
ARTIGO

Integração das Definições e Exploração das Representações Semióticas das Cônicas com Recursos Computacionais

Integration of Definitions and Exploration of Semiotic Representations of Conics Using Computational Resources

José Edeson de Melo **Siqueira** *

 ORCID iD 0000-0002-2002-9527

Franck **Bellemain** **

 ORCID iD 0000-0001-5358-2057

Walter Franklin Marques **Correia** ***

 ORCID iD 0000-0002-6491-9783

João Marcelo Xavier Natário **Teixeira** ****

 ORCID iD 0000-0001-7180-512X

Resumo

Este artigo tem como objetivo investigar como a articulação entre diferentes registros de representação semiótica das cônicas – sobretudo o algébrico, o gráfico e o figural espacial – contribui para superar a fragmentação tradicional presente no ensino de Geometria Analítica. Para tanto, apoia-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e apresenta o ambiente computacional Conics 3D, desenvolvido especificamente para possibilitar a exploração simultânea e dinâmica desses registros. A análise demonstra que, ao permitir ao estudante manipular, de forma interativa, as representações algébricas, gráficas e figurais espaciais, o *software* favorece não apenas uma compreensão mais unificada das cônicas, mas, também, o desenvolvimento de habilidades de raciocínio e visualização. Conclui-se que a adoção desse tipo de ferramenta computacional intensifica o diálogo entre teoria e prática, expandindo as possibilidades para um ensino de matemática mais significativo, tanto na educação básica quanto na formação de professores.

* Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor Adjunto do Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: edeson.siqueira@ufpe.br.

** Doutor em Didactique des Mathématiques pela Université Joseph Fourier (UJF). Professor Associado do Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: franck.bellemain@ufpe.br.

*** Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor Titular do Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. E-mail: walter.franklin@ufpe.br.

**** Doutor em Ciências da Computação pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor Adjunto do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. E-mail: joao.teixe@ufpe.br.

Palavras-chave: Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Cônicas. Geometria. Representação figural espacial. Registro semiótico dinâmico.

Abstract

This article aims to investigate how the articulation of different semiotic representation registers of conic sections—especially the algebraic, graphical, and spatial-figural ones—helps overcome the traditional fragmentation found in the teaching of Analytic Geometry. To this end, it draws on the Theory of Semiotic Representation Registers and introduces the Conics 3D computational environment, specifically developed to enable the simultaneous and dynamic exploration of these registers. The analysis shows that, by allowing students to interactively manipulate algebraic, graphical, and spatial-figural representations, the software not only promotes a more unified understanding of conic sections but also fosters the development of reasoning and visualization skills. It is concluded that the adoption of such a computational tool strengthens the dialogue between theory and practice, expanding the possibilities for more meaningful mathematics education, both in basic education and in teacher training.

Keywords: Theory of Registers of Semiotic Representations. Conics. Geometry. Spatial Figural Representation. Dynamic Semiotic Register.

1 Introdução

Na Educação Básica, as curvas cônicas encontram-se no campo da geometria, comumente a geometria analítica no plano, concentrada no 3º ano do Ensino Médio. Segundo Santos e Lima (2023), um aspecto muito criticado, mas que persiste na abordagem da geometria analítica nas coleções de livros didáticos, é a fragmentação dos conceitos no estudo das cônicas, prejudicando-se assim uma abordagem mais integrada entre suas várias representações. Outro aspecto destacado no mesmo documento diz respeito à exploração das seções planas de uma superfície cônica, bem como das representações da hipérbole e da parábola obtidas em um cone de duas folhas.

Embora o espaço reservado ao ensino das cônicas na Educação Básica seja bastante reduzido, e ainda agravado pela abordagem fragmentada, continua presente em vários cursos superiores, sendo um tema relevante em disciplinas como Geometria Analítica, Cálculo e Geometria Diferencial e Geometria Gráfica (bidimensional e tridimensional).

Com relação a esse fenômeno, Trgalová (1995) aponta a existência de uma diferença significativa quanto ao lugar desta noção com relação ao saber científico e ao saber a ensinar, acrescentando que esta diferença se deve principalmente à grande dificuldade em ensinar as cônicas, que por sua vez estaria ancorada num contexto geométrico, no próprio objeto e na formação de professores.

Embora do ponto de vista do estudo do objeto Matemático as cônicas possam ser exploradas a partir de várias definições e representações, seu ensino ocorre de maneira fragmentada e superficial, sendo muitas vezes priorizada uma abordagem analítica com enfoque

algébrico. O mesmo se verifica nos materiais didáticos e nas salas de aulas do ensino superior.

Em síntese, entendemos que inexistem razões matemáticas e didáticas que recomendem privilegiar uma abordagem a outra, mas estudá-las numa proposta integrativa da visão sintética e analítica, se opondo à abordagem dominante caracterizada pela fragmentação dos conceitos e representações. Em nosso estudo, constatamos a existência de dificuldades decorrentes da abordagem fragmentada no ensino das curvas cônicas — um problema que parece recorrente não apenas no Brasil (Brasil, 2006; Neto, 2008; Bordallo, 2011) e na França (Trgalová, 1995), mas também, ao menos, na Espanha (Contreras; Contreras; García, 2002; Gascón, 2001) e no México (Velázquez *et al.*, 2007), como apontam os estudos.

À vista disso, as cônicas são um tema matemático abundante na sua constituição, no seu desenvolvimento e especialmente em seus problemas, sendo objeto de investigação de vários estudiosos ao longo dos séculos, perpassando pelas geometrias sintética (dos gregos), analítica até a projetiva.

Ao analisarmos o desenvolvimento do saber Cônicas, constatamos tentativas de unificação das suas definições, com a identificação de diferentes aspectos e ferramentas matemáticas necessárias à demonstração dos resultados a elas relacionados. Nesse processo, evidenciou-se que as cônicas foram caracterizadas segundo três tipos de abordagens: uma sintética, com curvas obtidas pela seção de um cone circular de revolução com um plano; uma analítica, caracterizada por equações (geral e reduzidas), pela forma matricial e pela representação gráfica em um sistema de coordenadas cartesianas; e outra projetiva, onde as cônicas podem ser definidas como projeções de circunferências.

Em nosso ponto de vista, defendemos que a unificação favorece o ensino desde que considere a articulação das representações algébricas, gráfica e figural espacial a partir dos seus elementos comuns, como por exemplo os focos e as diretrizes.

