tan^2\, x + 1 = sec^2\, x$$
$$cot^2\, x + 1 = csc^2\, x$$

El considerar esas relaciones equivalentes aporta mayor versatilidad para establecer otras relaciones trigonométricas más complejas, con una mayor diversidad de aplicaciones.

Reflexionar acerca de las ideas germinales básicas, de las que provienen este tipo de resultados, puede contribuir a superar algunas ideas erróneas en los estudiantes, y de esa forma, mejorar su entendimiento. Se muestran dos nuevas denominaciones referidas a uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo, que son: sen α y cos α. Lo anterior conlleva un salto epistémico relevante, al hacer intervenir en las relaciones, explícitamente, un ángulo agudo del triángulo, lo cual no ocurría en el teorema *original*. Es importante aclarar que el uso de una letra griega para referirse a un ángulo, implícitamente considera que tal ángulo se expresa en grados sexagesimales, mientras que, el símbolo x para referirse a un ángulo, indica el uso de radianes como unidad de medida, asociando a x con un número real.

Como es bien sabido, de la relación fundamental trigonométrica pitagórica, se desprenden una gran cantidad de resultados de la trigonometría, como son las leyes de cosenos y senos, además de otras. Uno de estos resultados relevantes, está en la transformación de coordenadas cartesianas (x, y) a polares, (r, θ); $x=r\,cos\,\theta$; $y=r\,sen\,\theta$; y viceversa, la cual es posible realizar por la presencia de la relación trigonométrica fundamental pitagórica.

Otras preguntas que pueden ayudar a expandir la red de relaciones del CI-TP se refieren a la existencia de una relación numérica análoga al TP, pero ahora generalizada para cualquier triángulo. Históricamente, esto llevó a algunos matemáticos a identificar la llamada ley de los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

cosenos, la cual establece que para cualquier triángulo cuyas longitudes de sus lados, son a, b, c, se cumple la relación numérica, $c^2 = a^2 + b^2 -2ab \cos \beta$, donde β, es el ángulo opuesto al lado c. Y como se sabe, si β=90°, se recupera el TP. Bajo la consideración de que ahora se requiere, para calcular un lado, no sólo conocer los otros dos lados del triángulo, sino además el ángulo formado por los mismos.

Con base a las consideraciones anteriores, se destaca la relevancia de la generalización, pudiéndose mostrar al TP original, como un caso particular de esta ley. Es decir, se resalta la convivencia entre dos opuestos, particular-general. De modo tal que, potencialmente, siempre es posible identificar generalizaciones en diversas direcciones, las cuales dependen del contexto de referencia, y de los elementos donde se enfoque la atención y se construya la analogía.

4.4 Contexto infinitesimal

Posicionándonos en el contexto infinitesimal, un constructo fundamental del cálculo leibniziano, es el del triángulo característico, que fue concebido por Leibniz, como una herramienta conceptual fundamental, que podía permitirle avanzar en el problema de calcular la longitud de una curva. En este caso, Leibniz usó una potente analogía, de la cual se desprende una nueva interpretación del TP, en la que conviven los opuestos finito-infinitesimal, recordando que tal convivencia es un medio para generar nuevo conocimiento y es, además, una muestra de cómo se puede trascender a la univocidad, para dar paso a la equivocidad o multiplicidad de interpretaciones. Consideramos que el tránsito entre dos opuestos, finito-infinitesimal, fue un tema considerado desde los precalculistas, y toma un cierto nivel de concreción con Leibniz, en el triángulo característico, que Pascal ya lo había vislumbrado, pero no desarrolló tan ampliamente como Leibniz.

Cabe señalar que este *triángulo* no lo es estrictamente, porque la *hipotenusa* es una sección de la curva, pero dado que se consideran longitudes infinitesimales, esta sección se conceptualizó como un segmento de recta y, en tal caso, se generó una nueva interpretación del TP, donde los objetos involucrados en el triángulo característico, son las diferenciales dx y dy, correspondientes a los catetos y la diferencial de longitud, dl, que corresponde a la hipotenusa y es la que Leibniz, precisamente, asocia a la longitud infinitesimal de la sección curva. De forma tal que los lados del triángulo característico están relacionados mediante la siguiente expresión de enorme potencia conceptual, en lo infinitesimal, $dx^2 + dy^2 = dl^2$ (Figura 1).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

