ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

Modelización del grupo fundamental de un nudo como estrategia para establecer la estructura de una superficie

Modellng of the fundamental group of a knot as a strategy for establishing a surface structure

Enrique **Mateus-Nieves***
ORCID iD 0000-0002-0500-7450

Resumen

Antecedentes: la práctica docente evidencia escaso desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes para dar respuesta satisfactoria a situaciones cotidianas, manifiestas en dificultades para identificar la topología como una herramienta que admite modelar este tipo de situaciones. Objetivo: elaborar e implementar una propuesta de modelización matemática, que involucra la topología, como manera de conectar el mundo real con las matemáticas. Metodología: se adelantó una investigación-acción de enfoque cualitativo con cincuenta estudiantes universitarios. Análisis y resultados: se destaca la importancia de estudiar invariantes topológicas porque permiten encontrar diferencias y similitudes en trayectorias tridimensionales cerradas, elementos que conforman la estructura de una superficie. Se resalta la importancia de: relacionar espacios métricos con la topología; necesidad de manejar e institucionalizar un lenguaje claro, preciso y propio de topología como componentes que permiten al estudiante reconocer que las propiedades topológicas de los nudos (invariantes), están directamente relacionadas con las propiedades de las superficies que se pueden generar a partir de ellos.

Palabras clave: Topología. Invariante topológico. Teoría de nudos. Grupo fundamental.

Abstract

Background: teaching practice shows little development of mathematical competences in students to provide a satisfactory response to everyday situations, manifested in difficulties in identifying topology as a tool that allows modeling this type of situation. Objective: to develop and implement a mathematical modeling proposal involving topology as a way of connecting the real world with mathematics. Methodology: action research with a qualitative approach was carried out with fifty university students. Analysis and results: the importance of studying topological invariants is highlighted because they allow us to find differences and similarities in closed three-dimensional trajectories, elements that make up the structure of a surface. The importance of: relating metric spaces with topology; the need to handle and institutionalise a clear, precise, and proper language of topology as components that allow the student to recognise that the topological properties of knots (invariants) are directly related to the properties of the surfaces that can be generated from them.

Keywords: Topology. Topological invariant. Knot theory. Fundamental group.

1 Introducción

* PhD en Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC). Docente investigador, Departamento Matemáticas, Universidad Externado Colombia (UEC), Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jeman124@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

La práctica docente permite advertir escasa comprensión en estudiantes universitarios, sobre la estructura de una superficie y como ésta se puede someter a impactos, sin que llegue a modificarse. También, se observan dificultades para reconocer e identificar regiones de discontinuidad en la composición de una estructura, a pesar de realizar análisis concluyentes, diseños con detalles de la estructura, aporte de dimensiones precisas, direcciones, localización y cuantía en la estructura que la conforma; todos elementos relacionados con la comprensión de conceptos como compacidad y conexidad en la constitución de la superficie.

Se observa dificultad, en los estudiantes, para identificar que dicha optimización puede resultar en una estructura con un número de espacios vacíos donde puede haber ausencia de material. Lo que evidencia desconocimiento que esta geometría puede usarse como una guía práctica para identificar áreas de tracción y compresión de la estructura original. El propósito de este trabajo está en permitirle al estudiante, identificar la topología[1], como una herramienta que admite modelar situaciones problema mediante figuras y representaciones topológicas que ofrecen una aproximación real del mundo que les rodea.

Dentro de la enseñanza de la topología, la práctica docente ha permitido identificar en los estudiantes dos elementos fundamentales: 1) escasa comprensión de conceptos como el de invarianza topológica; esto es: en topología un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible. 2) ausencia de significado de invariantes, (trasformaciones), que conforman el grupo fundamental de un nudo. Por lo que, este estudio, focaliza su atención en teoría de nudos, encargada de estudiar los diversos modos de insertar un espacio topológico en otro, y porque las propiedades topológicas de los nudos (invariantes) están directamente relacionadas con las propiedades de las superficies que se pueden generar a partir de ellos.

Para llevar a cabo este proceso se optó por la modelización matemática como una manera de conectar el mundo real con las matemáticas. Se adecuo una secuencia de actividades relacionadas con nudos, trabajadas desde la propuesta de Blum y Leiß (2007), denominada el ciclo de modelización en términos de siete transiciones concebidas como un proceso, en el que, en cada transición, es posible evidenciar dificultades y avances en los estudiantes, como una forma de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Entre los resultados se destacan avances en la muestra para comprender invariantes del grupo fundamental y una aproximación que les permite identificar *huecos* en una superficie,

[1] Teoría matemática compuesta por las teorías de grafos, de nudos y de superficies.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

(compacidad, conexidad y sus diferencias), como invariantes por homomorfismos. Sin embargo, se considera importante profundizar, detalladamente, en la construcción del grupo fundamental por la complejidad epistémica intrínseca del mismo. Se resalta la importancia de relacionar los espacios métricos con la topología, el manejo e institucionalización de lenguaje claro, preciso y propio de topología.

2 Marco Teórico

Se contemplaron dos ejes: topología y modelización matemática.

2.1 Topología

Estudia aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen invariantes (cardinalidad del espacio, peso, densidad, separación, condiciones de numerabilidad, conexidad, compacidad, metrazabilidad), cuando se les aplica un conjunto de transformaciones continuas, por ej.: plegar, dilatar, contraer o deformar, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Munkres (2000) considera *un invariante topológico* como algo que no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones; se dice invariante respecto de o bajo una transformación si permanece inalterado tras la acción de tal trasformación. Un objeto se considera invariante bajo un conjunto de transformaciones si la imagen transformada de dicho objeto es indistinguible de la original. Por su parte, Murasugi (2007) expone que la transformación permitida supone que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos, propiedad denominada *continuidad.* Se requiere que la transformación y su inversa sean ambas continuas, proceso denominado, *homeomorfismo*[2]. Así, la topología se convierte en *una forma* de ver los cuerpos geométricos, convirtiéndolos en objetos que puedan ser agrupados y clasificados, bien sea porque tienen una forma representativa en el espacio tridimensional convencional, o una formulación abstracta en un espacio n-dimensional.

2.1.1 Noción de invarianza topológica

[2] Esto es: si A y B son dos espacios topológicos y existe f: A → B tal que f es una función biyectiva, continua y con inversa continua, se dice que A es homeomorfo a B.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

Livingston (1993) considera un funtor[3] ψ entre categorías: $\psi: C_1 \to C_2$. Un invariante es un objeto de la categoría imagen C_2, tal que las imágenes por el functor de los objetos de la primera categoría (que pueden ser relacionados por un isomorfismo) son idénticas. Dados cualesquiera dos objetos de la primera categoría se cumple que: $\psi: (C_A) = \psi(C_B) \in Ob(C_2),\ \forall C_A, C_B \in Ob(C_1)$. Implica que, un *invariante* es una functor constante sobre una determinada categoría.

Algunos invariantes topológicos son la compacidad[4] y conexidad[5]. C*ompacidad:* relación entre el volumen total del cuerpo y el volumen del sólido; varía según el tamaño y forma de los elementos granulares y su grado de compactación, lo que permite inferir que es la cantidad de materia sin huecos, o sin poros, en la superficie. Una superficie topológica compacta es una variedad de dimensión dos. Son ejemplos de estas superficies el plano $\mathbb{R}^2$, la esfera S^2, el toro $\mathbb{T}^2$. El conjunto de elementos que conforman dicho objeto es *conexo* si, intuitivamente, ese conjunto no está fragmentado en partes topológicamente separadas. En sí, un objeto conexo es *un todo*, si sus diferentes piezas están coherentemente unidas.