Nesse sentido, compreendemos que a representação figural espacial do teorema de Dandelin-Quetelet (geometria sintética) poderá fornecer os focos como sendo os pontos de tangência do plano que secciona o cone com as esferas nele contidas (no caso da parábola será um foco, uma esfera e um ponto de tangência) e as diretrizes como as retas formadas pelas interseções do plano de seção com outros dois planos paralelos à base do cone (na parábola temos apenas uma diretriz); do mesmo modo é possível relacionar estes elementos às equações quadráticas, bem como explicitá-los na representação gráfica de cada cônica (geometria analítica).

Por sua vez, articular as representações de maneira dinâmica requer que se leve em questão as variáveis visuais (do gráfico) e visuais figurais (da figura espacial em perspectiva)

associadas às unidades simbólicas correspondentes das expressões algébricas, o que poderá ocorrer a partir da utilização de recursos computacionais.

Nesse sentido, a atividade requerida pela matemática difere daquelas requeridas em outras áreas do conhecimento, e Duval (2005) apresenta três características que evidenciam tal diferença: a importância das representações semióticas, a variedade de representações semióticas e a mobilização simultânea de representações em, no mínimo, dois diferentes registros de representação. Ressalta ainda que a representação não deve ser confundida com o objeto representado; e a articulação concomitante de ao menos duas representações em dois diferentes registros de representação deve considerar os dois sentidos, por exemplo, das equações para o gráfico e do gráfico para as equações. As articulações implicam a necessidade de transformações tipo tratamento ou conversão, esta última, no caso das cônicas, precisa considerar as abordagens das geometrias sintética, analítica e projetiva, além das representações algébricas, gráfica cartesiana e figural espacial.

É importante salientar que o ato de *unir* os pontos obtidos por construções analíticas ou sintéticas em uma curva contínua envolve dificuldades conceituais e práticas, especialmente quando se privilegia unicamente a definição geométrica das cônicas. Conforme discutido por Bongiovanni (2001), o traçado de segmentos ou arcos adjacentes, ao longo de um conjunto de pontos finitos, nem sempre resulta em uma compreensão clara e rigorosa da continuidade e da topologia da curva. Quando se opta apenas pelo método de equações reduzidas, o enfoque analítico pode gerar uma visão fragmentada, dificultando que os estudantes compreendam a totalidade do traçado e a coerência global da curva.

Para responder a esses desafios, não podemos nos restringir unicamente ao campo matemático ou à sua história, mas se faz necessária uma abordagem cognitiva que favoreça a articulação dinâmica das várias representações das cônicas através de recurso computacional, de modo que o ensino de matemática venha contribuir para o desenvolvimento global das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos estudantes e professores.

Diante do exposto, buscaremos responder à seguinte questão: Qual abordagem cognitiva pode favorecer a articulação das várias representações das cônicas, de modo a contribuir com o desenvolvimento global das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização?

Para isso, estruturamos nosso estudo segundo o modelo da Engenharia Didático-Informática e suas quatro dimensões Santos (2020), de maneira que, pela compreensão das características específicas do objeto cônicas (dimensão epistemológica), considerando como os estudantes mobilizam suas representações (dimensão cognitiva) e da identificação das contribuições e dificuldades geradas no seu ensino (dimensão didática), pudéssemos obter um

conjunto de requisitos que possibilitasse colaborar com a concepção, desenvolvimento e validação de um recurso computacional (dimensão informática) que favorecesse o seu ensino de modo pleno.

O objetivo deste artigo é investigar uma abordagem cognitiva que favoreça a articulação das várias representações das cônicas, de modo a contribuir para a apreensão global das suas caracterizações. Especificamente, busca-se analisar, a luz dos princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1988), como a utilização de recursos computacionais dinâmicos pode integrar eficazmente as representações algébricas, gráficas no plano cartesiano e figurais espaciais das cônicas, promovendo uma compreensão mais significativa e unificada dos conceitos matemáticos envolvidos.

Vale ressaltar que este artigo corresponde a um recorte de resultados originalmente apresentados na tese de doutorado de Siqueira (2019), na qual foi investigada em profundidade a articulação entre diferentes registros de representação semiótica das cônicas e desenvolvidos os recursos computacionais utilizados.

2 Dimensão Cognitiva

A compreensão das cônicas no contexto educacional envolve não apenas o domínio técnico das representações algébricas e gráficas, mas também a capacidade de articular essas representações de forma dinâmica e integrada. A dimensão cognitiva desse estudo foca em como os alunos constroem o entendimento das cônicas através da articulação entre variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes. Este capítulo examina as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval e discute a importância de uma abordagem cognitiva que incorpore recursos computacionais para promover uma aprendizagem mais profunda e significativa das cônicas.

2.1 Contribuições da teoria dos registros de representações semióticas

Ao analisar em que consiste a compreensão matemática e as razões das dificuldades de compreensão de muitos estudantes, Duval (2005) destaca que os conceitos matemáticos e suas complexidades epistemológicas muitas vezes evocados não são suficientes para caracterizar a originalidade e a especificidade do funcionamento do pensamento em matemática. Para ele, tal originalidade reside em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno

compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Além disso, este autor destaca que, do ponto de vista cognitivo, a atividade requerida pela matemática se difere daquelas requeridas em outras áreas do conhecimento e apresenta duas características que evidenciam tal diferença: a importância das representações semióticas e a variedade de representações semióticas. Esses diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática são chamados de *registros* de representação que podem ser caracterizados em quatro tipos: as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural.

Segundo Duval (1993), a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da matemática. O autor acrescenta que o que importa é o objeto representado, e não suas diversas representações semióticas possíveis. Assim, enunciados, configurações geométricas, esquemas e fórmulas são produções cujo conteúdo remete a um objeto, não devendo ser confundidas com o próprio objeto representado, mesmo que aparentem explicitá-lo. Duval (1993, p. 38) afirma, entretanto, que “as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias”, além de desempenharem um papel fundamental na atividade matemática.

Para Duval (2011), os registros são sistemas cognitivamente produtores ou *criadores* de representações, devendo para isso cumprir duas condições: produzir representações que permitem acessar aos objetos perceptivamente ou instrumentalmente e, sobretudo, permitem transformar as representações produzidas a partir de operações específicas.

