
ARTÍCULO

Trayectoria de Aprendizaje para el Desarrollo del Razonamiento (Co)variacional en el Llenado de Recipientes: el Caso de Luis

Learning Trajectory for the Development of (Co)variational Reasoning in Bottles Filling: The Case of Luis

Aline Lizbeth Vargas-Ramos*

 ORCID iD 0000-0003-1426-9142

Gustavo Martínez-Sierra**

 ORCID iD 0000-0002-2462-7401

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo indagar cómo promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de un posgrado en Matemática Educativa. Para alcanzar tal objetivo realizamos una investigación de diseño de aula acerca del llenado de recipientes y diseñamos una trayectoria de aprendizaje hipotética cuya meta es promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional de las variables altura y volumen a través de la medición con reglas y jeringas. Nuestros resultados muestran que la trayectoria de aprendizaje real de uno de los participantes (Luis) confirma nuestra hipótesis de aprendizaje de que la experiencia física del llenado de recipientes y la medición con instrumentos (regla en centímetros para longitud y jeringa en mililitros para volumen) favorece el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional a un nivel continuo fragmentado.

Palabras clave: Razonamiento Variacional y Covariacional. Investigación de Diseño de Aula. Trayectoria de Aprendizaje Hipotética y Real.

Abstract

This research aims to investigate how to promote the development of variational and covariational reasoning in students of a graduate program in Educational Mathematics. To achieve this objective, we conducted classroom design studies on container filling and designed a hypothetical learning trajectory whose goal is to promote the development of variational and covariational reasoning of the variables height and volume through measurement with rulers and syringes. Our results show that the real learning trajectory of one of the participants (Luis) confirms our learning hypothesis that the physical experience of filling containers and measuring with instruments (ruler in centimeters for length and syringe in milliliters for volume) promotes the development of variational and covariational reasoning at a continuous fragmented level.

* Maestra en Ciencias Área: Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Estudiante del doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la UAGro, Chilpancingo, Guerrero, México. E-mail: 13470031@uagro.mx.

** Doctor en Ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN). Profesor-Investigador de la UAGro, Chilpancingo, Guerrero, México. E-mail: gmartínezsierra@gmail.com.

Keywords: Variational and covariational reasoning. Classroom design studies. Hypothetical and real learning trajectory.

1 Introducción

El aprendizaje del concepto de función es fundamental para el entendimiento del Cálculo, de las Matemáticas, de áreas relacionadas con las ciencias (Oehrtman; Carlson; Thompson, 2008) y de conceptos en Matemáticas avanzadas, tales como la razón de cambio (Johnson, 2012, 2013). Dada esta importancia del aprendizaje del concepto de función, en Matemática Educativa la investigación acerca del aprendizaje del concepto se encuentra vigente. Algunos investigadores sugieren modificar en el pensamiento de los estudiantes las ideas de que las funciones son definidas por fórmulas algebraicas y que representan algo estático, para concebirlas como algo dinámico (Oehrtman; Carlson; Thompson, 2008).

En este sentido, Thompson y Carlson (2017, p. 444) proponen el aprendizaje de la función desde un significado covariacional que es “una concepción de dos cantidades que varían simultáneamente de manera que existe una relación invariante entre sus valores que tiene la propiedad de que, en la concepción de la persona, cada valor de una cantidad determina exactamente un valor de la otra”. El significado covariacional de función se fundamenta en el razonamiento covariacional, el cual se define como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson *et al.*, 2002, p.354).

La revisión de la literatura que presentamos en la siguiente sección muestra que:

- El desarrollo del razonamiento covariacional continuo implica el aprendizaje del significado covariacional de función.
- Las tareas diseñadas con situaciones dinámicas promueven el desarrollo del razonamiento covariacional. En particular, la literatura muestra que la situación dinámica del llenado de recipientes favorece el desarrollo del razonamiento covariacional.
- Diseñar secuencias de tareas de situaciones dinámicas en el marco de una trayectoria de aprendizaje hipotética promueve el desarrollo del razonamiento covariacional.
- Las investigaciones sobre desarrollo de razonamiento covariacional y el uso de instrumentos de medición son un área potencial para promover el

entendimiento dinámico de las funciones. Identificamos que la experimentación con materiales físicos no se ha explorado en conjunto con el uso de instrumentos de medición en el diseño de tareas.

Debido a lo anterior, para contribuir a la literatura de investigación pertinente, esta investigación tiene el objetivo de indagar cómo promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de posgrado. Para alcanzar tal objetivo realizamos una investigación de diseño de aula (Cobb; Jackson; Dunlap, 2017) acerca del llenado de recipientes con materiales físicos y diseñamos una trayectoria de aprendizaje hipotética (Simon, 1995, 2020) cuya meta es promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional de las variables altura y volumen a través de la medición con reglas y jeringas.

2 Revisión de literatura

2.1 Razonamiento covariacional y el concepto de función

En las últimas décadas se ha mostrado que es posible promover el entendimiento de diversos conceptos matemáticos mediante el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional (Carlson *et al.*, 2002; Thompson; Carlson, 2017); su desarrollo se ha considerado una base para el entendimiento del concepto de función (Carlson *et al.*, 2002), funciones cuadráticas (Villa-Ochoa, 2012; Paoletti; Vishnubhotla, 2022), funciones exponenciales (Ellis *et al.*, 2016; Ferrari-Escolá; Martínez-Sierra; Méndez-Guevara, 2016), funciones trigonométricas (Liang; Moore, 2020; Johnson; Mcclintock; Hornbein, 2017; Stevens *et al.*, 2017), derivada (Mkhatshwa, 2023) y razón de cambio (Johnson, 2012).

En el concepto de función, el desarrollo del razonamiento covariacional permite a los estudiantes construir habilidades para interpretar y representar información de manera gráfica (Carlson *et al.*, 2002), dado que al razonar covariacionalmente sobre una función continua los estudiantes deben razonar sobre la cantidad, sobre la continuidad y sobre el cambio (Castillo-Garsow, 2012). Lo anterior, les permite explorar relaciones dinámicas de variables presentes en alguna función, por ejemplo, explorar cómo varía la velocidad con el tiempo o cómo varía la altura con el volumen del agua en el llenado de una botella (Thompson; Carlson, 2017).

En la literatura se han reportado dificultades en el aprendizaje del concepto de función. Por ejemplo, Carlson *et al.* (2002) reporta que estudiantes sobresalientes de un curso de cálculo de segundo semestre, tuvieron dificultades para imaginar a la variable independiente cambiando de manera continua en una función, al responder ítems de la modelación de eventos dinámicos

En el mismo sentido, Oehrtman; Carlson; Thompson, (2008, p.27) reportan que “el aprendizaje del concepto de función es complejo, y que muchos estudiantes universitarios de alto rendimiento poseen un entendimiento deficiente de las funciones”. También, se ha reportado que estudiantes de secundaria y bachillerato tienen dificultades para relacionar una gráfica cartesiana con una relación funcional subyacente, dado que no imaginan la trayectoria de un punto que se mueve en el plano según la covariación de dos cantidades, una dependiente de la otra, por lo que ven una gráfica cartesiana de una función como un objeto, una imagen estática de una situación física (Antonini; Lisarelli, 2021).

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017) las ideas de variación y covariación continua son epistemológicamente necesarias para que estudiantes y profesores desarrollen concepciones útiles y sólidas de las funciones. En ese sentido, en el marco del razonamiento variacional y covariacional que se conforma por niveles de sofisticación, el desarrollo de los niveles de razonamiento variacional y covariacional en los niveles continuo fragmentado y continuo suave, que son los más sofisticados, implican el aprendizaje del significado de función según la perspectiva covariacional.