Kauffman (1991) muestra que cuando estos invariantes no son suficientes, por ejemplo, en $\mathbb{T}^2$ (la superficie de una rosquilla) un meridiano y un paralelo se presentan substancialmente diferentes, esto es, uno no se puede deformar en el otro, evidencia que no hay homeomorfismo. Sin embargo, en S^2 (superficie de $\mathbb{R}^2$) cualquier par de curvas se pueden transformar una en la otra haciendo un giro; la representación en $\mathbb{R}^2$ de dichas curvas se hace con *lazos.* Por lo que la idea de estudiar *lazos*[6], y la *composición de lazos* en cada espacio resulta efectiva. Elementos que admiten definir una *homotopía* como el proceso que permite transformar poco a poco una imagen en otra. Es importante resaltar que las homotopías no son únicas, es posible hallar diferentes formas de transformar α en β con variedad de fórmulas explícitas de estas transformaciones (MUNKRES, 2000). Es viable establecer si α puede, efectivamente, transformarse en β, pero no cómo, lo que admite considerar la definición de *grupo fundamental*.

2.1.2 Grupo fundamental

[3] Función de una categoría a otra que lleva objetos a objetos y morfismos a morfismos, de manera que la composición de morfismos y las identidades se preserven. Los funtores relacionan varias categorías.
[4] Es un homeomorfismo f: (X1, τ1) → (X2, τ2) donde (X2, τ2) es compacto si, y solamente si (X1, τ1) es compacto.
[5] Un espacio conexo (X1, τ1) es aquel para el cual no existen conjuntos abiertos disjuntos no vacíos A, B tales que (X1, τ1) = A ∪ B.
[6] Trazos que se pueden hacer con curvas dentro del espacio considerado.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

Invariante topológico, considerado como un conjunto de transformaciones τ sobre objetos. Este invariante puede entenderse como un objeto matemático que no es alterado por las transformaciones: $inv(T(x)) = inv(x); \quad x \in X, \forall T: (T: X \to X) \in \mathcal{T}$ ya que dos espacios homeomorfos comparten el mismo grupo fundamental. Para este trabajo se ha concentrado el grupo fundamental en las trasformaciones (invariantes) que se indican a continuación: quiralidad, invertibilidad, equivalencia, número de cruces; número de desanudado.

2.2 Teoría de nudos

Estudia aspectos geométricos de curvas simples cerradas, llamadas nudos conformados por lazos. Matemáticamente, un *nudo* es una aplicación $k: S^1 \to \mathbb{R}^3$, o $S^3, K = k(S^1)$ continua e inyectiva que es un homeomorfismo en la imagen, esto es, una manera de ensamblar una circunferencia en el espacio. De ahí que, un nudo es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles, donde, una vez pegados sus extremos, estos no se pueden desunir. Los nudos se representan por diagramas en $\mathbb{R}^3$(curvas simples y cerradas), por encajes o embebimientos de la circunferencia en diversos espacios topológicos. Se admite que esta curva pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes (LIVINGSTON, 1993). Cuando es posible, a través de manipulaciones de este tipo (homeomorfismo en $\mathbb{R}^3$), pasar de un nudo a otro sin cortes ni roturas, son denominados *nudos equivalentes* que establecen la existencia de una isotopía del ambiente entre ambos encajes.

El *diagrama* del nudo es una proyección sobre el plano xy, destacando en cada cruce la diferencia entre el tramo que está encima del que está por debajo, este último, se marca con una interrupción. Es posible que, al proyectar dos nudos diferentes en determinada dirección se pierda información y se obtenga la misma proyección. Para que esto no suceda, se trabaja con las *proyecciones regulares* del nudo; sin embargo, el mismo nudo admitirá distintas representaciones en forma de diagrama.

De ahí la importancia de utilizar la teoría de *invariantes del nudo* para determinar cuándo dos diagramas representan el mismo nudo. El teorema de Reidemeister es una de estas herramientas útiles para probar algunos invariantes, sin embargo, este teorema no proporciona un algoritmo que permita determinar si dos nudos son equivalentes, dificultando determinar el número de movimientos necesarios para transformar un diagrama en otro. Tampoco permite saber, con certeza, si dos nudos son o no equivalentes; para ello, en este trabajo se hace énfasis en estudiar los invariantes identificados y descritos a continuación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

2.2.1 Invariantes del nudo

Definición: un invariante de nudo es una correspondencia γ que asocia a todo nudo N_1 una expresión matemática $\gamma(N_1)$. Dados $N_1 \cong N_2$ se tiene que $\gamma(N_1) = \gamma(N_2)$.

Los invariantes considerados son:

- *Quiralidad*. Propiedad geométrica relacionada con la simetría del nudo (un nudo es quiral cuando es posible superponer su imagen especular (imagen en el espejo). Se dice que es *aquiral* si puede ser deformado sin discontinuidades en su imagen especular. Ejemplo: el nudo trébol derecho e izquierdo (Figura 1).

Figura 1- Diagrama del nudo trébol derecho e izquierdo
Fuente: adaptación propia

- *Nudo invertible*. Es equivalente a sí mismo con la orientación[7] opuesta. Esto es, existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$en sí mismo, que preserva la orientación, tal que la restricción h/K es un homeomorfismo que invierte la orientación de K en sí mismo. Un *nudo orientado* está compuesto por un nudo y un orden en sus arcos (TROTTER, 1963). Dicho orden debe ser elegido de manera tal que determine el origen del nudo. De ahí que, dos órdenes son equivalentes si estos difieren por una permutación cíclica (Figura 2).

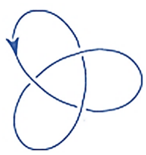


Figura 2 - Nudo convertible no trivial[8]
Fuente: adaptación propia

- *Equivalencia entre nudos*: dos nudos N_1 y N_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo $f: S^3 \rightarrow S^3$ que preserva su orientación, tal que $f(N_1) = N_{2,}$ denotados $N_1 \cong N_2$ (MURASUGI, 2007). En otras palabras, si existe una homotopía entre la identidad y un homeomorfismo h que trasforme N_1 en N_2 (Figura 3).

[7] La orientación de un nudo se representa por flechas en sus arcos.
[8] El nudo invertible no trivial más simple es el nudo trébol. Al girar el nudo 180° en tres espacios alrededor de un eje, en el plano del diagrama, se produce el mismo diagrama de nudos, pero con la dirección de la flecha invertida.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

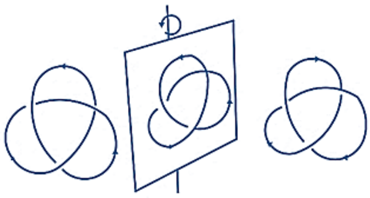


Figura 3- Equivalencia entre nudos
Fuente: adaptación propia

- *Número de cruces:* se considera el mínimo número posible de cruces con que se puede dibujar el diagrama de un nudo, denotado $c(N)$. La suma conexa $c(N_1) + c(N_2)$ denotada $c(N_1 \# N_2) = c(N_1) + c(N_2)$, consiste en eliminar un arco en cada nudo. La idea es que *n* no pase por ningún cruce y sea posible unir los puntos extremos de esos arcos mediante caminos que no se crucen entre ellos, lo que implica, $c(N_1 \# N_2) \leq c(N_1) + c(N_2)$, similar a la desigualdad triangular en los reales. A pesar que aún no se ha probado la igualdad $c(N_1 \# N_2) = c(N_1) + c(N_2)$ para dos nudos N_1 y N_2.
- *Número de desanudado*: en cada cruce de un nudo N_1 se puede cambiar la disposición de la cuerda de forma que el arco que pasa por debajo, pase por encima y viceversa. El número de este tipo de cambios necesarios para desanudar un nudo, denotado $u(K)$, es un numero finito, una cota superior de $c(K)$ (Figura 4).