De modo geral, para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose e essenciais a todo registro (Duval, 1993, p. 41-42; 2009, p. 54-59):

- A *formação* de uma representação identificável implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar, como uma representação de um registro dado: a composição de um texto, o desenho de uma figura geométrica, a elaboração de um esquema, a expressão de uma fórmula algébrica, dentre outras. Desta maneira, a formação de uma representação poderia ser comparada à realização de uma tarefa de descrição.
- O *tratamento* de uma representação obtida como dado inicial é a transformação desta em uma representação considerada como terminal no mesmo registro no qual ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas:

ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números.

- A *conversão* de uma representação num dado registro é a transformação desta em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida (o registro da representação a converter), se constituindo numa atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

Para o mesmo autor, as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações com significação e funcionamento próprios, não servindo apenas para fins de comunicação, mas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento, como uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica ou um gráfico, por exemplo.

Embora de um ponto de vista matemático apenas as demonstrações permitam produzir novos conhecimentos, por uma perspectiva cognitivista precisamos ter consciência das operações específicas de cada registro mobilizado ao realizar uma atividade matemática.

Duval e Godin (2005) destacam que um objeto matemático não deve ser confundido com a representação que se faz dele, e o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. É importante ressaltar que a compreensão em matemática implica a capacidade de passar de uma representação em um registro de representação a uma representação em outro registro - é na passagem de uma representação em um registro para uma representação em outro registro que se pode observar a importância da forma de representação - pois mudar de registro não consiste apenas em mudar o modo de tratamento, mas também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Na atividade matemática, a mobilização de muitos registros de representação semiótica (figurais - planas e espaciais – gráficos cartesianos, algébricos e simbólicas, língua natural, dentre outros) pode ser uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações. De fato, a articulação de representações de um mesmo objeto matemático em diferentes registros de representação semiótica servirá a uma apreensão conceitual, dando acesso ao objeto representado, proporcionando que este não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis.

Sendo assim, Duval (2005, 2011) apresenta os tipos de transformações de representações associados à atividade matemática, isto é, as operações próprias de cada registro e a variedade dos tipos de conversão. O mesmo autor ainda classifica os registros de representação semiótica segundo as características que permitem distingui-los em registros

discursivos (linguagem natural; algébrico) e não discursivos (figuras geométricas plana e espacial; gráficos cartesianos); multifuncionais (também utilizados fora da matemática para as funções de comunicação, de objetivação ou mesmo para uma função de tratamento) e monofuncionais (próprios da matemática).

Em matemática, a variedade de representações semióticas presentes, originou a necessidade de se organizar esses diferentes tipos de representações em diferentes tipos de registros, fazendo surgir assim a ideia de representação semiótica.

Duval (2011) ressalta que uma análise feita unicamente em relação aos objetos matemáticos, sem considerar a articulação dos vários registros de representação, poderá confundir ou esconder a atividade cognitiva, devendo esta ser realizada para que a resolução de um problema seja bem conduzida.

Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, compreender um conceito matemático envolve não apenas operar dentro de um único sistema de representação (como a linguagem natural, a álgebra ou a geometria), mas também ser capaz de converter e articular entre diferentes registros — processo chamado de conversão semiótica. No caso das figuras geométricas, por exemplo, o primeiro passo consiste em realizar uma desconstrução dimensional da imagem visualizada, identificando e descrevendo, por meio de palavras ou símbolos, suas propriedades figurais. Em seguida, essas propriedades são utilizadas para deduções e articulações com outros registros de representação, como expressões algébricas ou gráficos na geometria cartesiana. Nesse momento, não se trata mais de lidar diretamente com a forma geométrica visual (bidimensional⁵ ou tridimensional⁶), pois esta já foi analisada e descrita anteriormente. O foco se desloca para as relações e transformações entre diferentes representações semióticas do mesmo objeto matemático.

Para as representações gráficas cartesianas, recorremos a outro registro, considerando um sistema de coordenadas e estando atentos à descontinuidade dos pontos quando se tem contínuo visual. Com relação às representações algébricas, estas deverão traduzir as propriedades figurais e gráfica reveladas a partir de seus valores figurais-espaciais e visuais, associados às unidades simbólicas correspondentes ou coeficientes em cada equação.

Desse modo, a articulação entre diferentes sistemas de representação mostra-se especialmente relevante no ensino e na aprendizagem da matemática, sendo considerada mais

⁵ Tratamos representação gráfica cartesiana, ou simplesmente gráfica, como sendo diferente de representação figural plana, embora a primeira também pudesse ser considerada como sendo do segundo caso. Por exemplo, se uma curva não estiver representada num sistema de coordenadas cartesianas, ela será considerada como sendo uma representação figural plana de um registro geométrico, e vice-versa.

⁶ Consideramos ser necessário acrescentar essa terminologia para contemplar as representações de figuras espaciais em perspectiva cavaleira, uma vez que o termo *figural* está muitas vezes associado a figuras planas.

central nesta área do que em outros campos do conhecimento (Duval, 2005). Porém, no contexto do ensino da matemática em geral, esses registros são ensinados independentemente e as articulações entre eles são consideradas como consequência natural do conhecimento dos registros. Se podemos admitir isso para um matemático, é muito menos óbvio no caso de um aluno, para o qual articular registros deve ser objeto de uma aprendizagem específica. Duval (1993) observa que em todos os níveis de ensino, para grande maioria dos alunos, há um isolamento de registros de representação.

Considerando em nosso estudo articular as representações semióticas nos registros algébrico, gráfico cartesiano e figural espacial (nos dois sentidos⁷) das cônicas, entendemos tratar-se de transformações relacionadas às conversões de representações e aos tratamentos, neste caso em relação às equações.

Apresentamos a Figura 1, com a classificação dos tipos de registros semióticos mobilizados no estudo das cônicas, tomando como exemplo o caso de uma elipse.

⁷ Articular as representações algébricas – três formas: quadrática geral, quadrática reduzida e matricial – a sua representação gráfica, e figural espacial, considerando tanto a passagem das formas algébricas para as formas geométricas como das formas geométricas para as formas algébricas.