Para el desarrollo de razonamiento variacional y covariacional, consideramos el uso de instrumentos de medición, ya que en el marco de razonamiento variacional y covariacional se considera que para construir la *variable* se requiere construir la *cantidad* (Thompson; Carlson, 2017), que significa “una cualidad de algo que uno ha concebido que admite algún proceso de medición” (Thompson, 1990).

En la literatura se ha reportado que la modelación de situaciones dinámicas favorece el desarrollo del razonamiento covariacional (Carlson *et al.*, 2002); se reportan actividades y tareas que muestran que modelar situaciones dinámicas es un escenario potencial para promover el desarrollo del razonamiento covariacional y el análisis de la covariación de cantidades (Carlson; Larsen; Lesh, 2003).

En esta investigación, retomamos que el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional continuo fragmentado y/o continuo suave implica el aprendizaje del significado covariacional de función, por lo que, buscamos desarrollar en los participantes del estudio, su razonamiento variacional y covariacional en los niveles más sofisticados, y en consecuencia, promover el aprendizaje del significado covariacional de función.

2.2 Diseño de tareas con situaciones dinámicas para promover el desarrollo del razonamiento covariacional

Dado que la investigación muestra que la modelación de situaciones dinámicas promueve el desarrollo del razonamiento covariacional y el aprendizaje de las funciones (Carlson *et al.*, 2002), en esta sección hacemos una síntesis de diversas investigaciones que indagan sobre cómo promover el desarrollo del razonamiento covariacional y que toman en cuenta diferentes situaciones dinámicas para el diseño de tareas.

Hay tareas diseñadas para el desarrollo de razonamiento covariacional de diferentes funciones sinusoidales y cosenoidales, en las que se ha utilizado la situación dinámica del movimiento circular (Moore, 2014; Johnson, 2013; Johnson, 2016 Johnson; Mcclintock; Hornbein, 2017; Stevens *et al.*, 2017; Liang; Moore, 2020); logarítmica y exponencial, en las que se han utilizado diferentes situaciones dinámicas (Ellis *et al.*, 2015; Trejo-Martínez; Ferrari-Escolá; Martínez-Sierra, 2021); lineales y cuadráticas, en las que se han utilizado situaciones dinámicas con geometría dinámica (Fonger; Ellis; Dogan, 2020; Paoletti; Vishnubhotla, 2022; Villa-Ochoa, 2012).

También, en algunas investigaciones se han diseñado tareas para el desarrollo del razonamiento covariacional, con simulaciones digitales de fenómenos naturales (Basu; Panorkou, 2019; González, 2021; Panorkou; Germia, 2020), por ejemplo, el fenómeno del efecto invernadero (Basu; Panorkou, 2019).

Además, se han reportado tareas diseñadas para el desarrollo del razonamiento covariacional con situaciones dinámicas específicas, como el movimiento de un auto y el lanzamiento de un hombre en un cañón (Johnson; Mcclintock; Gardner, 2020).

Una situación dinámica típica en el diseño de tareas para el desarrollo de razonamiento covariacional es la situación del llenado de recipientes. Con la situación de llenado de recipientes se ha investigado sobre el razonamiento covariacional de estudiantes de secundaria, bachillerato, universidad, posgrado y en futuros profesores (Carlson *et al.*, 2002; Castañeda-Ovalle; García-Rodríguez, 2023; Johnson, 2013; Johnson; Mcclintock; Hornbein, 2017; Stalvey; Vidakovic, 2015).

Referente al llenado de recipientes, en Carlson *et al.* (2002) la situación es imaginar que una botella está llenándose de agua para que los participantes de la investigación dibujaran el bosquejo de la gráfica de la altura en función de la cantidad de agua que hay en la botella. En Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez (2023) la situación es una simulación digital del llenado de un cilindro en posición vertical y la simulación digital de un cilindro en posición horizontal que cambiaba su longitud y su radio. En el cilindro en posición vertical, los participantes podían manipular el tiempo de llenado del recipiente y en el cilindro en posición horizontal los participantes podían manipular la altura, la longitud y el radio. En Johnson (2013) la situación

es una simulación digital que vincula: (1) una representación de una botella que se llena y una gráfica que relaciona el volumen con la altura del líquido en la botella, y (2) una gráfica que relaciona el volumen con la altura de un recipiente que se desconoce su forma. En Stalvey y Vidakovic (2015) la situación es el dibujo de dos neveras de la misma forma y tamaño que están llenas de agua y se vacían a diferentes velocidades constantes. Y finalmente, en Johnson; Mcclintock; Hornbein (2017) la situación es un video de la animación del llenado de dos botellas con diferentes formas.

En nuestro caso, para promover el desarrollo del razonamiento (co)variacional, de la revisión de literatura retomamos que la modelación de situaciones dinámicas favorece el desarrollo del razonamiento covariacional, y también, retomamos la situación dinámica típica del llenado de recipientes para el diseño de tareas. La contribución que hacemos en esta investigación, es que a diferencia de imaginar la situación dinámica del llenado de recipientes, diseñamos tareas en las que los participantes usan materiales e instrumentos físicos que promueven la medición, y con ello, diseñamos una secuencia de tareas bajo el marco de una trayectoria de aprendizaje hipotética.

2.3 Diseño de tareas con situaciones dinámicas y trayectorias de aprendizaje hipotéticas

Identificamos investigaciones que utilizan situaciones dinámicas para el diseño de tareas en trayectorias de aprendizaje hipotéticas para favorecer el desarrollo del razonamiento covariacional (Ellis *et al.*, 2016; Fonger; Ellis; Dogan, 2020).

En Fonger, Ellis y Dogan (2020) presentaron una trayectoria de aprendizaje hipotética del crecimiento cuadrático con una secuencia de actividades de instrucción.

La implementación de la secuencia de actividades mostró la importancia del diseño instruccional para abordar dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática por parte de los participantes, dado que ellos mostraron un razonamiento cuantitativo, variacional y covariacional de las variables implicadas en el crecimiento cuadrático. Fonger et al. (2020) mostraron que la articulación de una secuencia de tareas con metas de aprendizaje que promuevan el desarrollo del razonamiento cuantitativo, variacional y covariacional, es un área potencial para el entendimiento de las funciones cuadráticas.

En Ellis *et al.*, (2016) presentaron los resultados del diseño de una trayectoria de aprendizaje hipotética del crecimiento exponencial con un conjunto de tareas y actividades para promover el entendimiento del crecimiento exponencial como una relación entre dos cantidades que covarían continuamente. En esa dirección, mostraron que una trayectoria de aprendizaje

hipotética les permitió caracterizar el entendimiento inicial y el desarrollo del razonamiento de los participantes sobre el crecimiento exponencial como resultado del diseño instruccional enfocado en la covariación continua de cantidades.

Algunas investigaciones proponen las trayectorias de aprendizaje hipotéticas como una herramienta para describir el razonamiento de los estudiantes, promover el aprendizaje de las funciones (Ellis *et al.*, 2016) y mostrar cómo el entendimiento de los estudiantes puede cambiar durante su interacción con tareas de instrucción cuidadosamente diseñadas (Ellis *et al.*, 2014). De acuerdo con Ellis *et al.* (2016), en el marco de una trayectoria de aprendizaje hipotética, durante el proceso de instrucción, la interacción y las acciones de los profesores influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Además, Cárcamo y Fuentealba (2023) sugieren que la construcción de una trayectoria de aprendizaje hipotética es una herramienta adecuada para iniciar la planificación de la enseñanza en matemática y fomentar el desarrollo conceptual de los estudiantes, dado que proporciona una forma de guiar el aprendizaje al incluir apoyos instructivos para construir conceptos matemáticos en estudiantes de primaria, secundaria y de nivel superior.