Figura 4 - Suma conexa
Fuente: adaptación propia

Otros ejemplos de invariantes, no considerados en este trabajo son: tricoloreabilidad, polinomios: de Alexander, de Conway, de Jones con sus dos generalizaciones, de Homfly y de Kauffman, ambos generados por grupos cuánticos, y los invariantes hiperbólicos.

2.3 Modelización matemática

Se adoptó la postura de Blum y Borromeo (2009, p. 1) que definen la modelización como "el proceso de traducción entre el mundo real y las Matemáticas en ambos sentidos", con el objeto de identificar habilidades asociadas a este proceso que deben potenciarse en la formación de los estudiantes. El desarrollo de estas habilidades implica mayor comprensión de la realidad, fortalece las conexiones entre conceptos matemáticos y hace evidente la utilidad de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

las matemáticas en situaciones contextualizadas.

Para materializar este proceso, se consideró el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007) en términos de siete transiciones: 1) el problema o la situación propuesta debe ser entendida por el estudiante, esto es, debe construir un modelo de la situación (transiciones: comprensión y construcción); 2) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisa (transiciones: simplificación y estructuración), dando lugar a un modelo real de la misma; 3) transición: matematización, transforma el modelo real de la situación en un modelo matemático; 4) transición: trabajo matemático, la puesta en práctica del modelado debe producir resultados matemáticos; que, 5) deben ser interpretados en el mundo real (transición: interpretación); 6) transición: validación y verificación de resultados, aquí es posible que sea necesario reiniciar un ciclo donde sea preciso repetir alguna(s) transición (es). 7) Exposición del problema, por el alumno, y su posible solución.

Blum y Borromeo (2009) plantean que un individuo puede resolver un problema, pasando por diferentes transiciones del ciclo sin seguir, necesariamente, el orden expuesto anteriormente; establecen que este ciclo de modelización puede no definir una trayectoria lineal de pensamiento.

Este enfoque define tres estilos de pensamiento matemático: 1) de tipo visual, en que el estudiante suele razonar sobre el modelo real más que sobre el modelo matemático, muestra tendencia a abordar los problemas de forma global y prefiere las representaciones pictóricas; 2) tipo analítico, donde el estudiante suele razonar sobre el modelo matemático más que sobre la realidad, utiliza representaciones simbólicas o verbales y prefiere estructurar paso a paso el procedimiento seguido. En un punto intermedio entre ambos extremos, se encuentra 3) de tipo integrado, mediante el cual el estudiante es capaz de combinar elementos de los dos tipos de pensamiento ya planteados.

Las transiciones del ciclo de Blum y Leiß (2007) constituyen puntos de referencia para el análisis de las estrategias de modelización, que permiten estructurar la búsqueda y categorización de los posibles errores que puede cometer un alumno. El estudio de dichas estrategias y de los errores junto con la identificación de los tipos de pensamiento proporcionan herramientas para un proceso de análisis-síntesis que permite elaborar el perfil y detectar necesidades formativas en los alumnos participantes.

Para este trabajo se siguió la postura planteada en Mateus-Nieves (2020a), y ratificado en Mateus-Nieves y Rojas (2020b, p. 70) “el proceso de construcción de conceptos abstractos como los definidos en la educación superior, resultan difíciles de comprender a los estudiantes”, por ello se buscó articular la teoría con el experimento, donde la modelización matemática es

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

utilizada como una herramienta didáctica para fortalecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este tipo de situaciones, incorporando el uso de herramientas tecnológicas como el ordenador y *software* matemático.

3 Metodología

Se trata de una investigación-acción de enfoque cualitativo, cuya intervención busca evidenciar cambios en la muestra, cincuenta estudiantes universitarios de ingeniaría que cursan 5° semestre (componentes de fundamentación), y toman la asignatura matemáticas especiales. Los estudiantes fueron codificados como E1, E2, … hasta E50. La muestra fue organizada en subgrupos de tres alumnos para realizar las actividades planeadas, con el objeto de tener seguimiento exhaustivo al desarrollo alcanzado por cada estudiante, en cada una de las siete transiciones. Se buscó articular la teoría de nudos con la modelización matemática como metodología de enseñanza (ver Cuadro 1, sesión cuatro de resultados). Se buscó conectar las siete transiciones del ciclo de modelización con el desarrollo de dos momentos de trabajo: 1) de sensibilización, 2) de implementación y evaluación.

3.1 Momento 1 de sensibilización

Se llevó a cabo durante tres semanas. Objetivo: desarrollar la intuición en los estudiantes a partir de identificar, describir y analizar las acciones que llevan a cabo cuando cubren las subcompetencias trazadas para las transiciones: *construcción y estructuración* propuestos en el Cuadro 1. En este primer momento, se buscó integrar las dos primeras transiciones del ciclo de modelación, a partir del desarrollo de contenidos del programa desde la aplicación de ejercicios de carácter práctico. Durante la primera semana, se pidió a los estudiantes llevar cuerdas y construir nudos libres, realizar en su cuaderno el respectivo diagrama, al finalizar la semana ofrecimos literatura relacionada con teoría de nudos, con el objeto que los alumnos relacionaran el trabajo adelantado con la teoría y, si era necesario, hicieran ajustes al trabajo adelantado. Durante las dos semanas restantes, formalizamos qué es un nudo, clases de nudos, cómo se construye el diagrama de un nudo, cuáles son las proyecciones regulares, con el objeto que los estudiantes identificaran los invariantes del nudo y determinaran cuáles se cumplían en sus diagramas. En la sección de resultados se describe parte de este proceso.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

3.2 Momento 2 de implementación y evaluación

En el desarrollo de este segundo momento de trabajo, se buscó articular las transiciones: matematización, resolución, interpretación, validación y exposición, trabajo desarrollado durante nueve semanas. Objetivo: buscar que los estudiantes, a partir del trabajo creado en las primeras tres semanas, lograran matematizar cuáles propiedades topológicas (invariantes) se satisfacen y sí están o no directamente relacionadas con las propiedades topológicas de las superficies que se pueden construir a partir de ellos.

La matematización se implementó en algoritmos lógico-numéricos considerando las cualidades presentes desde dos estrategias: 1) *Ejercicios de carácter teórico*, propuestos en la bibliografía del curso. 2). *Ejercicios de investigación:* se buscó reforzar la matematización de las situaciones creadas desde el uso de tres clases de material bibliográfico: libros de teoría de nudos, libros con temas relacionados, artículos y páginas *web*, con el ánimo que los estudiantes pudieran profundizar y comprender las situaciones que requieren uso de conceptos más avanzados que los vistos previamente en clase, todos soportados en la bibliografía del curso. Durante el desarrollo de este momento se observó la importancia de familiarizar a los estudiantes con conceptos propios de teoría de nudos, porque se notó que los confundían, impidiéndoles visualizar, relacionar y extender el significado de invariante topológico y la afectación existente sobre la construcción de la estructura de una superficie; de esta manera, se evidenció un acercamiento a las nociones de compacidad y conexidad.

4 Análisis y Resultados

El trabajo en subgrupos permitió, durante ambos momentos, hacer seguimiento a las discusiones, análisis, construcción e investigación que los estudiantes realizaron a las creaciones y posibles soluciones propuestas. De ese compromiso entregaron un informe escrito, que corresponde a la transición site del ciclo de modelación, donde únicamente los investigadores conocían a qué subgrupo correspondía cada producción. Como estrategia pedagógica, el investigador presentó, en plenaria, cada trabajo anónimamente, para ser sometido al análisis y observaciones del grupo. El interés del anonimato fue que ningún estudiante se sintiera en desventaja respecto a sus pares cuando su trabajo era expuesto.