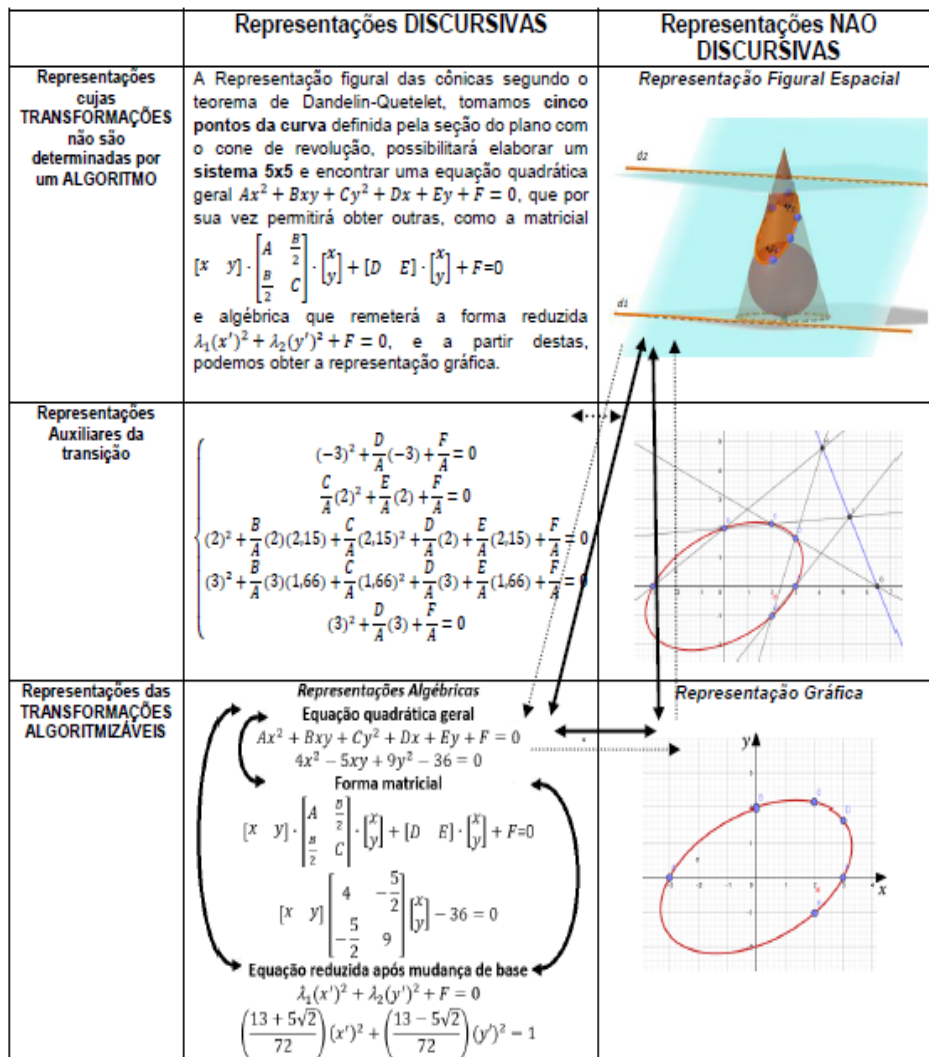


Figura 1 – Representações Semióticas para a Elipse
Fonte: Siqueira (2019, p.101)

Observando o Quadro 1, percebemos que a articulação cognitiva entre equações, gráfico cartesiano e a representação figural espacial, com relação a cônica elipse pode ser iniciada utilizando como registro de entrada a representação figural espacial da curva segundo o teorema de Dandelin-Quetelet, definida pela seção do plano com o cone de revolução, da qual se extraem cinco pontos.

Para articular as representações algébricas e gráficas, precisaremos de representações auxiliares de transição, neste caso, utilizaremos os resultados do teorema de Pascal e o teorema de Brianchon para as cônicas, assegurando que cinco pontos, três a três não colineares, determinam uma curva cônica, o que permitirá tomar cinco pontos da curva para construção de um sistema linear de ordem 5 (5x5), cuja solução nos remeterá a equação quadrática geral de forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

que por sua vez proporcionará obter outras expressões algébricas, como a matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + F = 0 \quad \text{e forma reduzida } \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + F = 0.$$

Assim, a partir destas podemos obter a representação gráfica.

Neste caso, consideramos como registro de Entrada a forma figural espacial, passando pelas equações e chegando ao esboço do gráfico considerando as características significativas (os valores e condições dos coeficientes) das expressões algébricas (flechas tracejadas). Porém, entendemos que o sentido de conversão pode se dar no sentido inverso, iniciando pelas variáveis visuais da curva num sistema de coordenadas (focos, diretriz, vértices, eixos, excentricidade, etc.), em seguida escrever as equações e obter a representação figural espacial, ou iniciando por qualquer outra representação, chegando conseqüentemente, num outro registro (flechas contínuas com duplo sentido).

Duval (2011) chama atenção para o fato de que a possibilidade de um aluno converter em um sentido, não implica que ele possa fazê-lo no sentido inverso, mas, para que haja coordenação sinérgica de representações em vários registros, faz-se necessário haver conversões nos dois sentidos.

Assim, neste momento, focamos principalmente as conversões entre as representações algébricas e figural espacial (ilustradas na Figura 1), sem desconsiderar, entretanto, que as representações gráficas em um sistema de coordenadas também exigem conversões análogas. Na sequência, discutimos como essas três representações – algébrica, gráfica cartesiana e figural espacial – podem articular-se concomitantemente na compreensão das cônicas.

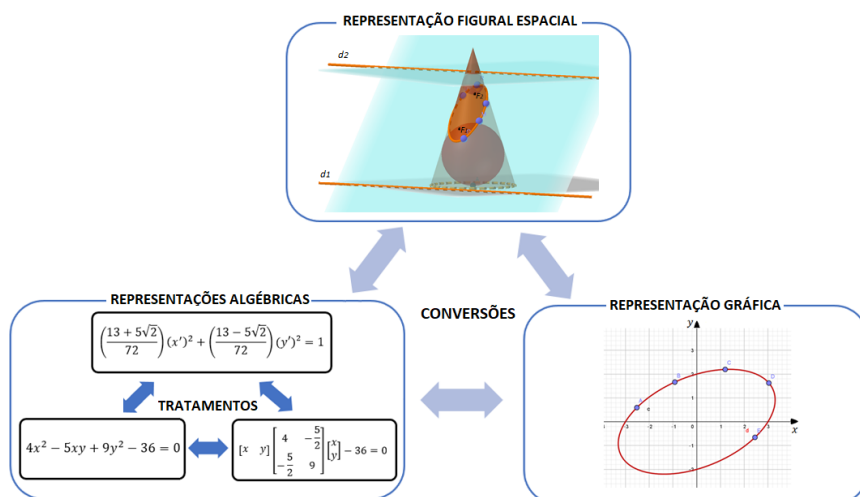


Figura 2 – Correspondência entre os registros de representação figural espacial, algébricas e gráfico de uma elipse
 Fonte: Siqueira (2019, p.138)

Duval (2005) chama a atenção para o equívoco de se considerar simples e local o processo de conversão de um registro de representação a outro, reduzindo-o, muitas vezes, a

uma mera *codificação*. Assim, por exemplo, transformar uma equação em sua representação gráfica seria visto apenas como a aplicação de uma regra, em que cada ponto corresponde a um par ordenado no plano cartesiano. Nesse sentido, o autor adverte que “tal visão é superficial e enganadora”, uma vez que a regra de codificação possibilita apenas uma leitura pontual das representações gráficas, em oposição a uma apreensão global e qualitativa. Como destaca Duval (2005, p. 17): “Ora, é essa apreensão global e qualitativa que é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos”.