Debido a lo anterior, para contribuir a la literatura antes señalada, esta investigación tiene el objetivo de indagar cómo promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de posgrado. Para alcanzar tal objetivo realizamos una investigación de diseño de aula acerca del llenado de recipientes con materiales físicos y diseñamos una trayectoria de aprendizaje hipotética cuya meta es promover el desarrollo del razonamiento (co)variacional de las variables altura y volumen a través de la medición con reglas y jeringas.

En consecuencia, esta investigación está guiada por las siguientes preguntas de investigación:

PI1. ¿Qué trayectorias de aprendizaje real siguen los participantes en el experimento de diseño de aula? y la pregunta derivada,

PI2. ¿Qué niveles de razonamiento (co)variacional desarrollan los participantes en el experimento de diseño de aula?

En este escrito reportamos los resultados de uno de los cinco participantes de la investigación de diseño de aula, que nombramos por el seudónimo de Luis.

3 Marco teórico

Los referentes teóricos de la investigación son el razonamiento variacional y

covariacional (Thompson; Carlson, 2017) y la trayectoria de aprendizaje hipotética (Simon, 1995, 2020) y real (Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021; Leikin; Dinur, 2007).

3.1 Razonamiento variacional y covariacional

El razonamiento covariacional se define como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson *et al.*, 2002, p.354).

En nuestra investigación, el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional es fundamental para el aprendizaje de estudiantes en matemáticas y su desarrollo en niveles continuos implica el aprendizaje del significado covariacional de función (Thompson; Carlson, 2017). Para la descripción de los niveles de razonamiento variacional y covariacional nos basamos en los Cuadros 1, 2 y 3.

Niveles	Descripción	Código
Variable como símbolo	Una variable es un símbolo. No tiene nada que ver con la variación.	<i>RV0</i>
Sin variación	La persona imagina que una variable tiene un valor fijo. Podría tener un valor fijo diferente, pero eso sería simplemente imaginar otro escenario.	<i>RV1</i>
Variación discreta	La persona visualiza una variable tomando valores específicos. La persona ve que el valor de la variable cambia de a a b al tomar los valores $a_1, a_2, \dots, a_n$, pero no imagina que la variable tome ningún valor entre a_i y a_{i+1} .	<i>RV2</i>
Variación gruesa	La persona imagina que el valor de una variable aumenta o disminuye, pero piensa poco o nada que pueda tener valores mientras cambia.	<i>RV3</i>
Variación continua fragmentada	La persona piensa que la variación del valor de una variable cambia en intervalos de un tamaño fijo. Los intervalos pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente. La persona imagina, por ejemplo, que el valor de la variable varía de 0 a 1, de 1 a 2, de 2 a 3 a (y así sucesivamente), como colocar una regla. Los valores entre 0 y 1, entre 1 y 2, entre 2 y 3, etc. "vienen" en virtud de que cada uno es parte de un trozo, como los números de una regla, pero la persona no imagina que la cantidad tenga estos valores de la misma manera, tiene 0, 1, 2, etc. como valores. La variación continua gruesa no es solo pensar que los cambios ocurren en cantidades enteras. Pensar en el valor de una variable que va de 0 a 0,25, 0,25 a 0,5, 0,5 a 0,75, y así sucesivamente (mientras se piensa que los intervalos implicados "aparecen") es tanto pensar con variaciones continuas gruesas como pensar en aumentos de 0 a 1, 1 a 2, etc.	<i>RV4</i>
Variación continua suave	La persona piensa que la variación del valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) aumenta o disminuye (en adelante, cambia) por intervalos mientras anticipa que dentro de cada intervalo el valor de la variable varía suave y continuamente. La persona podría pensar en intervalos de variación del mismo tamaño, pero no necesariamente.	<i>RV5</i>

Cuadro 1 – Niveles de razonamiento variacional
Fuente: Thompson y Carlson (2017, p. 440)

Niveles	Descripción	Código
Sin coordinación	La persona no tiene imagen de variables que varían juntas. La persona se enfoca en una variación de una u otra variable sin coordinación de valores.	<i>RC0</i>
Precoordinación de valores	La persona visualiza los valores de dos variables que varían, pero de forma asíncrona: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la	<i>RC1</i>

Coordinación gruesa de valores	primera, y así sucesivamente. La persona forma una imagen general de valores de cantidades que varían entre sí, como "esta cantidad aumenta mientras que esa cantidad disminuye". La persona no prevé que los valores individuales de cantidades vayan juntos.	RC2
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable con los valores de otra variable, con la anticipación de crear una colección discreta de pares.	RC3
Covariación continua fragmentada	La persona prevé que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y prevén que ambas variables varíen con una variación continua fragmentada.	RC4
Covariación continua suave	La persona prevé aumentos o disminuciones en el valor de una cantidad o variable, como ocurre simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y prevé que ambas variables varíen de manera suave y continua.	RC5

Cuadro 2 – Niveles de razonamiento covariacional

Fuente: Thompson y Carlson (2017, p.441)

Para tener mayor claridad sobre los niveles de razonamiento covariacional, en el Cuadro 3 presentamos las descripciones de los niveles que presentan Thompson y Carlson (2017) para el problema de la botella, a los que asignamos los códigos RCB0, RCB1, RCB2, RCB3, RCB4 y RCB5; así como las descripciones de los niveles 4 y 5 que retomamos de Ellis et al. (2020), a las que le asignamos los códigos RCB4.1 y RCB5.1.

Niveles	Descripción	Código
Sin coordinación	Un estudiante reconoce que la parte superior del agua está subiendo en la botella, o que se está añadiendo más agua a la botella, pero no hace ningún intento de coordinar la altura del agua en la botella con la cantidad de agua añadida a la botella.	RCB0
Precoordinación de valores	Un estudiante observa que después de verter cierta cantidad de agua en la botella, el nivel del agua en la botella sube.	RCB1
Coordinación gruesa de valores	Un estudiante describe la covariación como "la altura aumenta a medida que aumenta el volumen".	RCB2
Coordinación de valores	Un estudiante se centra en la altura del agua en la botella y en el número de vasos de agua añadidos a la botella sin pensar en los valores intermedios de volumen o altura.	RCB3
Covariación continua fragmentada	Un estudiante imagina el aumento de volumen por cada incremento de agua agregada o viceversa, coordinando los cambios por intervalos, pero no de forma continua dentro de todos los intervalos.	RCB4
	Un estudiante imagina que el nivel del agua aumenta por cada incremento de agua. Imagina cambios completos, ya sea un cambio que se ha completado en el pasado o un cambio que el estudiante anticipa que se completará en el futuro; dado que el pensamiento fragmentado está en tiempo pasado, imaginando que el cambio ya sucedió y ahora se está analizando.	RCB4.1
Covariación continua suave	Un estudiante imaginara que tanto el volumen como la altura del agua varían suavemente a través de intervalos de forma simultánea, al tiempo que anticiparía que dentro de cada intervalo la cantidad de agua y la altura del agua varían suave y continuamente.	RCB5
	Un estudiante imagina que tanto el volumen como la altura tienen un valor en cada momento del tiempo transcurrido, incluso si hay eventos discretos, imagina que esto ocurre en el tiempo continuo; dado que el razonamiento continuo suave requiere razonar en términos de movimiento, lo que siempre implica imaginar "algo en movimiento".	RCB5.1

Cuadro 3 – Niveles de razonamiento covariacional para el problema de la botella

Fuente: elaboración propia basado en Thompson y Carlson (2017) y Ellis et al., (2020)

3.2 Trayectoria de aprendizaje hipotética y real

En esta investigación entenderemos como *Trayectoria de Aprendizaje Hipotética* (TAH) a un modelo hipotético de aprendizaje compuesto por: (1) una meta de aprendizaje para los estudiantes, (2) hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y (3) tareas matemáticas que se utilizan para promover el aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995, 2020; Simon; Tzur, 2004). Para Simon (2020), la definición de TAH tiene varias implicaciones. En esta investigación retomamos las siguientes:

1. Aunque los estudiantes aprenden de formas diversas, hay aspectos comunes en sus formas de aprender que pueden servir de base para la instrucción. Por lo tanto, se pueden hacer predicciones útiles sobre el aprendizaje de los estudiantes.
2. La planificación de la enseñanza implica una predicción de los posibles procesos de aprendizaje de los estudiantes.
3. Basándose en la predicción de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, se diseña la instrucción para fomentar el aprendizaje.