El grupo general analizó si la propuesta de modelización ofrecida satisface las necesidades planteadas en el problema, si eran suficientes o incompletas, con el objeto que cada subgrupo al observar su trabajo, revisara si necesitaba ajustes, realizarlos y entregarlo al

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

investigador como informe final corregido, alcanzando, de esta manera, desarrollo de competencias matemáticas. El Cuadro 1 muestra la articulación propuesta entre la teoría de nudos y la modelización matemática.

Momentos de trabajo	Transiciones del ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007)	Subcompetencias desde la teoría de nudos
Momento 1 Sensibilización	Construcción etapas	Construye y representa nudos: libres, trivial y trébol, Elabora diagramas regulares representativos. Indica en el diagrama: orientación y número de cruces. Visualiza nudos construidos desde *software*.
	Estructuración	Enuncia la definición funcional de nudo. Construye el diagrama regulador mediante proyecciones en el plano. Diagrama todas las ecuaciones (líneas y curvas) que representan las partes del nudo. Asocia un diagrama regular con la construcción, el nudo que representa. Relaciona el nudo construido con el diagrama presentado. Determina quiralidad o aquiralidad.
Momento 2 Implementación y evaluación	Matematización	Indica en el diagrama regular de un nudo: el tipo de nudo, orientación, número de cruces que están representados. Determina cuáles invariantes del grupo fundamental se satisfacen y cuáles no. Determina si existe una isotopía X del espacio que no altere la topología de X. Extiende el significado de invariante topológico con la afectación existente en la construcción de la estructura de una superficie. Construye enlaces a partir de funciones bien definidas, digitadas en el *software*. Relaciona las nociones de compacidad y conexidad en la estructura de una superficie con los invariantes del grupo fundamental.
	Resolución	Relaciona el diagrama regular con la construcción tridimensional. Identifica y relaciona los invariantes que conforman el grupo fundamental del nudo. Establece equivalencia entre nudos.
	Interpretación	Expresa, de manera concreta y en contexto real, los resultados encontrados relacionados con nudos o enlaces. Reconoce los invariantes que conforman el grupo fundamental. Identifica, desde el *software*, posibilidad de expresar gráficamente un nudo desde el uso de funciones. Expresa y registra de forma correcta en el *software* la(s) función(es) bien definida(s) que representan el nudo o enlace. Diagrama y visualiza en el *software* el nudo o enlace correspondiente. Busca relación entre las nociones de compacidad y conexidad en la estructura de una superficie con los invariantes del grupo fundamental.
	Validación	Crea construcciones a partir de funciones bien definidas, digitadas en el *software*. Contrasta si los resultados obtenidos con el *software* corresponden a la situación planteada y satisfacen las condiciones pedidas.
	Exposición	Sustenta, coherentemente, el trabajo desarrollado y la extensión a otras posibles situaciones propias del quehacer de un ingeniero. Visualiza, relaciona y extiende el significado de invariante topológico con la afectación existente sobre la construcción de la estructura de una superficie, buscando acercamiento a las nociones de compacidad y conexidad de una superficie.

Cuadro 1 - Articulación propuesta, teoría de nudos vs modelización matemática
Fuente: creación propia

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

4.1 Momento 1, de sensibilización

Como se mencionó anteriormente, se buscó integrar las dos primeras transiciones del ciclo de modelación.

4.1.1 Desarrollada a partir de ejercicios de carácter práctico

Son ejercicios sencillos, en el sentido que no se requieren herramientas matemáticas avanzadas para realizarlos. Siguiendo las directrices de trabajo trazadas inicialmente en, Mateus-Nieves (2016) y profundizadas en Mateus-Nieves y Hernández (2020c), pedimos a los estudiantes construir con cuerdas nudos libres, realizar los respectivos diagramas regulares, siguiendo las directrices mostradas en el taller asignado (ver Cuadro 2, sección 4.2.1 de este manuscrito, donde se muestra, por cuestión de espacio, una parte del taller propuesto). Hablar de ejercicios sencillos no significa que la actividad fuera elemental; fue diseñada porque encontramos dificultades, en los estudiantes, para identificar temas relacionados con teoría de grupos y topología. La Figura 5 muestra la producción de nudos libres que realizaron algunos estudiantes.

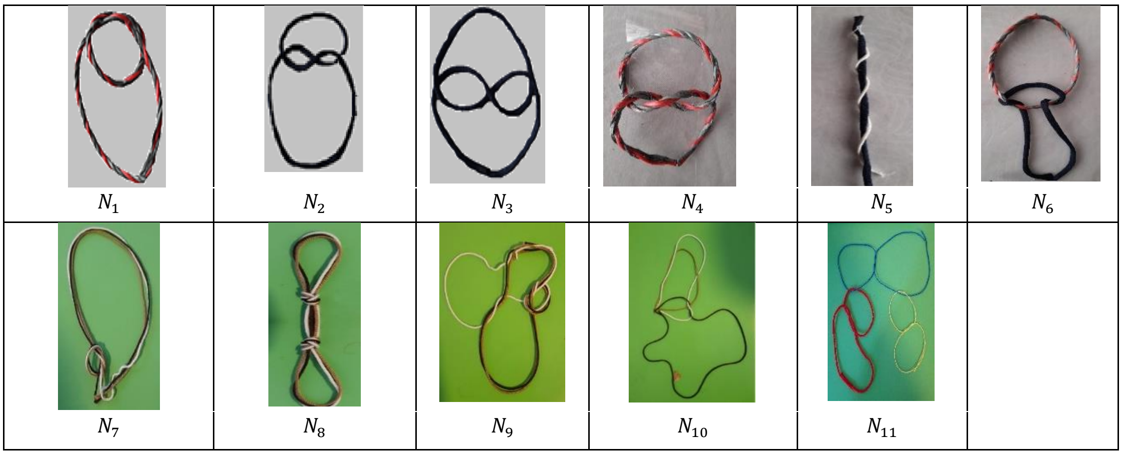


Figura 5- Produccion de estudiantes sobre nudos libres
Fuente: producción de la muestra

De estas construcciones observamos que de N_1 a N_4, topológicamente son el mismo nudo, sin embargo, los estudiantes consideran que son diferentes porque sus *formas* no son iguales. En N_4 se observa como E15 pega sobre una cinta el nudo que ha construido tratando de darle simetría, pensando que esto lo hace diferente a las construcciones N_1, N_2 o N_3. La construcción N_1 también de E15, y que E12 debía replicar a partir del diagrama entregado; E12 al ver el nudo (con la cuerda) de dos colores pensó que E15 había entorchado dos cuerdas y luego realizó el nudo. E12 obvia mirar el diagrama entregado y se fija en la construcción

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

material del nudo; en N_5 vemos cómo E12 entorcha dos cuerdas para replicar el nudo.

Mientras hace esta tarea, E15 le dice:

E15: y*o no entorché dos cuerdas, es una sola elaborada con dos fibras de diferente color* (Comentario del estudiante, agosto de 2020).

Uno de los investigadores observa la situación y se establece el siguiente diálogo:

Investigador: *¿por qué miró la construcción con la cuerda y no el diagrama*?
E12: porque la gráfica no me permite determinar colores, E15 trazó el nudo con un solo color de cuerda, yo veo que su nudo tiene dos colores, lo que me llevó a pensar que E15 había hecho mal el grafico, veo dos cuerdas, cada una con diferente color.
Investigador: ¿por *qué son diferentes?*
E12: porque una cuerda entorchada es más resistente que una sencilla, lo relaciono con la compacidad, y por tanto el gráfico del nudo debería estar resaltado con doble trazo (Diálogo entre el investigador y E12, agosto de 2020).