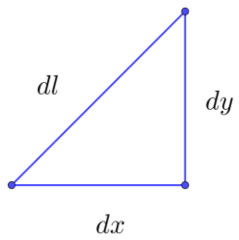

Figura 1 - Triángulo infinitesimal
Fuente: elaboración propia

Se puede hacer notar que la analogía considerada por Leibniz va de una relación para triángulos rectángulos en lo finito, a una relación válida para el triángulo característico. Lo anterior, sin tener una justificación rigurosa, llevó a Leibniz a realizar grandes contribuciones al Cálculo, que otros matemáticos contemporáneos no pudieron realizar, porque no identificaron la potencia de la analogía aprovechada ampliamente en el cálculo leibniziano. Con base en las anteriores consideraciones, Leibniz obtiene el siguiente resultado,

$$\int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = L.$$

Este hecho, que aparentemente es trivial desde el punto de vista actual, en realidad representó un salto epistemológico muy importante, que en parte proviene de una confrontación y complementación dialógica/analógica/epistemológica, en este caso entre Pitágoras y Leibniz. De esa manera, Leibniz logra resolver el problema general del cálculo de la longitud de una curva. Es conveniente remarcar el *salto* analógico/epistemológico que hizo Leibniz, al transmutar su resultado previo en, $\int dy = y$, para después intuir que ocurre algo análogo en el caso de la longitud de una curva, esto es, $\int dl = L$.

Resulta pertinente señalar que esta nueva interpretación en relación con la longitud de una curva, que proviene del triángulo característico, lleva también a una multiplicidad de resultados, obtenidos por el mismo Leibniz, en el cálculo integral. Esta última interpretación del TP en lo infinitesimal, resulta relevante en la constitución del CI-TP, ya que permite establecer *una red de articulación* entre las matemáticas básicas y las matemáticas avanzadas, como es el caso de la transición entre la aritmética y el cálculo; lo cual es un elemento de apoyo para la reconstrucción orientada del conocimiento. Lo anteriormente mencionado, puede ser rescatado para la didáctica de las matemáticas, en la dirección de promover entre los estudiantes que el conocimiento matemático, requiere en ocasiones, de un pensamiento intuitivo, inductivo e informal, o no lógicamente riguroso, que puede llevar a obtener resultados tan sorprendentes como los logrados por el mismo Leibniz.

Después de haber revisado cómo los contextos permiten mostrar cómo se despliegan del

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

núcleo del CI-TP, las múltiples interpretaciones ya referidas. Consideramos adecuado expresar gráficamente las relaciones emergentes que detectamos entre los objetos matemáticos involucrados (Figura 2).

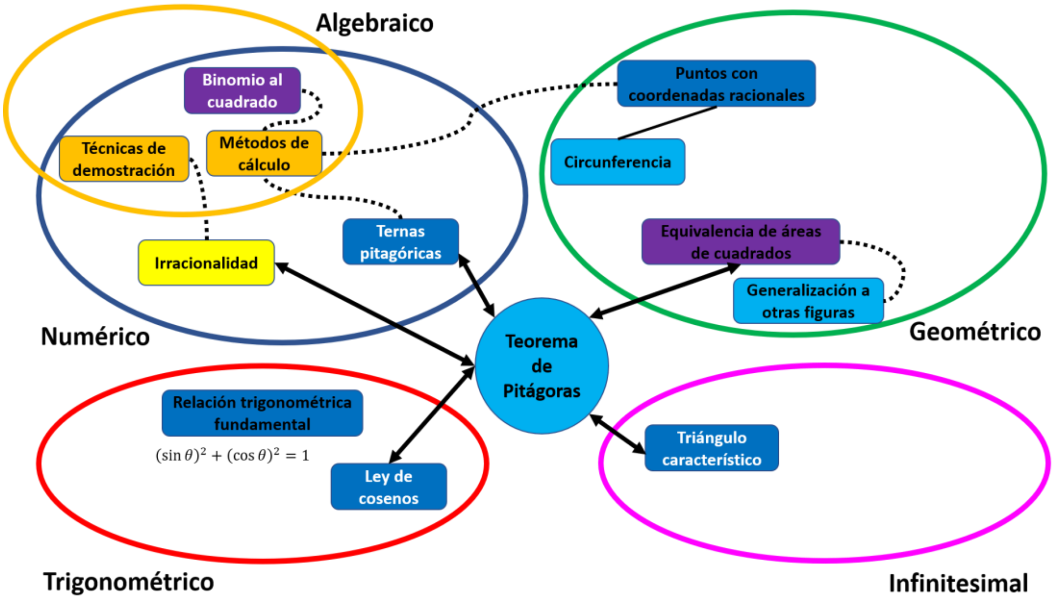

Figura 2 - Representación gráfica del CI-TP
Fuente: elaboración propia

El diagrama anterior permite identificar cómo se puede ir transitando entre las diversas interpretaciones de los objetos involucrados en el CI-TP pero, además, es un dispositivo didáctico que permite ir evidenciando cómo orientar la reconstrucción del conocimiento; es decir, permite al docente organizar el escenario didáctico para favorecer una cierta forma de estructurar los saberes, que parte de lo *concreto* y avanza hacia niveles progresivos de abstracción y generalización. Aquí podemos apreciar, nuevamente, el efecto generador de conocimiento a partir de una nueva tensión, no abordada hasta el momento, entre los opuestos concreto-abstracto.