Referente a la última implicación, en esta investigación consideramos que las hipótesis del proceso de aprendizaje de los estudiantes y las tareas matemáticas de instrucción son interdependientes; dado que las tareas de instrucción se basan en procesos hipotéticos de aprendizaje y los procesos hipotéticos de aprendizaje dependen de las tareas de instrucción previstas (Simon, 2020; Simon; Tzur, 2004).

Dada su naturaleza hipotética una TAH no necesariamente es seguida por los estudiantes en un proceso de instrucción. Por tanto, a partir de una TAH puede surgir, en un proceso de instrucción, una o varias *Trayectorias de Aprendizaje Reales* (TAR) que pueden ser distintas de la trayectoria de aprendizaje hipotética (Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021). Las TAR son aquellas trayectorias de aprendizaje que los estudiantes siguieron en un *contexto real* de la implementación de un proceso de instrucción (Cárcamo; Fortuny; Fuentealba, 2021). Las TAR se infieren de los datos recopilados porque no es posible medir directamente el aprendizaje real de los estudiantes (Dierdorff *et al.*, 2011).

En esta investigación:

- La meta de aprendizaje de la TAH es el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional continuo fragmentado o suave de las variables altura y volumen (presentes en el llenado de un recipiente) en estudiantes de un posgrado de matemática educativa.
- La hipótesis del proceso de aprendizaje de la TAH es que el llenado físico de los recipientes y la toma de medidas de las variables con dos instrumentos de

medición (regla graduada en centímetros y jeringa graduada en mililitros) favorece que los estudiantes desarrollen su razonamiento variacional y covariacional.

Las tareas de instrucción son diseñadas para promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional y la construcción del modelo matemático de la situación.

4 Metodología

4.1 Investigación de diseño de aula

La metodología que utilizamos en esta investigación es el diseño de aula (Cobb; Jackson; Dunlap, 2017). Según Cobb, Jackson y Dunlap (2017) en una investigación de diseño de aula un equipo de investigación colabora con un profesor de Matemáticas (que puede ser un miembro del equipo de investigación), para asumir la responsabilidad de la instrucción con el fin de investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes en un dominio matemático particular. Bajo este enfoque metodológico consideramos adecuado el diseño de una trayectoria de aprendizaje hipotética, retomando los pasos reportados por Cárcamo y Fuentealba (2023) para su diseño, y describimos a continuación los componentes de la investigación de diseño de aula que involucró este estudio.

4.2 Documentación del razonamiento (co)variacional de partida y de llegada de la instrucción

Para conocer el razonamiento variacional y covariacional de partida de la instrucción en nuestra investigación de diseño de aula, diseñamos dos test; uno inicial para explorar el razonamiento covariacional de partida de los participantes (Figura 1) y otro final para explorar el razonamiento covariacional de llegada de los participantes (Figura 2). Ambos test son una adaptación del problema de la botella de Carlson *et al.* (2002); que fue diseñada con el objetivo de evaluar el razonamiento covariacional.

Imagine que la siguiente botella se está llenando de agua.
1. Bosqueje la gráfica del volumen de agua que hay en la botella en función de la altura alcanzada por el agua.
2. Bosqueje la gráfica de la altura de agua que hay en la botella en función del volumen alcanzada por el agua. Explique detalladamente cómo realizó los bosquejos.



Figura 1 – Test inicial
Fuente: elaboración propia (2024)

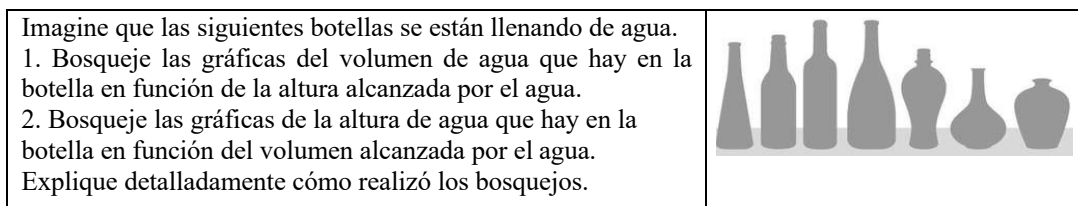


Figura 2 – Test final
Fuente: elaboración propia (2024)

4.3 Diseño de una trayectoria de aprendizaje hipotética

Diseñamos una trayectoria de aprendizaje hipotética que mostramos en el Cuadro 4.

Meta de aprendizaje: Que los participantes desarrollen su razonamiento covariacional de las variables altura y volumen (presentes en el llenado de un recipiente) a un nivel continuo fragmentado o continuo suave.		
Proceso de aprendizaje hipotético	Tareas	Hipótesis de aprendizaje de la tarea
1. Desarrollo del razonamiento variacional de la variable altura a un nivel continuo fragmentado o continuo suave.	Tarea 1. Tarea que introduce la unidad de medida del centímetro para la distancia en el problema del llenado de recipientes del Test inicial.	La utilización de una unidad de medida para distancia promueve en el estudiante el desarrollo de la variable altura y la variable volumen. Por tanto, también promueve el desarrollo de razonamiento covariacional de altura vs. volumen.
2. Desarrollo del razonamiento covariacional de altura y volumen a un nivel continuo fragmentado o continuo suave. Con la altura como variable independiente.		
3. Desarrollo del razonamiento variacional de la variable volumen a un nivel continuo fragmentado o continuo suave.	Tarea 2. Tarea que introduce el mililitro como unidad de medida para el volumen a través del uso de una jeringa en el problema del llenado de recipientes del Test inicial y la Tarea 1.	La experiencia física de llenar un recipiente, el uso del centímetro como unidad de medida de altura y la utilización de una unidad de medida para el volumen junto con un instrumento medición de volumen; promueve en el estudiante el desarrollo de la variable altura y la variable volumen. Por tanto, también promueve el desarrollo de razonamiento covariacional de altura vs. volumen.
4. Desarrollo del razonamiento covariacional de altura y volumen a un nivel continuo fragmentado o continuo suave. Con el volumen como variable independiente.		

Cuadro 4 – Trayectoria de aprendizaje hipotética
Fuente: elaboración propia (2024)

Para el diseño de nuestra trayectoria de aprendizaje hipotética, también diseñamos dos tareas instruccionales. La Tarea 1 (Figura 3) fue diseñada para promover el desarrollo de razonamiento variacional de la variable altura; al incluir una unidad de medida de longitud. La Tarea 2 (Figura 4) fue diseñada para promover el desarrollo de razonamiento variacional de la variable volumen al incluir el mililitro como unidad de medida de volumen a través de una jeringa. Ambas tareas fueron diseñadas con el objetivo de promover el desarrollo del razonamiento covariacional continuo fragmentado o continuo suave, para las variables altura vs. volumen y volumen vs altura.

Imagine que la siguiente botella se está llenando de agua.

1. Bosqueje la gráfica del volumen de agua que hay en la botella en función de la altura alcanzada por el agua y la gráfica de la altura de agua que hay en la botella en función del volumen alcanzado por el agua, guiado por los siguientes pasos.