Estas situaciones indican que la tarea no era elemental, E12 menciona la compacidad del lazo usado por E15, intenta replicarla entorchando una de sus cuerdas con otra de diferente diámetro (ver N_5), lo que evidencia desconocimiento que algo compacto se encuentra condensado, resumido, apretado, sin espacios libres o poros; sin embargo, E15 tampoco parece conocer estas propiedades porque no hace observación alguna al respecto que pretenda identificar regiones de discontinuidad en el *entorchado* N_5, esta construcción resulta en una estructura diferente a la usada por E15. Los investigadores llevan esta situación al grupo general que escucha atentamente las observaciones, sin ofrecer discusión al respeto. Lo que evidencia escasa comprensión de las situaciones por ellos construidas.

También, se identificó dificultad en el grupo para realizar el diagrama de cada nudo e identificar, al menos, su orientación y el número de cruces. Lo que permite inferir que el tipo de pensamiento fue visual, dado que los estudiantes razonaron sobre el modelo real (construcción con las cuerdas), más que no sobre cuál sería el modelo matemático. Se rescata, de este trabajo práctico, el grado de familiarización que alcanzaron los estudiantes con las situaciones propuestas, favoreciendo desarrollo de la intuición.

Con las lecturas ofrecidas como actividades de investigación, los estudiantes fueron, progresivamente, formalizando los diagramas construidos, dado que las primeras representaciones elaboradas fueron clasificadas como dibujos y no como diagramas regulares de un nudo. Lo que permite inferir una aproximación al tipo de pensamiento analítico, dado que comienzan a utilizar representaciones simbólicas, verbales que les permiten estructurar paso a paso el procedimiento seguido.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

4.2 Momento 2 de implementación y evaluación

Desarrollado desde dos estrategias que se aplicaron de forma alterna: ejercicios de carácter teórico y ejercicios de investigación**.** Esto con el objeto que los estudiantes integraran y conectaran las transiciones del proceso de modelización propuesto.

4.2.1 Ejercicios de carácter teórico

A partir de las construciones mostradas en la Figura 5, formalizamos: *nudo manso o isotópico,* determinado por una función lineal a trozos (poligonal). A los nudos que no son mansos, los llamamos *salvajes.* Los estudiantes debían determinar qué tipo de nudos habían creado. Se formalizo que las producciones N_6 a N_{10}, construcciones no elementales corresponden a este tipo de nudos. Las producciones N_6 , N_7 y N_8 fueron elaborados por E9, una estudiante que manifestó saber tejer productos en telar, lana e hilo con aguja de crochet o con agujas dobles. Las construcciones N_9 a la N_{11} fueron formalizadas como *enlaces*, unión disjunta de finitos nudos, imagen de finitas copias de S^1en $\mathbb{R}^3$ por una función continua e inyectiva. Matematizamos que los nudos y enlaces se representan gráficamente usando proyecciones sobre un plano, mediante *diagramas*. Formalizamos que, en estas proyecciones, no se aceptan puntos triples ni puntos de tangencia, y en los puntos dobles al arco que pasa por debajo se dibuja cortado. A las componentes conexas del diagrama las llamamos *arcos* y a los puntos dobles *cruces*.

Posteriormente, les pedimos revisar sus diagramas y hacer los ajustes respectivos, dado que la producción de algunos de ellos seguía siendo dibujos que, topológicamente, no corresponden a un diagrama. Lo que permite inferir un tipo de pensamiento integrado donde prima el visual sobre el analítico, dado que los estudiantes fijan principalmente su atención sobre el modelo real que sobre cuál sería el modelo matemático que representa la situación.

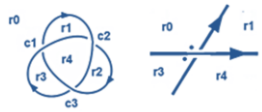
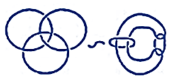
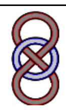
Esta dificultad fue superada cuando los estudiantes pudieron comprender las diferentes construcciones elaboradas por sus compañeros, realizar los respectivos diagramas usando cuerdas, lápiz y papel. Esta actividad fue validada en el *software*, mostrando debilidad en los estudiantes para construir funciones bien definidas, lo que les condujo a errores en el trabajo adelantado. Otros trabajos que generaron dificultades se relacionaron con construcciones de lazos abiertos (ver Figura 6b). Por cuestión de espacio, en el Cuadro 2 se muestra un esbozo de la actividad denominada *construyendo nudos*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

<table>
<tr><th colspan="3">Construyendo nudos</th></tr>
<tr><td colspan="3">Primera parte
Conceptos: Nudo trivial, es una circunferencia geométrica canónica embebida (mediante la aplicación inclusión) en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Los nudos no triviales más sencillos son el nudo trébol y el nudo con figura de ocho. Llamamos nudo poligonal a aquel nudo cuya imagen está formada por un número finito de segmentos de recta. Un nudo equivalente a un nudo poligonal se denomina manso. Por tanto, un nudo es un enlace que tiene solo una cuerda. Sin embargo, un nudo es un caso particular de enlace, colección anudada de una o más cuerdas cerradas. Dos ejemplos de enlaces compuestos por más de una cuerda son el enlace de Whitehead y los anillos de Borromeo.</td></tr>
<tr><th>Actividad</th><th>Descripción</th><th>Indicador</th></tr>
<tr><td>Construcción nudo trivial</td><td>Nudo trivial. El nudo mas sencillo es S^1 visto en $\mathbb{R}^3$, esto es el conjunto de puntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$.

Nudo trivial</td><td>1. Construye el diagrama regulador para un nudo trivial y el nudo sencillo en forma de ocho
</td></tr>
<tr><td>Construcción nudo trébol</td><td>Nudo trébol. Es el nudo sencillo no trivial, tiene tres cruces

a. Nudo trébol dextrógiro

b. nudo trébol levógiro</td><td>2.Construye el diagrama regulador para un nudo trébol
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Construcción de otros nudos</td><td>Nudo de Saboya
</td><td rowspan="2">3. Construye el diagrama del nudo</td></tr>
<tr><td>Nudo de Kimoshita- Torasaka
</td></tr>
<tr><td>Construcción de enlaces</td><td>
a. de Whitehead

b. Anillos de Borromeo

c. con dos cuerdas</td><td>4. Identifica los lazos que conforman el enlace y realiza el respectivo diagrama</td></tr>
<tr><td colspan="3">Segunda parte
Comparar, construir y responder
Compare dos nudos construidos por ustedes, analícelos detalladamente y responda:
¿Qué tienen en común, qué diferente? Describa de tal forma que alguien que no esté mirando las construcciones, entienda de que se está hablando.
Identificar coincidencias y diferencias.
¿Es más simple replicar el nudo si en el diagrama se indica dónde está la unión de los extremos?
¿Qué problema se le presentó al tratar de hacer un nudo a partir de un diagrama? ¿Cómo lo resolvió?
¿Le es posible identificar los invariantes del grupo fundamental en el nudo que construyó?
¿Cómo matematizaría usted la construcción de ese nudo?
¿Cree que el significado de invariante topológico afecta la construcción de la estructura de una superficie? Explique.</td></tr>
</table>

Cuadro 2 - Parte de una actividad
Fuente: elaboración propia

Se observó que la definición simple de nudo, previamente esbozada, resultó difícil al momento de manejar las deformaciones esenciales en las propiedades de los nudos, dado que se pretendía formalizar teóricamente los invariantes del nudo. Por ej., la segunda parte expuesta en el Cuadro 2, permitió formalizar matemáticamente un nudo como una curva poligonal cerrada y simple en $\mathbb{R}^3$, así:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

> *Definición:* Sean p y q dos puntos distintos en el espacio. Indicamos $[p, q]$ como el segmento de línea que los une. Así, para un conjunto ordenado de puntos distintos, $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, la unión de los segmentos $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, …, $[p_{n-1}, p_n]$, y $[p_n, p_1]$, la denominamos curva poligonal cerrada. Si cada segmento interseca exactamente a otros dos segmentos, intersecando a cada uno de ellos únicamente en su extremo, entonces decimos que la curva es simple.
> Dos nudos se consideran *equivalentes* si pueden transformar uno en otro mediante una deformación continua. En consecuencia, un nudo N_1 se considera una deformación elemental de otro nudo N_2 si uno de los dos queda determinado por una secuencia de puntos $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, y el otro queda determinado por la secuencia $(p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n)$, donde:
> a. p_0 es un punto no colineal con p_1 y p_n
> b. El triángulo cuyos vértices son $(p_0, p_1,\ p_n)$, interseca el nudo constituido por $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ tan solo en el segmento $[p_1, p_n]$. Por tanto, los nudos N_1 y N_2 son equivalentes si hay una secuencia de nudos $N = N_0, N_1, \cdots, N_n = N_2$, donde cada $N(i+1)$ es una deformación elemental de N_i para $i > 0$.
> Un *enlace*, consiste en la inserción de un número finito de circunferencias en el espacio (TROTTER, 1963, p. 279).