A conversão entre gráficos e equações, por exemplo, supõe que se leve em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (focos, vértices, eixos, diretrizes etc.) e os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos etc.).

2.2. Representação Figural Espacial

Este estudo adota a extensão do significado de *representação figural* para *representação figural espacial*, denotando a representação em perspectiva das curvas cônicas obtidas a partir da seção do cone circular de revolução por um plano, considerando as propriedades que caracterizam cada uma das curvas, proposta por Siqueira (2019).

A representação figural espacial refere-se à representação de objetos matemáticos em três dimensões, utilizando figuras geométricas que podem ser manipuladas e visualizadas de diferentes perspectivas. Esta abordagem permite explorar propriedades e relações que não são facilmente perceptíveis em representações bidimensionais, como as equações algébricas ou os gráficos cartesianos.

Desse modo, a representação figural espacial se destaca por sua capacidade de proporcionar uma visão tridimensional e dinâmica dos objetos matemáticos, facilitando a articulação entre as representações algébricas e gráficas.

Em nosso estudo, a importância da representação figural espacial reside na sua capacidade de tornar visíveis aspectos geométricos das cônicas que são cruciais para a compreensão de suas propriedades e comportamentos. Por exemplo, ao visualizar uma parábola como a seção de um cone, os alunos podem perceber de forma mais clara as relações entre os coeficientes da equação e as características da curva.

A seguir, analisaremos um esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas, adaptado de Duval, no qual incluímos a representação figural espacial (Figura 2).

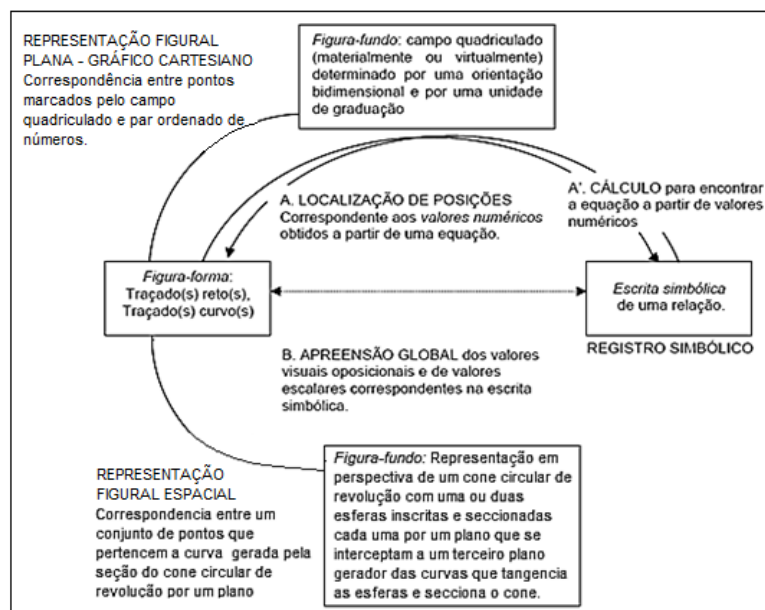


Figura 3 – Organização semiótica e funcionamento das representações gráficas e figural espacial
Fonte: Adaptado de Duval (2005, p. 18)

Podemos destacar que esta organização permite três tipos de tratamentos e dois tipos de conversão com o registro simbólico. Enquanto as ligações A e A' permitem apenas uma leitura pontual dos gráficos e da figura, a coordenação B possibilita uma apreensão global qualitativa, isto é, permite ao aluno reconhecer a forma de uma equação analisando as formas e a posições das curvas num sistema de coordenadas ou representada através de uma figura geométrica espacial em perspectiva.

Entendemos as dificuldades que estão implicadas nessa possibilidade de articulação entre três representações envolvendo as transformações por conversão, visto que, se, de acordo com Duval (2005), a coordenação-articulação entre as representações algébricas e gráfica, mesmo se tratando de um caso elementar do ponto de vista cognitivo, qual seja, aquele que envolve dois registros monofuncionais, não é efetuada nem mesmo por alunos no último ano do ensino médio, o que dizer então das situações que necessitam da articulação de três representações, incluindo também os registros multifuncionais.

3 Registro Semiótico Dinâmico

O Registro Semiótico Dinâmico envolve a utilização de ferramentas computacionais que permitem a manipulação interativa e simultânea dessas várias representações. Esta abordagem facilita a compreensão das relações e transformações entre diferentes representações, conforme discutido por Siqueira (2009) e Siqueira e Bellemain (2016). A articulação concomitante entre representações algébricas e gráficas cartesianas em ambientes

computacionais, por exemplo, permite a transformação simultânea por meio de tratamentos e conversões.

Embora já abordado implicitamente nos estudos de Bellemain e Siqueira (2009) e Siqueira e Bellemain (2016), Siqueira (2019) tomando por base a definição de registro figural dinâmico, proposto por Salazar e Almouloud (2015), definiu registro semiótico dinâmico computacional. Esse conceito envolve a articulação simultânea das representações algébricas e gráfica cartesiana em um ambiente computacional, permitindo transformações por tratamento e conversões simultaneamente.

O registro figural dinâmico proposto por Salazar e Almouloud (2015) considera apenas o aspecto figural. Para abordar completamente o objeto matemático das cônicas, era necessário incluir as representações algébricas, gráfica cartesiana e figural espacial. Assim, Siqueira (2019) propôs um ambiente computacional que possibilitasse a articulação simultânea dessas três representações. Esse *registro semiótico dinâmico* integraria registros discursivos (linguagem natural e algébrico) e não discursivos (figuras geométricas plana e espacial, e gráficos cartesianos).