1. Considere como unidad de medición el centímetro y la escala de la botella como muestra la siguiente figura. (Si esta hoja se imprime al 100% la unidad es el centímetro).

2. Con la escala anterior hacer cálculos aproximados para llenar las siguientes tablas de valores.

3. Con la mayor precisión posible grafica las tablas de valores en un papel milimétrico.

a) la gráfica del volumen de agua que hay en la botella en función de la altura alcanzada.

b) la gráfica de la altura del agua en función del volumen que hay en la botella. Suba un video o una liga de un video al Classroom para explicar con el mayor detalle posible lo que hizo en la actividad.



Altura (cm)	Volumen (cm ³)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
...	

Volumen (cm ³)	Altura (cm)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
...	

Figura 3 – Tarea 1
Fuente: elaboración propia (2024)

Consiga una jeringa de al menos 5 mililitros de capacidad. Consiga o construya una botella lo más parecida a la que se muestra a continuación. En lugares de venta de materiales de laboratorio se pueden conseguir como “matraz de bola de fondo redondo”.

Bosqueje la gráfica del volumen de agua que hay en la botella en función de la altura alcanzada y la gráfica de la altura del agua en función del volumen que hay en la botella, guiado por los siguientes pasos.

1. Considere como unidad de medida de longitud el *centímetro* y como unidad de medida de volumen el *mililitro* (que es igual a un volumen de 1 cm³).

2. Con las unidades anteriores llenar la botella y llenar las siguientes tablas de valores.

3. Con la mayor precisión posible grafica las tablas de valores anteriores en un papel milimétrico.

a) la gráfica del volumen de agua que hay en función de la altura alcanzada.

b) la gráfica de la altura del agua en función del volumen que hay en la botella. Suba un video o una liga de un video al Classroom para explicar detalladamente la actividad.



Altura (cm)	Volumen (cm ³)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
...	

Volumen (cm ³)	Altura (cm)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
...	

Figura 4 – Tarea 2
Fuente: elaboración propia (2024)

4.4 Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron 5 estudiantes (dos mujeres y tres hombres) del semestre uno de una Maestría en Ciencias de la Universidad Autónoma de Guerrero. La experimentación de nuestra investigación de diseño de aula, fue estructurada en cuatro sesiones de trabajo. En cada sesión, los participantes trabajaron con una tarea de instrucción. La aplicación del experimento fue llevada a cabo a través de reuniones de aproximadamente tres horas de duración en la plataforma virtual *Meet* de forma semanal. En cada sesión de trabajo participaron un profesor-investigador a cargo y tres testigos que intervenían en las sesiones si

lo consideraban necesario. En este escrito, reportamos los resultados de Luis, dado que participó en todas las sesiones de trabajo y la claridad de sus datos nos permitió mostrar el desarrollo de su razonamiento (co)variacional en el marco de una trayectoria de aprendizaje hipotética.

4.5 Recogida de datos y análisis retrospectivo

En cada sesión de trabajo del experimento de diseño recolectamos videograbaciones, las producciones escritas de la solución de las tareas y las transcripciones de las videograbaciones cuando el participante compartió sus resultados de las tareas.

Para el análisis, nos familiarizamos con los datos e identificamos la participación de Luis en cada videograbación y dividimos el análisis en fases.

En la primera fase, analizamos las verbalizaciones y comportamientos de Luis relacionados con su razonamiento variacional y covariacional en cada una de las tareas e identificamos sus niveles de razonamiento, utilizando la descripción de los niveles de razonamiento variacional (Cuadro 1) y covariacional (Cuadros 2 y 3).

Como ejemplo, en el Extracto 1 y la Figura 5 mostramos cómo identificamos el razonamiento (co)variacional de Luis, que razonó en el nivel de *variación continua fragmentada* la variable altura y la variable volumen, y el nivel de *covariación continua fragmentada* las variables volumen vs. altura durante la Tarea 2, con ayuda de los códigos RV4 (ver cuadro 1), RC4 (ver Cuadro 2) y RCB4.1 (ver cuadro 3).

P 1: Utilicé un papel que tenía medidas en centímetros y lo pegué a la pared para que estuviera recto, y así, observar cuál era el volumen de la botella en mililitros en altura 1, 2, 3, 4 y todos los centímetros siguientes hasta que se llenó el recipiente (código RV4 de la variable altura) (Figura 5a). Entonces, determiné los valores que se pueden observar en la tabla que está en amarillo (Figura 5b) (Explicación de Luis en la Tarea 2, 2024).

P 2: Hubo un momento en el que el comportamiento del volumen tomó una constante (código RV4 de la variable volumen). Fue creciendo constantemente a partir de 10 centímetros de altura (código RC4 de las variables volumen vs. altura). A partir de 10 centímetros, me di cuenta que fue cuando el líquido llegó a la parte cilíndrica de la botella, es decir, cada centímetro de altura creció 7 en cuanto a volumen, cada centímetro fue subiendo de 7 en 7 (código RCB4.1 de las variables volumen vs. altura), que corresponde a la parte recta que se puede apreciar en la gráfica (Figura 5c) (Explicación de Luis en la Tarea 2, 2024).

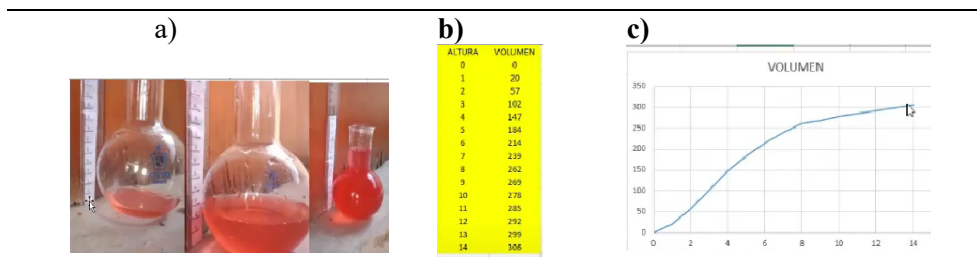


Figura 5 – Foto, tabla y gráfica mostrada por Luis en la Tarea 2
Fuente: Elaboración propia (2024)

En la segunda fase del análisis, identificamos la trayectoria de aprendizaje real de Luis. Primero, en cada presentación de como realizó cada tarea, identificamos el momento en que mostró el nivel más sofisticado de razonamiento variacional y covariacional. Y segundo, contrastamos las hipótesis del proceso de aprendizaje de la TAH con los resultados de la implementación de las tareas de Luis.

5 Resultados

Mostramos la TAR de Luis en la Cuadro 5. En ella se pueda observar que Luis desarrolló su razonamiento variacional de altura y de volumen a un nivel de variación continua fragmentada y su razonamiento covariacional de altura vs. volumen a un nivel de covariación continua fragmentada. En términos generales se puede notar que las hipótesis de aprendizaje se confirmaron; ya que:

- Al introducir en la Tarea 1 al centímetro como unidad de medida de distancia; favoreció que Luis visualizara las variables altura y volumen de manera discreta y las razonara covariacionalmente a un nivel de coordinación de valores.
- Al introducir en la Tarea 2 al mililitro como unidad de medida de volumen, a la jeringa como su instrumento de medición, al centímetro como unidad de medida de distancia y a la regla como su instrumento de medición; favoreció que Luis visualizara la variable volumen y la variable altura de manera continua fragmentada y las razonara covariacionalmente a un nivel de covariación continua fragmentada.