Formalización que permitió evidenciar, en los estudiantes, avance en el tipo de pensamiento empleado. Aquí, se percibió pensamiento analítico, dado que los estudiantes razonaron sobre la construcción del modelo matemático más que sobre la realidad. Situación que les permitió deducir que un nudo puede concebirse como un enlace con una sola componente; que dos diagramas representan enlaces equivalentes si, y solo si, se puede pasar de uno a otro mediante la aplicación de un número finito de movimientos de Reidemeister.

Esta modelización con cuerdas y desde las creaciones por ellos elaboradas, facilitó la matematización de la existencia del grupo fundamental; fue posible considerar los invariantes como cantidades cuyo valor es el mismo para todos los posibles diagramas representantes de la misma clase de equivalencia. Los resultados permitieron que los estudiantes reconocieran que no es sencillo elaborar un nudo con una cuerda, partiendo del diagrama construido por otra persona, cuando este diagrama no tiene ciertas características, tal es el caso del estudiante que entorchó dos de sus cuerdas (N_5, figura 5), pensando que su compañero lo había hecho para hacer el nudo. Paso del pensamiento visual al analítico.

Los análisis en plenaria permitieron formalizar una *isotopía* como una deformación del espacio X a través del tiempo que no altera la topología de X, se denominó: *isotopía ambiente* usada para construir relaciones de equivalencias. Ej., dos nudos N_1 y N_2 del espacio bidimensional son equivalentes si podemos deformar uno en otro a través de un camino de homeomorfismos; empezar con N_1 y terminar con N_2. Se presentaron los diagramas de los nudos trébol, de Saboya, y de Kimoshita-Yorosaka, primera parte tabla 2; para determinar un *enlace*, formalizado como: un enlace L de n componentes es un encaje de n de circunferencias disjuntas en el espacio. Notado como: $l\colon \coprod_{i=1}^{n} S^1 \to \mathbb{R}^3$ o S^3, L: $l(\coprod_{i=1}^{n} S^1)$. Donde los estudiantes concluyeron: 1) un nudo es un enlace con una sola componente. 2) dos enlaces son

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

equivalentes si existe una isotopía entre ellos. Entendido como aquella situación que presenta varias cuerdas cerradas que pueden estar anudadas y, a la vez, acopladas unos con otras. Destacamos la formalización alcanzada por el grupo para formalizar que esta relación de equivalencia se trasladó a los diagramas por uno de los resultados de Reidemester: "Dos diagramas representan enlaces equivalentes si y solo si se puede pasar de uno a otro o un numero finito de trasformaciones de tipo I, II y III" (LIVINGSTON, 1993, p. 30), ilustramos esta situación usando dos enlaces conocidos: de Whitehead y de Borromeo, mostrados en el Cuadro 2.

A pesar de los avances alcanzados en esta modelación, se muestra en la Figura 6 la producción de dos subgrupos para el nudo de Saboya.


6a. Producción subgrupo 1


6b. Producción subgrupo 4

Figura 6 - Enlaces construidos
Fuente: producción de la muestra

De estas construcciones se observa que los estudiantes del grupo 1 atan la cuerda con el soporte que se nota en la parte inferior (Figura 6a) que, a su vez, utilizan para indicar la orientación del nudo y determinar invariantes del grupo fundamental, mientras que los del subgrupo 4 hacen el nudo, pero no atan las puntas de la cuerda. Lo que permite inferir que los estudiantes del grupo 4 tienen un tipo de pensamiento integrado donde prevalece el visual, dado que reconocen y replican el nudo, de forma incompleta, pues olvidan atar las puntas para que, topológicamente, sea reconocido como nudo. A lo que el grupo general reacciona indicándoles que su trabajo ha quedado incompleto, porque una de las características para que sea un nudo, es que las puntas sean atadas. Aquí, es importante considerar que, si queremos usar esta forma de modelar nudos, los estudiantes necesitan hacer abstracción del conjunto de puntos, determinar cuándo dos conjuntos son equivalentes, esto es, que representen *el mismo* nudo.

De estas producciones se infiere que los estudiantes olvidan que lo que deben hacer es una relación de equivalencia para indicar que los elementos contemplados en el nudo compartan las mismas características con otra construcción de nudo que sea similar; lo que les permitirá construir enlaces, a partir de funciones bien definidas, para luego ser digitadas en el *software*. La dificultad identificada se relaciona con la necesidad de encontrar ecuaciones que determinen un nudo particular, manifestado en incapacidad para determinar una función bien definida que determine la construcción del nudo; por consiguiente, les fue más difícil poderla trascribir en el *software*. Lo que se destaca en el proceso de modelización adelantado, es que se promovió el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

desarrollo de la teoría; es decir, lograr que los contenidos fundamentales fueran aprendidos desde el trabajo realizado por ellos mismos, modelando situaciones reales, (construyendo nudos), esto se logró sin perder aspectos importantes de la epistemología de los conceptos.

Con relación a construir enlaces, a partir de funciones bien definidas, digitadas en el *software* encontramos que, para los estudiantes, las ecuaciones por sí mismas tienen una dificultad mayor, por ejemplo, si se les da la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ para algunos, les cuesta identificar que corresponde a la superficie de una esfera, de centro $(0,0,0)$ y radio 2, lo que condujo a considerar la necesidad de limitar el tipo de ecuaciones a usar.

De ahí que, como docentes debemos considerar que la situación que estamos modelando, en definitiva, es un círculo que se *enredó*, permitiéndoles ver que lo mejor es tener en cuenta esta información y usar la teoría de funciones como herramienta adecuada. Otra dificultad, aquí observada, fue la escasa capacidad de recordar, relacionar y aplicar conceptos previos estudiados en semestres anteriores, ej., parametrización de curvas mediante un sistema de ecuaciones bien definidas. Lo que limitó poder rrelacionar las nociones de compacidad y conexidad en la estructura de una superficie con los invariantes del grupo fundamental.

4.2.2 Ejercicios de investigación

El proceso de modelización adelantado mostró bondades para promover el desarrollo teórico de conceptos propios de topología, de una manera más accesible al estudiante. Siguiendo una estructura de investigación como la planteada en Mateus-Nieves y Font (2021), considerando las imprecisiones en las construcciones elaboradas por los estudiantes, se ofrecieron referencias bibliográficas para profundizar en el tema, entre ellas algunas que relacionan objetos matemáticos que tienen similaridades con los nudos y enlaces: trenzas, grafos, nudos combinatorios y nudos virtuales; con el interés que los estudiantes vieran y relacionaran estos objetos como construcciones conexas, pero que no necesariamente son compactas. A pesar de ello, el avance no fue significativo en la muestra.