Essa abordagem busca favorecer a transformação das representações em um único ambiente, permitindo a articulação simultânea de diferentes registros. Tal concepção está em consonância com a definição de representações computacionais apresentada por Duval (2009), segundo a qual essas representações possuem significantes de natureza homogênea, que não exigem a visualização do objeto representado e possibilitam a transformação algorítmica de uma sequência de significantes em outra. Essas representações, segundo o autor, tornam a informação externa acessível, recuperável e combinável dentro de um sistema.

A integração de representações dinâmicas em um ambiente computacional traduz informações externas de maneira integrada, tornando-as acessíveis, recuperáveis e combináveis dentro do sistema. Isso facilita a aprendizagem e a compreensão das cônicas, proporcionando um ambiente educacional mais eficaz e abrangente.

De acordo com Duval (2005), a interpretação figural de uma situação geométrica envolve duas atitudes geralmente contrárias: a apreensão perceptiva imediata e automática de formas, e a interpretação discursiva controlada dos elementos figurais. Estas duas atitudes geralmente estão em conflito, pois a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado. Assim, uma figura geométrica deve ser interpretada a partir das hipóteses, e não apenas pelas formas evidentes que ela apresenta.

Duval (2011) ressalta que no ensino de geometria, as figuras geométricas formam um registro de representação semiótica. Ele distingue entre o desenho, que é uma configuração

particular no papel ou na tela, e a figura, que representa as propriedades do objeto descrito pelo desenho. As figuras geométricas são identificadas pelas propriedades que não são visíveis em nenhum desenho específico, mas que são inerentes a todos os desenhos possíveis daquela figura. O autor chama atenção para a necessidade de operações de reorganização visual para ver uma figura geometricamente, reconhecendo as formas e contornos dos objetos representados.

Os ambientes de geometria dinâmica são cruciais para a implementação de registros semióticos dinâmicos. Esses softwares permitem a manipulação interativa de figuras geométricas, facilitando a articulação entre diferentes representações semióticas. A utilização desses recursos promove a compreensão integrada e dinâmica dos conceitos matemáticos.

O registro semiótico dinâmico é uma ferramenta poderosa para o ensino das cônicas e outros conceitos matemáticos complexos. Ao permitir a manipulação interativa e a transformação simultânea de representações, essa abordagem facilita a compreensão das relações entre diferentes registros semióticos. A utilização eficaz dessa abordagem requer investimentos em tecnologias de geometria dinâmica.

Podemos verificar alguns argumentos a respeito das diferentes maneiras de como os objetos matemáticos são compreendidos, tendo em vista suas representações. Ademais, se uma noção é trabalhada a partir de várias representações, vários aspectos do objeto estudado podem ser melhor compreendidos pelos alunos.

Bongiovanni (2001) trabalhou em sua tese a criação de um hiperdocumento interativo sobre as caracterizações das cônicas para uma formação contínua de professores de matemática do ensino médio, na qual também estudou as representações. Para este autor a apropriação de variadas representações do mesmo objeto matemático e a construção de articulações entre as diferentes representações pode esclarecer diferentes aspectos do objeto estudado e, por consequência, favorecer a aprendizagem.

Em sua investigação, o mesmo autor, ressaltou que o papel das representações múltiplas tem sido destacado por vários pesquisadores em diferentes campos da matemática, como por exemplo, Confrey (1992) e Kaput (1992).

Confrey utilizou o *software Function Probe* (Confrey; Smith; Carrol, 1991), capaz de gerenciar simultaneamente vários registros de representação do mesmo conceito, para explorar a ideia de função por meio de múltiplas representações — equações, gráficos e tabelas de valores — operando em três janelas distintas (gráfico, tabela de valores e calculadora). Sua pesquisa (Confrey, 1992) apoia-se em ferramentas computacionais para conceituar a noção matemática de função, destacando o papel das múltiplas representações como oportunidade

para evidenciar diferentes aspectos dos conceitos, contribuindo para aprimorar e aprofundar sua compreensão.

Para Kaput (1992, p. 530) não é possível representar adequadamente, dentro de um único sistema de notação, todos os aspectos de uma ideia complexa e, portanto, são necessários vários sistemas para sua plena expressão. Isto significa que a conversão, no sentido de Durval, entre os sistemas de representação é fundamental para o processo de aprendizagem.

Siqueira (2009) e Siqueira e Bellemain (2016) destacam a criação de novos registros *dinâmicos* de representação, favorecida pelo princípio de manipulação direta dos objetos implantados na interface, e o acesso rápido e contínuo a muitas situações, constituem-se numa ferramenta poderosa na promoção da articulação entre as várias representações, e suas variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes, podendo aparecer nas variações conjuntas e contínuas, tanto dos elementos algébricos como geométricos. Consideraram os princípios da Transposição Informática de Balacheff (1993) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993), bem como, as necessidades levantadas na investigação, e desenvolveram um aplicativo ad hoc denominado Formas.

4 Resultados

Considerando as ideias aqui postas, apresentamos uma síntese com os principais elementos da dimensão cognitiva. A atividade requerida pela matemática, do ponto de vista cognitivo, se difere daquelas requeridas em outras áreas do conhecimento, e apresenta duas características que evidenciam tal diferença: a importância e a variedade de representações semióticas. Assim, a representação não deve ser confundida com o objeto representado; e para que haja apreensão desde, é necessária a articulação, concomitante, de ao menos dois registros de representação, considerando os dois sentidos, por exemplo, das equações para o gráfico e do gráfico para as equações. As articulações implicam a necessidade de transformações tipo tratamento ou conversão.

A seguir apresentamos uma sistematização da dimensão cognitiva, destacando a necessidade de mobilização e articulação das várias representações das curvas cônicas, considerando as transformações por conversão e tratamento (Figura 2).