Tarea	Razonamiento variacional de altura	Razonamiento variacional de volumen	Razonamiento covariacional de altura y volumen
Test inicial	variación gruesa	variación gruesa	coordinación gruesa
Tarea 1	variación discreta	variación discreta	coordinación de valores
Tarea 2	variación continua fragmentada	variación continua fragmentada	covariación continua fragmentada
Test final	variación continua fragmentada	variación continua fragmentada	covariación continua fragmentada

Cuadro 5 – Trayectoria de aprendizaje real de Luis
Fuente: elaboración propia (2024)

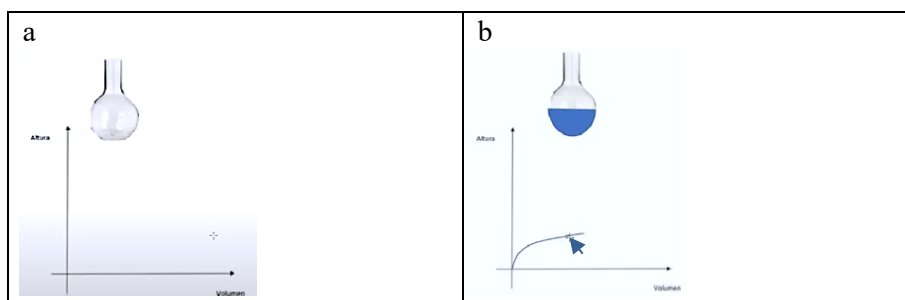
En lo que sigue reportamos los resultados del participante Luis. Primero describimos el razonamiento que mostró al realizar el Test inicial y final y las tareas del proceso de instrucción. Después, reportamos el razonamiento variacional que mostró para la variable altura y para la variable volumen, y también, reportamos el razonamiento covariacional que mostró de las variables altura y volumen. Finalmente, describimos la trayectoria de aprendizaje real que siguió.

5.1 Test inicial- Coordinación gruesa de valores

En el Test inicial, Luis razonó variacionalmente de forma gruesa las variables altura y volumen; dado que visualizó el aumento de altura y de volumen, sin relacionar valores específicos con los aumentos de las variables (Extracto 2, P1) lo que relacionamos con el código RV3. También, en el Test inicial, interpretamos que Luis razonó covariacionalmente en el nivel coordinación gruesa de valores; dado que relacionó la variación de la altura en función del volumen e imaginó que durante el llenado de la botella la altura aumentaba según cambiaba la forma de la botella (Extracto 2, P1 y P2) lo que relacionamos con los códigos RC2 y RCB2.

P 1: Con la gráfica quise mostrar cómo estaba variando la altura respecto al volumen (Figura 6)(códigos RC2 y RCB2). El segundo momento que tomé fue cuando la botella ya estaba a la mitad del llenado (Figura 6b (código RV3 de volumen). Entonces, me di cuenta de que en la parte baja el recipiente era más angosto y a medida que iba aumentando se hacía un poco más ancho (código RV3 de volumen) y obviamente va aumentando la altura (código RV3 de la variable altura). Entonces, tomé la curva de esta forma (señala la gráfica con el cursor; Figura 6b). En este punto (Figura 6c), fue tomando más altura (código RV3 de altura) porque como es más angosta la botella, iba aumentando la altura un poco más (códigos RC2 y RCB2 de las variables altura vs. volumen) (Explicación de Luis en el Test inicial, 2024).

P 2: Y cada vez, la altura iba aumentando un poco más lento conforme se llenaba la botella, debido a la forma de la botella (Códigos RC2 y RCB2 de las variables altura vs. volumen). Entonces, cuando ya llega al punto medio de la esfera que estoy señalando (señala con el cursor; Figura 6d), se hace más angosta la botella nuevamente. Lo que yo supuse fue que a partir del punto medio (Figura 6b) la gráfica iba a tomar una reflexión (Figura 6b) (Explicación de Luis en el Test inicial, 2024).



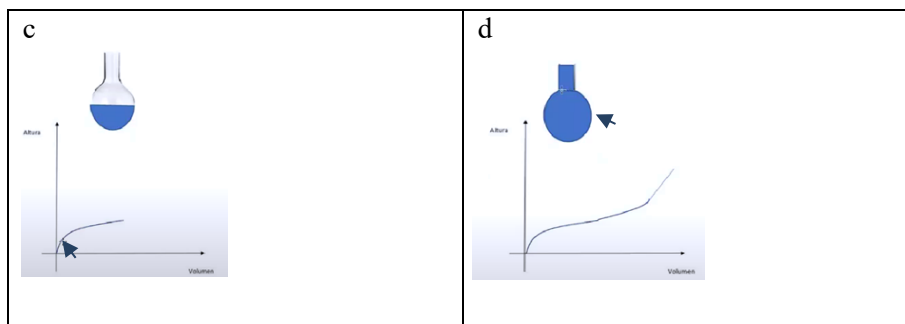


Figura 6 – Figuras y gráficas elaboradas por Luis en el Test inicial
Fuente: elaboración propia (2024)

5.2 Tarea 1- Coordinación de valores

En la Tarea 1 Luis razonó variacionalmente de forma discreta la variable altura; dado que asignó valores específicos de altura en centímetros para calcular el volumen de la botella (Extracto 3, P2) lo que relacionamos con el código RV2. De manera similar, Luis razonó en un nivel de variación discreta la variable volumen; dado que hizo cálculos para obtener cantidades específicas de volumen (Extracto 3, P1) lo que relacionamos con el código RV2. Posteriormente, relacionó cantidades de volumen con medidas de altura en la botella y visualizó que el volumen variaba junto con cantidades específicas de altura (Extracto 3, P2) lo que relacionamos con los códigos RC3 y RCB3. En consecuencia, interpretamos que Luis razonó covariacionalmente en el nivel coordinación de valores la altura y el volumen, y expresó dicha coordinación a través de una tabla de valores y una gráfica (Figura 7c y 7d) lo que relacionamos con los códigos RC3 y RCB3.

P 1: La botella está dividida en dos secciones, una parte esférica; en la cual se destacará lo que son dos mitades, una azul y otra roja, y la parte cilíndrica que es de color amarillo (Figura 7a). En este sentido, podemos decir que tenemos dos diámetros aproximados. El diámetro de la parte esférica que es aproximadamente 5 centímetros y de la parte cilíndrica, 1.5 centímetros. Tenemos dos fórmulas para el volumen, una para la esfera y otra para el cilindro (Figura 7b). El radio de la esfera sería 2.5 centímetros y el radio del cilindro sería 0.75 centímetros. Al calcular el volumen de la esfera y del cilindro, tenemos: 65.45 cm^3 y 7.06 cm^3 respectivamente (código RV2 de la variable volumen). Con ello, podemos llenar la tabla de valores (Figura 7c). Entonces, sabemos que hasta la altura 5 que es donde se encuentra la parte esférica de la botella, el volumen es de 65.45 cm^3 , coloqué el valor de 65 en la tabla para tener un valor aproximado. Y para la parte del volumen del cilindro que es 7.06 cm^3 , lo aproximé a 7. La suma del volumen de la parte esférica más la parte cilíndrica, 65 más 7, me da el volumen total de la botella que es aproximadamente 72 cm^3 a la altura de 9 centímetros (Explicación de Luis en la Tarea 1, 2024).