Como se mencionó anteriormente, se enfocó la atención en los invariantes desde dos perspectivas: investigación teórica y uso de *software*, que permitió a los estudiantes diagramar y visualizar en el *software* el nudo o enlace correspondiente. Se usó *Python* para recrear nudos en el computador; trabajo que no pudo avanzar por las dificultades presentadas por la muestra para construir funciones bien definidas que representaran la construcción del nudo. Por ello se enfatizó, que los invariantes pueden ser de distinta naturaleza; aquí, por cuestión de espacio, se menciona solo uno, ej., en la Figura 7 se muestra el número de componentes de un enlace cuyo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

invariante numérico es 1.

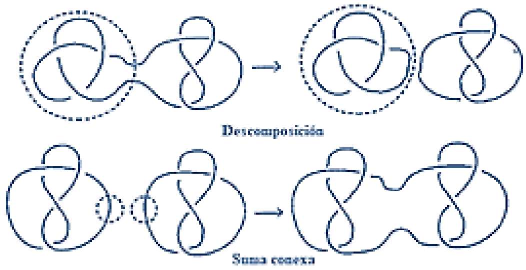


Figura 7 - Número de componentes de un enlace
Fuente: adaptación propia

El estudiante debía determinar el número de cruces de un nudo o de un enlace, la Figura 8 muestra a producción entregada por el subgrupo 3.

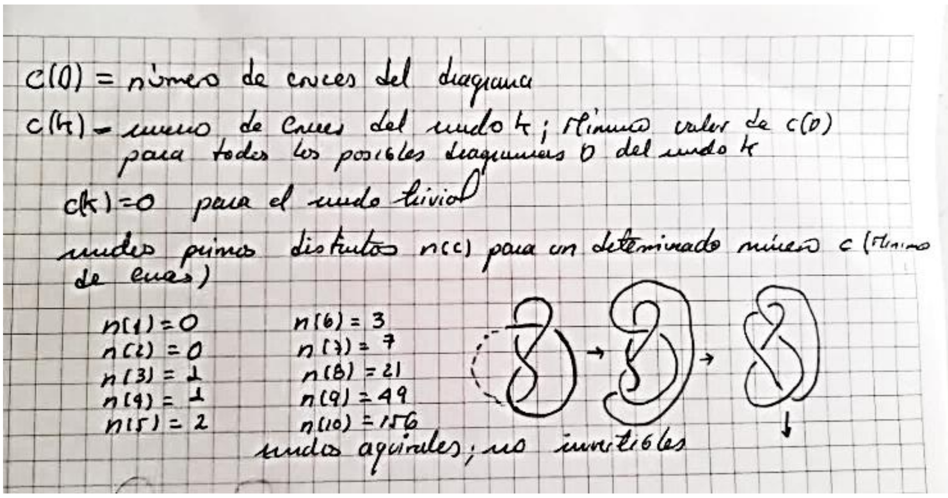


Figura 8 - Trabajo subgrupo 3
Fuente: producción grupo 3 de la muestra

En esta producción de los estudiantes se evidencia construcción teórica, relacionan el diagrama regular con la construcción tridimensional, se evidencia apropiación del modelo creado, lo que les permite concretar la construcción del diagrama, el número de cruces y el sentido del nudo. Sin embargo, en la construcción presentada, no se distingue entre el nudo y su imagen en el espejo. Tampoco se percibe que reconozcan que la imagen en el espejo se obtiene cambiando en cada cruce de un diagrama del nudo los pasos superiores por pasos inferiores y viceversa, esto debido a que no es posible determinar cómo calcularon el número reportado, pues no presentaron el paso a paso del ejercicio.

Lo que permite inferir lo difícil que les resulta identificar y relacionar los invariantes que conforman el grupo fundamental del nudo. Se deduce un trabajo con procesos de tipo mecanicista. Al parecer los estudiantes no recuerdan que, algunas veces, un nudo puede ser equivalente a su imagen en el espejo (nudos antiquirales). Lo que sí reconoció el subgrupo 3 fue que el único nudo de cuatro cruces, llamado *ocho* o *nudo de Saboya*, mostrado en la Figura

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

6a., es un nudo antiquiral. Reconocieron que el nudo de tres cruces, conocido como *nudo trébol*, no es antiquiral y, por ende, es invertible y equivalente. Estos estudiantes alcanzan la etapa de validación, lo que permite evidenciar que, a pesar de la modelización elaborada, este invariante no es sencillo de calcular, contrario a determinar la invertibilidad, dificultando así encontrar la equivalencia entre mudos.

El enfoque de este tipo de modelización tuvo un carácter didáctico, dado que posibilita aprovechar la teoría de nudos para proponer problemas que puedan afrontar estudiantes que no cuenten con bases matemáticas avanzadas sólidas, dado que, a medida que se progresa en el tema se requieren herramientas matemáticas que demandan una mejor formación, lo que es factible de reforzar con ejercicios de investigación.

Para finalizar la actividad de modelación, fue necesario formalizar cómo se construye el grupo, se hizo de la siguiente forma: fijamos un punto base x_0 arbitrario en el complemento de un nudo, trazamos los caminos[9] cerrados basados en x_0 que cruzan el espacio. Matematizamos una relación de equivalencia entre dos lazos L y L', si se puede deformar uno en el otro de manera continua (expresado como la existencia de una homotopía que deja fijos inicio y final y va recorriendo parametrizada, de 0 a 1, una familia de lazos L_t tales que para $t = 0,\ L_0$ es L, y $L_1 = L'$ generando el grupo fundamental de un espacio.

Esta construcción sirvió para asociar un objeto algebraico (fácil de manipular) a un objeto topológico (difícil de controlar), lo que nos permitió el grupo fundamental para diferenciar nudos. Aquí, fue importante mostrar a los estudiantes parte del trabajo de Wirtinger quien probó que el grupo del nudo está determinado por los arcos $a_1, \cdots, a_n$ y las relaciones $r_1, \cdots, r_m$, y el teorema de van Kampen, que permite calcular el grupo fundamental de un espacio si se descompone adecuadamente en espacios más sencillos de los que se conozca su grupo fundamental.

---

[9] Un camino es una función continua definida en $I = [0,1]$ en un espacio topológico X. Si $\alpha, \beta: [0,1] \to X,$ son caminos equivalentes, si existe una homotopía F entre α y β, relativa a los extremos:

i. La operación $[\alpha] \cdot [\beta]$ no depende del representante de la clase, es decir, si $\alpha \cong \alpha'$ y $\beta \cong \beta'$ entonces $[\alpha] \cdot [\beta] \equiv [\alpha'] \cdot [\beta']$. Por tanto $\cdot$ esta bien definida

ii. La composición de dos clases de caminos basados en x_0 es otra clase de caminos basados en x_0, es decir, el conjunto cerrado bajo la composición.

iii. Dadas tres clases $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ se cumple que $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] \equiv [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$. Esto es, la composición es asociativa.

iv. Dado $e: I \to X$ tal que $e(t) = x_0$, para todo $t \in I$, al operar el camino e con cualquier otro obtenemos un camino equivalente a este último, es decir, la clase $[e]$ es el elemento neutro del conjunto.

v. Para toda clase $[\alpha]$ podemos definir en el conjunto una clase $[\alpha]^{-1} \equiv [\alpha^{-1}]$, con α^{-1} un camino que hace el mismo recorrido de α, en sentido contrario, tal que $[\alpha] \cdot [\alpha]^{-1} \equiv [\alpha]^{-1} \cdot [\alpha] \equiv [e]$.