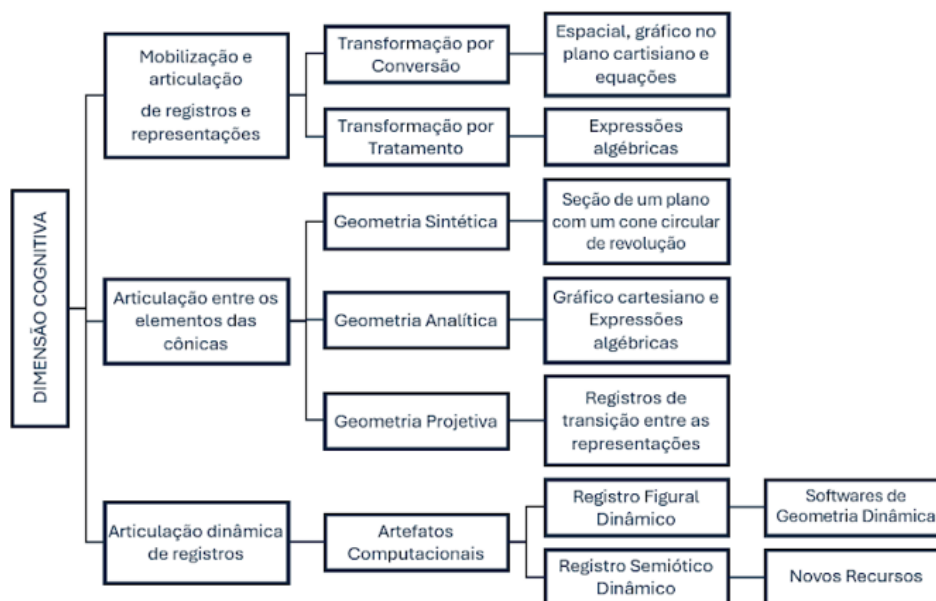


Figura 4 – Esquema com sistematização da Dimensão Cognitiva
Fonte: Siqueira (2019, p.157)

Além de buscarmos a articulação entre os elementos das curvas cônicas, segundo abordagens das geometrias sintética, analítica e projetiva, consideraremos também suas representações algébricas, gráfica no plano cartesiano e figural espacial.

Para atender a esses desafios não podemos nos restringir unicamente ao campo matemático ou à sua história, mas se faz necessária uma abordagem cognitiva, que favoreça a articulação dinâmica das várias representações das cônicas através de recurso computacional, de modo que o ensino de matemática venha contribuir para o desenvolvimento global das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos estudantes e professores.

Além dos estudos que apontaram para as contribuições do uso de um programa computacional, também evidenciou a necessidade de utilizar um recurso que possibilite uma articulação dinâmica no sentido de um registro semiótico dinâmico, isto é, articulações concomitantes entre equações, gráficos no plano cartesiano e representação figural espacial.

Abordar a articulação das representações das cônicas em diferentes registros de representação semiótica nessa perspectiva corresponde a um processo de descrição sistemática das variáveis visuais, considerando o procedimento de interpretação global das propriedades do gráfico e da figura espacial, em que, por exemplo, o conjunto traçado/eixo forma um gráfico que representa o objeto descrito pelas expressões algébricas, possibilitando identificar as modificações realizadas na representação gráfica e nas expressões algébricas.

As variáveis visuais se referem às características do gráfico que estão relacionadas aos coeficientes ou parâmetros das equações, como os vértices, os focos, as diretrizes, os eixos, o centro, dentre outros. Já as variáveis visuais figurais, representação figural espacial, dizem

respeito aos elementos da representação em perspectiva cavaleira do cone seccionado por um plano gerador da cônica, que estão relacionadas as variáveis visuais do gráfico e aos parâmetros das equações, assim destacamos, os focos, as diretrizes, os vértices e cinco pontos distintos pertencentes a curva.

O fato das cônicas serem constituídas algebricamente, também via definição monofocal (um foco, a diretriz e ponto qualquer), implica, termos a disposição os mesmos elementos característicos das cônicas (focos, diretrizes e excentricidade) nas variáveis visuais associados as unidades simbólicas correspondes. Embora, a representação gráfica, apresente outras variáveis visuais, podemos sempre relacioná-las às expressões algébricas.

Essa integração concomitante entre representações algébricas, gráficas no plano cartesiano e figurais espaciais, todas baseadas em uma única fonte de dados, foi materializada no ambiente computacional Conics 3D (Siqueira 2019). Ele possibilita que as três representações diferentes de um mesmo objeto matemático sejam visualizadas e manipuladas de forma dinâmica e interconectada, proporcionando uma abordagem mais abrangente e interativa do estudo das cônicas.

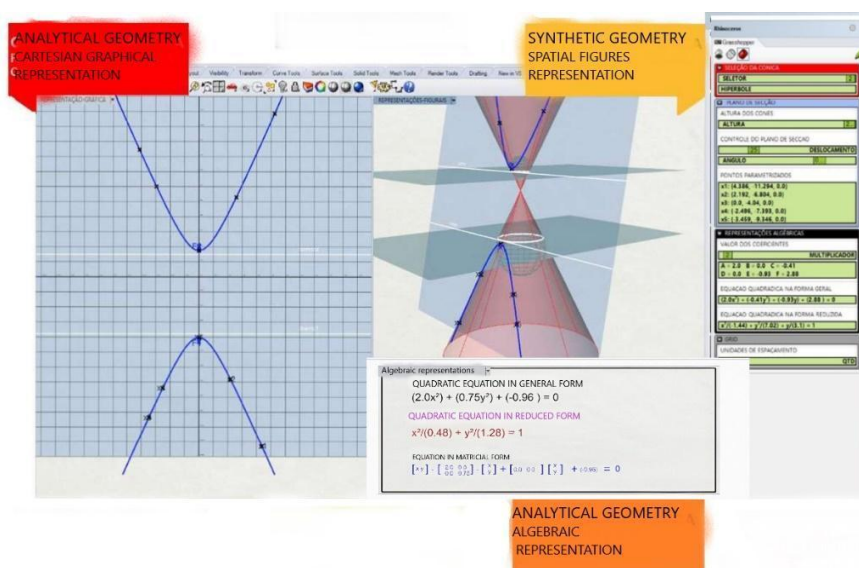


Figura 5 – Interface do Conics 3D
 Fonte: Siqueira (2019, p.227)

A principal inovação do Conics 3D (Figura 3) é a implementação dos *registros semióticos dinâmicos*. Este conceito refere-se à capacidade do *software* de articular dinamicamente equações algébricas, representações gráficas no plano cartesiano e representações figurais espaciais. Ao modificar a representação figural espacial, o *software* ajusta automaticamente o gráfico cartesiano no plano e as expressões algébricas correspondentes. Essa funcionalidade permite uma exploração contínua e interativa das

diversas representações das cônicas, facilitando a compreensão e o aprendizado das suas propriedades geométricas e algébricas.