P 2: En la tabla coloqué cada uno de los valores, tomando aproximaciones de forma intuitiva. Si el volumen en la altura 5 centímetros es de 65 cm^3 , cuando la altura esté a la mitad, es decir, 2.5 centímetros, el volumen será la mitad de 65 cm^3 . Cuando esté en 3 centímetros será mucho mayor que la mitad de 65 cm^3 , cuando esté en 2 centímetros será mucho menor que la mitad de 65 cm^3 . En este sentido, cuando la altura está en 0.5 centímetros el volumen será 4.5 cm^3 , cuando el volumen sea 11 cm^3 la altura será 1 centímetro, y así sucesivamente (códigos RC3 y RCB3 de las variables altura vs. volumen) van a

ir cambiando. Así también, haciendo aproximaciones para los valores que fui tomando de la parte cilíndrica, es decir, el 6, 7, 8 y 9 de altura (código RV2 de la variable altura), los tomé usando la misma lógica, dividí el volumen entre 4 debido a que el radio del cilindro es constante y el agua va subiendo uniformemente. 7cm^3 entre 4, nos da un valor que a medida que se vaya sumando con los 65cm^3 , es decir, aproximadamente sumar 2cm^3 o 1 punto y algo (por cada centímetro de altura) que va subiendo constantemente hasta llegar a 72cm^3 . Es decir, que la gráfica que va a dar es algo aproximadamente así (Figura 7d) (Explicación de Luis en la Tarea 1, 2024).

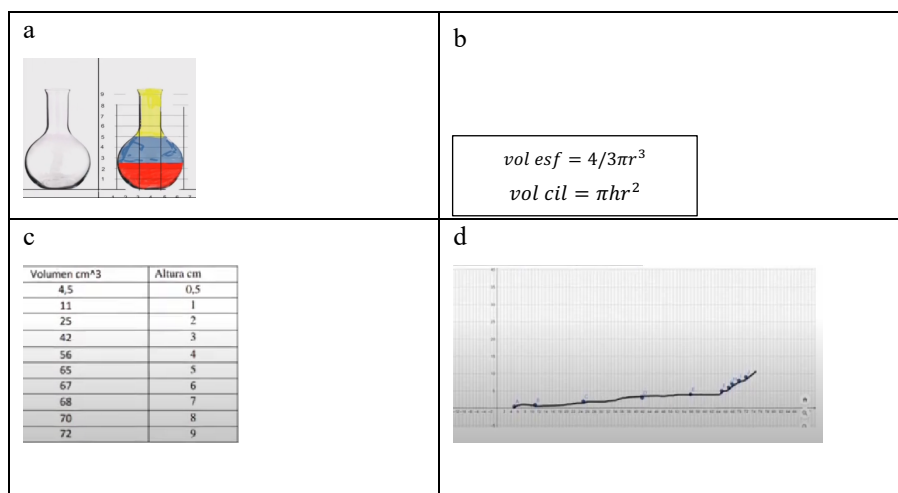


Figura 7 – Figuras, tabla y gráfica elaborada por Luis en la Tarea 1
Fuente: elaboración propia (2024).

5.3 Tarea 2- Coordinación de valores

En la Tarea 2 Luis razonó variacionalmente de forma continua fragmentada la variable altura; dado que visualizó que la altura aumentó en incrementos de un centímetro durante todo el llenado de la botella (Extracto 1, P1) lo que relacionamos con el código RV4. De igual manera, Luis razonó variacionalmente de forma continua fragmentada la variable volumen; dado que visualizó el volumen en términos de incrementos constantes de siete mililitros durante el llenado de la parte cilíndrica de la botella (Extracto 1, P2) lo que relacionamos con el código RV4. En consecuencia, interpretamos que Luis razonó covariacionalmente de forma continua fragmentada; dado que visualizó un incremento de altura por cada incremento de volumen, coordinando los cambios por intervalos para altura en centímetros y para volumen en mililitros (extracto 1, P2) lo que relacionamos con los códigos RC4, RCB4, RCB4.1.

5.4 Test final - Covariación continua fragmentada

En el Test final Luis razonó variacionalmente de forma continua fragmentada la variable altura y la variable volumen; dado que visualizó el aumento de altura en intervalos del mismo tamaño cuyos extremos etiquetó con $y_0, y_1, \dots, y_{10}$, lo que relacionamos con el código RV4,

mientras que el volumen lo etiquetó con $x_0, x_1, \dots, x_7$, lo que relacionamos con el código *RV4*, cuyos extremos indicaban el cambio de altura y de volumen durante el llenado de la botella (Extracto 4). En consecuencia, interpretamos que Luis razonó convariacionalmente de forma continua fragmentada la altura y el volumen; dado que coordinó la variación de altura con la variación del volumen en intervalos cuyos extremos etiquetó con $x_0, x_1, \dots, x_7$ y $y_0, y_1, \dots, y_{10}$ que relacionó tal como lo muestra en su gráfica (Figura 8a), donde por cada incremento de agua que Luis agregó de forma constante, identificó aumentos diferentes de altura, durante el llenado de la botella (Extracto 4) lo que relacionamos con el código *RCB4*. Para identificar que Luis razonó en el nivel de covariación continua fragmentada en el Tes final, tomamos en cuenta que las etiquetas $x_0, x_1, \dots, x_7$ y $y_0, y_1, \dots, y_{10}$ indican extremos de intervalos de volumen y altura respectivamente, por lo que afirmamos que coordinó los cambios de las variables por intervalos, tal como se describe en el código *RCB4*.

*Lo que yo hice fue colocar en el eje de las x el volumen y en el eje de las y la altura (Figura 8a). Tomé una especie de proporción, no un número fijo, simplemente una distancia. Una misma distancia de x_0 a x_1 , de x_1 a x_2 , y así sucesivamente (código *RV4* de la variable volumen). Lo mismo para la altura ($y_0, y_1, \dots, y_{10}$) (código *RV4* de la variable altura). Entonces, considerando la forma de la botella (Figura 8b), mirándola desde arriba mientras se va llenando (señala los círculos dibujados en su hoja cuadriculada, que resaltamos en un recuadro rojo, Figura 8a), para el primer punto del volumen correspondiente a la parte más ancha de la botella, la altura va a crecer, pero no va a crecer tanto, va a crecer un poquito. Después, pensé que como voy a ingresar la misma cantidad de volumen, la altura, al ser la botella más angosta va a crecer un poquito más que la altura anterior; como aquí (señala el fragmento de la gráfica que va de las coordenadas x_1, y_1 a x_2, y_2 , Figura 8a). Después, la botella se hará cada vez más angosta, pero será la misma cantidad de volumen la que iré agregando, y así sucesivamente (código *RCB4* de las variables altura vs. volumen). En la última parte de la botella, no es exactamente un cilindro, pero la botella se hacía cada vez más angosta, por eso al final la gráfica fue un poco más recta (Figura 8a) (Explicación de Luis en el Test final)*

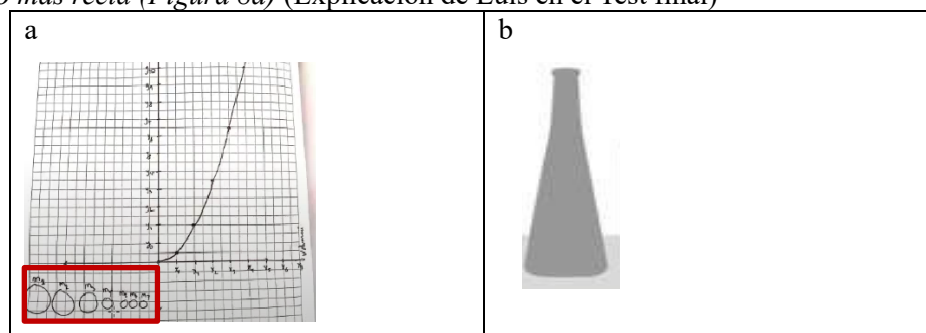


Figura 8 – Figura y gráfica elaborada por Luis en el Test final
Fuente: Elaboración propia (2024)

6 Discusión, limitaciones e investigaciones futuras

Con el objetivo de favorecer el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional en estudiantes de un posgrado en Matemática Educativa para el aprendizaje del concepto

función; realizamos una investigación de diseño de aula llamada *llenado de recipientes*, con el objetivo de promover el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional, a través de la medición, de las variables altura y volumen presentes en el llenado de un recipiente. Los resultados muestran que las tareas de la trayectoria de aprendizaje hipotética promovieron el desarrollo del razonamiento variacional de la variable altura y la variable volumen y el desarrollo del razonamiento covariacional de altura vs. volumen en el participante. La trayectoria de aprendizaje real del participante confirma nuestras hipótesis de aprendizaje que la experiencia física del llenado de recipientes y la medición con instrumentos de medida (regla en centímetros para longitud y jeringa en mililitros para volumen) favorece el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional en el nivel continuo fragmentado.