Con estas cinco propiedades, el conjunto adquiere estructura de grupo De homotopía del complemento del nudo, o grupo del nudo denotado $\Pi_1(S^3 - N)$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

5 Conclusiones

La modelización matemática adelantada permitió evidenciar que favorece el aprendizaje de los estudiantes, especialmente en las primeras transiciones del ciclo de modelización propuestas por Blum y Leiß (2007): construcción, simplificación y matematización, lamentablemente por deficiencias en manejo de preconceptos de cálculo (función a trozos, funciones bien definidas, entre otros), y conceptos propios de topología, con el grupo de estudiantes no fue posible avanzar y analizar de manera explícita la transición 2 donde se contemplan las cuatro siguientes transiciones del ciclo y medir su impacto; trabajo pendiente por desarrollar. Por otro lado, se observó que el aprendizaje colaborativo favorece la construcción del aprendizaje de los estudiantes, generando actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas. Se fortalece, así, el aprendizaje activo ya que los protagonistas del aprendizaje, en todo momento al desarrollar las actividades, con modelación, son los alumnos.

La experiencia permitió justificar lo difícil que es para un estudiante identificar el grupo fundamental de un nudo. Por ello, se considera importante relacionar al estudiante con el uso de lenguaje claro, institucionalizado y propio de la topología, por ej., homeomorfismo, isomorfismo, homomorfismo, invariante, grupo, lazo, homotopía; les cuesta asociar a qué se refieren cada uno, lo que impide entender el papel que juega cada concepto y el tipo de problemas que se pueden resolver. Indispensable la habilidad y conocimiento del profesor para disponer de métodos que permitan al estudiante distinguir nudos que no sean equivalentes.

Los invariantes que conforman el grupo del nudo son elementos que requieren mayor trabajo con los estudiantes, dado que dichas trasformaciones no son perfectas y sólo sirven cuando queremos ver si dos nudos son o no equivalentes, lo cual sucede cuando el mismo invariante resulta diferente cuando es aplicado a dos diagramas, si es igual no se puede concluir nada, pues no existen dos nudos primos distintos con grupos isomorfos, pero sí con el mismo número mínimo de cruces; por ejemplo, si los nudos no son primos no podemos afirmarlo; el nudo de Granny y el de Reef tienen grupos isomorfos siendo nudos no equivalentes. Para probar esa no equivalencia es necesario usar el polinomio de Joues (otro invariante no considerado en este trabajo), y que es diferente en estos dos nudos. Aquí, se destaca la importancia del conocimiento del tema y la destreza del profesor para enseñarlo.

Los resultados encontrados permiten inferir que la muestra observada alcanzó acercamiento al tipo de pensamiento analítico, al comprender que el grupo fundamental puede ser usado para determinar los *huecos* de una superficie, (compacidad, conexidad y sus diferencias), útiles como invariantes por homomorfismos, tema a profundizar detalladamente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

por la complejidad epistémica del mismo. Es importante resaltar a los estudiantes que la teoría de nudos se encarga de encontrar diferencias y similitudes en trayectorias tridimensionales cerradas, elementos de la estructura de una superficie.

La dificultad reconocida estuvo en la escasa comprensión de los estudiantes para determinar cómo relacionar la modelización del nudo y su manipulación, con la construcción de una superficie. Reiteramos, la solución dependerá de cuanta matemática sabe el estudiante que está resolviendo el problema, si conoce muchas técnicas matemáticas, tendrá múltiples opciones.

5.1 Recomendaciones

Se hace fundamental ayudar a los alumnos a relacionar espacios métricos con la topología, porque les cuesta identificar que un subconjunto A de un espacio métrico E es conexo, cuando A es un espacio métrico conexo con la distancia inducida por la de E. La dificultad está en usar subconjuntos abiertos de A, que no tienen por qué ser abiertos de E. Olvidan que por el teorema del valor intermedio, todo intervalo es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, puesto que verifica que los subconjuntos abiertos de A no tienen por qué serlo en E. Recíprocamente, si A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, como la inclusión $I: A \to \mathbb{R}$, definida por $I(x) = x, \ \forall\, x \in A$ es continua, se deduce que $I(A) = A$ es un intervalo, que es una caracterización topológica de los intervalos. Lo que permite inferir que un espacio métrico E es conexo cuando cualesquiera dos puntos de E están conectados, en el sentido que existe un subconjunto conexo de E que los contiene.

Es necesario reforzar al estudiante que podemos conectar dos puntos en un espacio normado, usando el segmento que los une. Reforzarles que, en topología, un espacio compacto es un espacio que tiene propiedades similares a las de un conjunto finito, en cuanto a que las sucesiones contenidas en un conjunto finito siempre contienen una subsucesión convergente, por lo que la noción de compacidad, se convierte en una versión más general de esta propiedad.

La implementación de herramientas tecnológicas y su apropiado uso se convierte en una estrategia metodológica que permite a los estudiantes identificar características esenciales relacionadas con la estructura, forma y geometría de una superficie. Sin embargo, se encontró en los jóvenes escaso conocimiento en manejo de *software* especializado, lo que hace que se pierda o se reduzca la información propia del objeto mismo, constituyéndose en una limitante en las aplicaciones en las que se podría requerir el uso apropiado de la tecnología. Lo que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a07

implica necesidad de capacitación por parte del docente en conocimiento, uso y manejo adecuado de *software* especializado, para que lo trasmita a sus estudiantes.

Resultado que potencia la importancia de trabajos como este, centrado en temas que poco han sido trabajados y que pueden ofrecer, a los profesores en ejercicio, estrategias didáctico metodológicas que busquen trasformar las prácticas de enseñanza-aprendizaje distintas a las comúnmente aplicadas de corte formal mecanicista que poco aportan al desarrollo de competencias matemática en los estudiantes.

Contribución del autor. El autor declara la realización, creación y desarrollo del proyecto de investigación, así como la organización de resultados y del presente manuscrito.

Declaración de disponibilidad de datos. Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor, previa solicitud razonable.

Declaración de financiación. El desarrollo de este trabajo de investigación se realizó con recursos propios, sin financiación de ninguna entidad.

Consentimiento. El autor recogió datos no identificativos de los participantes. Los datos se mantuvieron seguros para evitar su exposición

Referencias

BLUM, W.; BORROMEO-FERRI, R. Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Hamburg, v. 1, n. 1, p. 45-58. 2009.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students' and teachers deal with modelling problems? *En*: HAINES, C. *et al*. (ed.). **Mathematical Modelling**: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 2007. p. 222-231.

KAUFFMAN, L. **Knots and Physics**. Chicago. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA, 1991.

LIVINGSTON, C. Knot Theory. **The Mathematical association of America**, Washington. 1993.

MATEUS-NIEVES, E. Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. **Bolema:** Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 559-585. 2016.

MATEUS-NIEVES, E. **La fórmula integral de Cauchy**. Ponencia línea de investigación Doctorado en Educación, Bogotá, D. C., DOI: 10.13140/rg.2.2.23635.81440. oct., 2020a.

MATEUS-NIEVES, E.; Font, V. Epistemic Complexity of the Mathematical Object “Integral”. **Mathematics,** Switzerland, 2021, 9, 2453. https:// doi.org/10.3390/math9192453

MATEUS-NIEVES, E.; HERNÁNDEZ, W. Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN**, 2020b. Available from: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/172.

MATEUS-NIEVES, E.; ROJAS. C., Mathematical Generalization from the Articulation of Advanced Mathematical Thinking and Knot Theory. ISSN2178-7727. **Acta Scientiae.** (Canoas), 22(3), 65-81, 2020c. DOI:10.17648/acta.scientiae.5667.

MUNKRES, J. **Topología**. 2. ed. Madrid: Pearson educación, 2000.
MURASUGI, K. **Knot Theory and its Applications**. Birkhauser, Boston, 1996

TROTTER, H. Existen nudos no invertibles, **Topología**: Pergamon Press, Princeton New Jersey, v. 2, p. 275-280, 1963.

Submetido em 26 de Setembro de 2021.
Aprovado em 01 de Março de 2022.