Essa configuração permite uma manipulação direta e intuitiva das variáveis, promovendo uma interação eficiente entre as representações algébricas, gráficas e figurais espaciais, tornando o Conics 3D uma ferramenta poderosa para o ensino e a aprendizagem de geometria.

5 Considerações Finais

A importância da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval foi evidenciada na integração das definições e na exploração das várias representações das cônicas. A introdução e ampliação das ideias de representação figural espacial e, especialmente, do registro semiótico dinâmico foram fundamentais para uma abordagem mais holística e integrada desse objeto matemático. O uso de recursos computacionais, materializado no protótipo do Conics 3D (Siqueira, 2019), demonstrou-se vital para concretizar a ideia de registro semiótico dinâmico, favorecendo a articulação simultânea das representações algébricas, gráficas no plano cartesiano e figurais espaciais.

O Conics 3D proporcionou um ambiente onde as definições e as várias representações das cônicas puderam ser integradas de maneira dinâmica e interconectada. Essa abordagem apresenta potencial para favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, e promover uma aprendizagem significativa, que pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, da análise e da visualização dos estudantes.

Perspectivas para pesquisas futuras incluem a investigação de outras áreas da matemática e da geometria, em que a aplicação da Teoria dos Registros de Representações Semióticas e do registro semiótico dinâmico possam ser exploradas. Além disso, estudos podem focar na melhoria e desenvolvimento de novos artefatos computacionais que ampliem ainda mais as possibilidades de integração das diversas representações semióticas. Investigações sobre a eficácia dessas abordagens em diferentes contextos educacionais e níveis de ensino são recomendadas, a fim de validar e expandir os achados desta pesquisa, contribuindo assim para um ensino de matemática cada vez mais eficaz e inovador.

Contribuições de autoria

Todos os autores contribuíram, substancialmente, na concepção e no planejamento do

estudo; na obtenção, análise e interpretação dos dados; na redação e revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Disponibilidade de dados

Os dados gerados ou analisados durante este estudo estão incluídos neste artigo publicado.

Referências

BALACHEFF, N. La transposition informatique. *In*: ARTIGUE, M. *et al.* (eds.). **20 ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993. p. 364-370.

BELLEMAIN, F. ; SIQUEIRA, J. E. M. . Equações Quadráticas: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc. *In*: IV Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, Taguatinga - DF. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2009, Taguatinga – DF, Brasil, p. 01-20.

BONGIOVANNI, V. **Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre em formation continue d'enseignants** : étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif. 2001. 455 f. Thèse (Doctorat en Didactique des mathématiques) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

BORDALLO, M. **As Cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 61 f. Dissertação (Mestrado em ensino da Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2006 (Vol. 2).

CONFREY, J. «Using Computers to Promote Students' Inventions on the Function Concept», *In*: MALCOM, S. ROBERTS, L.; SHEINGOLD, K. (eds.) **This year in School Science 1991**. Washington: American Association for the advancement of Science, 1992. p.141-174

CONFREY, J.; SMITH, E.; CARROLL, F. **Function Probe**: Academic Version. Ithaca: Cornell University, 1991.

CONTRERAS, A.; CONTRERAS, M.; GARCÍA, M. Sobre la geometría sintética y analítica: la elipse y sus construcciones. **RELIME**: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Ciudad de México, v. 5, n. 2, p. 111-132, 2002.

DUVAL, R. Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres. *In* : SYMPOSIUM DU INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, 1., 1988, Strasbourg. **Annales...** Strasbourg : Université de Strasbourg, 1988. p. 235-253. Disponible sur : https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_01/adsc1_1988-013.pdf Consulté a l'adresse : 23 juil. 2025.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *In* : SYMPOSIUM DU INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES

MATHEMATIQUES, 3., 1993, Strasbourg. **Annales...** Strasbourg : Université de Strasbourg, 1993. p. 37- 64. Disponible sur : https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf Consulté a l'adresse : 23 juil. 2025.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e o Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.), **Aprendizagem em Matemática Registros de Representações Semióticas**. Campinas: Papirus, 2005. p. 7-33.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009 (Fascículo 1).

DUVAL, R. **Ver e ensinar Matemática de outra forma - Entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representação semiótica. v 1. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R.; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N**, v. 76, p. 7-27, 2005.

GASCÓN, J. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **SUMA**: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Zaragoza, v. 39, p.13-25, 2002.

KAPUT, J.J. Technology and mathematics education. In: GROUWS, D. A. (ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 515-556.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra “Novos elementos das seções Cônicas” (PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino médio de matemática**. 2008. 319 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SALAZAR, J. V. F, ALMOULOU, S. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.

SANTOS, C. M. dos; LIMA, A. D. de. O livro didático e sua importância no ensino da matemática: estudos introdutórios sobre o ensino de ângulos. In: SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2023, Campo Grande. **Anais...** Campo Grande: UFMS, 2023. p. 1-9. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/19119/13074> Acesso em: 23 jul. 2025.

SANTOS, T. R. dos. **A engenharia didático-informática e o processo de produção de jogos matemáticos de simulação para situações didáticas**: um estudo da concepção de uma versão digital do jogo Mankala Colhe Três. 2023. 174 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

SIQUEIRA, J. E. M. **Equações quadráticas**: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc. 2009. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2009.

SIQUEIRA, J. E. M. **Articulando os registros de representação semiótica das Curvas Cônicas através da integração de recursos computacionais**. 2019. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SIQUEIRA, J. E. M.; BELLEMAIN, F. **Contribuições de duas teorias didáticas na concepção de um aplicativo ad hoc**. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1., 2016, Bonito-MS. **Anais...** Campo Grande: UFMS, 2016. p. 1-15. Disponível em:

<http://grupoddmат.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/SIQUEIRA-BELLEMAIN.pdf> Acesso em: 23 jul. 2025.

TRGALOVÁ, J. **Etude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-géomètre**, Thèse (Doctorat en Didactique des mathématiques) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1995.

VELÁZQUEZ, S. R.; MEMIJE, E. A.; LLUCK, D. R.; MORENO, M. E.; BARRAGÁN, G. V. **La geometría analítica: ¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?** In: MARTÍNEZ, G. *et al.* (org.). México: Editorial Díaz de Santos, 2007. p. 261-279.

Submetido em: 20 de Dezembro de 2024.

Aprovado em: 09 de Maio de 2025.

Editor-chefe responsável: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi.

Editor associado responsável: Prof. Dr. Celi Espasandin Lopes.