5 Consideraciones finales

Un campo de interpretación se va desplegando y ampliando entre mayor sea la trascendencia potencial del núcleo para generar nuevos saberes y para dar cuenta de la complejidad (FONT; BREDA; SECKEL, 2017) inherente de los objetos matemáticos involucrados. En este artículo, hemos adoptado al TP, como núcleo referencial de un CI, para evidenciar su proceso generativo, a través de herramientas hermenéuticas y epistemológicas. Durante la constitución del CI-TP mostramos la existencia y convivencia de diversos opuestos, tales como: particular-general, y unívoco-equívoco, sintético-analítico, concreto-abstracto y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

finito-infinitesimal, entre muchos otros; para identificar en el CI-TP, relaciones y articulaciones entre objetos matemáticos, además de las interpretaciones que se desprenden de estos.

Decidimos analizar el CI-TP, porque el TP es un objeto matemático de enorme relevancia, en casi cualquier rama de la matemática y, además, por el gran número de contextos en donde es útil, o bien ha tenido un amplio desarrollo, lo que propicia las interpretaciones y significados asociados, y posibilita además identificar redes de relaciones entre ellos. Por otra parte, se destacó la relevancia de considerar algunos contextos durante la constitución del CI-TP, ya que la contextualización, aporta evidencias históricas y culturales, que se han ido forjando durante siglos, acerca de los procesos de construcción y constitución de los saberes.

El CI-TP permite explicitar relaciones que, usualmente, se encuentran implícitas en las presentaciones didácticas de los objetos matemáticos, que se realizan en las aulas. Con lo anterior, se busca estructurar en una complejidad las diferentes aproximaciones simplistas que perviven en las aulas, eliminando los reduccionismos que se derivan de estas. Además, mediante el análisis de su constitución, se fomenta el desarrollo del pensamiento analógico, ya que la analogía es una de las herramientas hermenéuticas que permite nuevas interpretaciones las cuales robustecen el conocimiento desplegado en la red de articulaciones. Aunque la analogía es parte fundamental del funcionamiento cognitivo, no se aprovecha en todo su potencial para la formación de los estudiantes, por lo cual se requiere explicitar, cada que sea posible, algunas de las ventajas del pensamiento analógico, a través de una reflexión consciente, crítica y participativa entre estudiantes y profesores.

Un aspecto focal de la discusión aquí realizada fue mostrar la existencia de analogías con diversos grados de complejidad, así como dar cuenta del proceso de su construcción a partir de ciertos objetos específicos; lo que permite potenciar el pensamiento analógico en los estudiantes. Para que las conexiones y articulaciones conceptuales entre los elementos constitutivos de un CI sean duraderas, se requiere diseñar trayectorias didácticas que permitan a los estudiantes descubrir articulaciones y relaciones por sí mismos, a través de las orientaciones que les aporta un profesor, buscando que las incorporen a su estructura cognitiva, las usen y pongan en práctica para evitar su olvido u obsolescencia.

Identificamos la importancia de remarcar, explícitamente, las articulaciones históricas en dos estadios, entre Pitágoras-Euclides-Descartes y entre Pitágoras-Leibniz, lo cual ha sido posible, al establecer una complementación dialógica/analógica/epistemológica entre posturas contrastantes y, a su vez, complementarias, de las que siempre se desprenden grandes aportaciones al conocimiento y, por tanto, es posible integrar estas reflexiones en la didáctica; por ejemplo, en el aprendizaje o en el estudio de la Geometría Analítica y del Cálculo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

Sin el diálogo mencionado, no hubieran sido posibles los aportes de Descartes a la Geometría Analítica y de Leibniz al Cálculo. En ambos casos, como lo hemos remarcado, hacer uso de analogías pertinentes en referencia al TP, es un medio para construir nuevos saberes. Con base en los argumentos previos, consideramos que el proceso de instrucción matemática, debería de incorporar y mostrar la relevancia del pensamiento analógico y su relación con el pensamiento complejo, dada la complejidad inherente de los objetos matemáticos y de sus diversas relaciones, todo lo cual permite estructurar el pensamiento matemático de los estudiantes a través de una *reconstrucción orientada del conocimiento* en la que se incluyen múltiples interpretaciones, de las cuales da cuenta el CI-TP, y que rompen con la didáctica de un pensamiento lineal, que considera a los objetos matemáticos como a-históricos y descontextualizados.

Referencias

AUSUBEL, D. P. The facilitation of meaningful verbal learning in the classroom. **Educational Psychologist**, Philadelphia, v. 12, n. 2, p. 162-178, 1977. Disponible en: https://doi.org/10.1080/00461527709529171. Acceso: 20 feb. 2021.

AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge**: A cognitive view. Dordrecht: Springer, 2000. 212 p.

BARRETO, J. C. Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del Teorema de Pitágoras. **UNIÓN**, Andújar, v. 17, p. 31-51, 2009. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/14983/1/Barreto2009Cuadratura.pdf. Acceso: 25 jul. 2021.

BEUCHOT, M. **Dialéctica analógica**. México: Editorial Publicaciones Académicas CAPUB, 2019.

BEUCHOT, M. **La hermenéutica como herramienta en la investigación social**. San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2007.

BIEHLER, R. Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. *En:* KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. (ed.). **Meaning in mathematics education**. Cham: Springer, 2005. p. 61-81

BRONOWSKI, J. **The ascent of man**. 4. ed. London: BBC Books, 2011. 332 p.
FALLAS, J. J. Ternas pitagóricas: métodos para generarlas y algunas curiosidades. **Revista Digital Matemática, Educación e Internet**, Cartago, v. 9, n. 2, p. 1-21, 2009. Disponible en: https://doi.org/10.18845/rdmei.v9i2.2035. Acceso: 15 abr. 2022.

FAST, G. R. Analogies and reconstruction of probability knowledge. **School, Science and Mathematics**, Columbia, v. 99, n. 5, p. 230-240, 1999. Disponible en: https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17481.x. Acceso: 20 may. 2022.

FONT, V.; SECKEL, M. J.; BREDA; A. Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. *En*: **Actas del Cuarto Encuentro Internacional de Educación Matemática,** Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2018. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/14312/1/Font2018Los.pdf. Acceso: 08 ago. 2021.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a18

FONT, V.; BREDA, A.; SECKEL, M. J. Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 10, n. 2, p. 1-23, 2017. Disponible en: https://doi.org/10.3895/rbect.v11n2.8455. Acceso: 15 feb. 2022.

FONT, V.; PINO-FAN, L.; BREDA, A. Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. **Revista Paradigma**, Maracay, v. 41, n. 1, p. 107-129, 2020. Disponible en: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p107-129.id846. Acceso: 18 mar. 2022.

GADAMER, H. G. **Verdad y método I**. 8. ed. Salamanca: Ediciones Sígueme, 1999. 697 p.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. **Pitágoras**: El filósofo del número. México: Nivola, 2009.

HIEBERT, J. *et al*. **Making sense**: Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997. 184 p.

MONTERO, J.; BUSTINCE, H.; FRANCO, C.; RODRIGUEZ, J. T.; GOMEZ, D.; PAGOLA, M.; FERNANDEZ, J.; BARRENECHEA, E. Paired structures in knowledge representation. **Knowledge-Based Systems**, Madrid, v. 100, p. 50-58, 2016. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.02.003. Acceso: 23 mar. 2022.

MORIN, E. **Introducción al pensamiento complejo**. Barcelona: Gedisa, 2005. 164 p.

MORIN, E. **El método. La humanidad de la humanidad**. Madrid: Cátedra, 2008.

ORTIZ MILLÁN, G. Hermenéutica analógica, verdad y método. **Diánoia**, Ciudad de México, v. 60, n. 74, p. 155-163, 2015. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/dianoia/v60n74/v60n74a8.pdf. Acceso: 15 ene. 2022.

REYES-RODRÍGUEZ, A. V.; RONDERO-GUERRERO, C.; ACOSTA-HERNÁNDEZ, J. A.; CAMPOS-NAVA, M.; TORRES-RODRÍGUEZ, A. A. Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del teorema de Pitágoras. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 968-983, 2017. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a06. Acceso: 18 ago. 2021.

ZALDIVAR, F. Del teorema de Pitágoras a la aritmética de las curvas elípticas. **Miscelánea Matemática**, Ciudad de México, v. 42, p. 1-17, 2006. Disponible en: https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/42. Acceso: 20 jun. 2021.

Submetido em 23 de Março de 2022.
Aprovado em 22 de Julho de 2022.