Es importante señalar que, aunque los resultados muestran un desarrollo claro del razonamiento variacional y covariacional en Luis, estos hallazgos corresponden al análisis detallado de un solo participante. Por tanto, si bien la trayectoria de aprendizaje real confirma las hipótesis planteadas, los resultados no pueden generalizarse a otras poblaciones sin un estudio más amplio. Investigaciones futuras con muestras más numerosas y diversas podrían ofrecer mayor robustez y validez a estos hallazgos.

Nuestros resultados de investigación son consistentes con la literatura que ha mostrado que la modelación de situaciones dinámicas promueve el desarrollo del razonamiento covariacional (Carlson *et al.*, 2002; Ellis, *et al.*, 2015; Ellis *et al.*, 2016; González, 2021; Moore, 2014; Villa-Ochoa, 2012). En particular, nuestros resultados de investigación incrementan la evidencia del potencial de la situación del llenado de recipientes para promover tal desarrollo. Además, el haber diseñado tareas en el marco de una trayectoria de aprendizaje hipotética contribuye al campo de investigación, ya comenzado por Ellis *et al.* (2016) y Fonger, Ellis y Dogan (2020), para diseñar *secuencias de tareas* que buscan promover el desarrollo del razonamiento covariacional.

La mayoría de las investigaciones que han buscado el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes y en futuros profesores han diseñado tareas con geometría dinámica (Ellis, *et al.*, 2015; Fonger; Ellis; Dogan 2020; Paoletti; Vishnubhotla, 2022; Trejo-Martínez, Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra, 2021; Villa-Ochoa, 2012) o con simulaciones digitales (Basu; Panorkou, 2019; Castañeda- Ovalle; García-Rodríguez, 2023; González, 2021; Johnson, 2013, 2016; Johnson; Mcclintock; Hornbein, 2017; Johnson; Mcclintock; Gardner, 2020). En cambio, en esta investigación hemos optado por diseñar tareas de modelación de la experiencia física de la situación dinámica del llenado de recipientes y la medición con instrumentos. Consideramos que esto contribuye a nuestro conocimiento de como promover el

desarrollo del razonamiento variacional y covariacional. Así, consideramos que futuras investigaciones deberían explorar cómo la modelación de la experiencia física de una situación dinámica y el uso de instrumentos de medición favorece el desarrollo del razonamiento covariacional.

6.1 Acerca del desarrollo del razonamiento (co)variacional

Los resultados muestran que las tareas de la trayectoria de aprendizaje hipotética promovieron el desarrollo del razonamiento variacional de la variable altura y la variable volumen y el desarrollo del razonamiento covariacional de altura vs. volumen en el participante Luis. Ello es notorio si comparamos el razonamiento de partida (realizado en el Test inicial) con el razonamiento de llegada (realizado en el Test final) del participante, quien mostró un razonamiento covariacional de partida de coordinación gruesa y un razonamiento covariacional de llegada continuo fragmentado.

Interpretamos que lo anterior fue así; ya que, en consonancia con nuestro proceso de aprendizaje hipotético y nuestras hipótesis de aprendizaje de las tareas, la experiencia física de llenar el recipiente y la utilización de instrumentos de medida (regla y jeringa) favoreció en el participante el desarrollo de su razonamiento variacional de las variables altura y volumen. En particular, los instrumentos de medida le permitieron al participante elaborar tablas de valores que les permitieron desarrollar un nivel de coordinación de valores de razonamiento covariacional y a partir de estos valores analizar los cambios de las variables que lo llevaron a desarrollar un nivel de razonamiento covariacional continuo fragmentado.

Los resultados obtenidos son consistentes con la teoría de Thompson y Carlson (2017), quienes sugieren que el razonamiento covariacional continuo fragmentado es un paso fundamental para el desarrollo del significado covariacional de función. En el caso de Luis, la implementación de tareas con mediciones físicas y la progresión a través de niveles intermedios (variación discreta a continua fragmentada) validan la importancia de experiencias concretas y progresivas en la promoción de niveles más sofisticados de razonamiento.

Como consecuencia de lo anterior, sugerimos investigaciones futuras que sigan explorando el proceso de aprendizaje hipotético y nuestras hipótesis de aprendizaje de las tareas de que la experiencia física del llenado de recipientes y el uso de instrumentos de medida favorece el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional.

6.2 Acerca de la trayectoria de aprendizaje real

Los resultados muestran que la trayectoria de aprendizaje real de Luis, en la Tarea 1 (donde se incorpora una regla en centímetros para medir la altura) le permitió desarrollar su razonamiento variacional de la variable altura a un nivel de variación discreta. Esto le permitió calcular de manera aproximada volúmenes de diferentes secciones de la botella, que a su vez le permitió desarrollar un razonamiento variacional de la variable volumen a un nivel de variación discreta. En consecuencia, la Tarea 1 le permitió desarrollar razonamiento covariacional a un nivel de coordinación de valores. La Tarea 2 (donde se incorpora el uso de una jeringa para medir el volumen en el llenado de un recipiente) le permitió visualizar y calcular los cambios de la variable volumen en relación con los cambios contantes de la variable altura. En consecuencia, la Tarea 2 le permitió desarrollar razonamiento covariacional a un nivel continuo fragmentado.

La trayectoria de aprendizaje real de Luis, mostró un desarrollo de razonamiento covariacional paulatino; ya que pasó de mostrar un razonamiento covariacional de altura y volumen de coordinación gruesa en el Test inicial a mostrar un nivel de covariación continua fragmentada en el Test final. Consideramos que esto fue así; porque al parecer la Tarea 2 no exige razonar a este nivel; pero si el Test final.

En general, interpretamos que lo anterior fue así; ya que, como mencionamos previamente, en consonancia con nuestro proceso de aprendizaje hipotético y nuestras hipótesis de aprendizaje de las tareas, la experiencia física de llenar el recipiente y la utilización de instrumentos de medida (regla y jeringa) favoreció en Luis el desarrollo de su razonamiento variacional y covariacional de las variables altura y volumen.

6.3 Acerca del diseño de aula

Un aspecto innovador de este estudio radica en el uso de materiales físicos y herramientas de medición (regla y jeringa) dentro del marco de una investigación de diseño de aula. A diferencia de estudios previos que han utilizado simulaciones digitales o geometría dinámica (Ellis *et al.*, 2016; Fonger; Ellis; Dogan, 2020), nuestra propuesta destaca cómo la experiencia física del llenado de recipientes promueve un entendimiento más tangible de la covariación entre altura y volumen. Este enfoque proporciona una alternativa metodológica relevante para fomentar el razonamiento covariacional en contextos educativos, particularmente en escenarios con recursos tecnológicos limitados.

Por lo anterior sugerimos futuras investigaciones que exploren tal potencial diseñando de tareas de instrucción que incluyan diversos tipos de botellas y diferentes unidades de medida. Con ello, hipotetizamos, que se podría favorecer el desarrollo del razonamiento covariacional a nivel de covariación continua suave en sus diversas posibilidades en relación con la gráfica de la función (i.e. creciente y cóncava hacia arriba, decreciente y cóncava hacia arriba, creciente y cóncava hacia abajo y decreciente y cóncava hacia abajo). Por ejemplo; en un recipiente cónico () la gráfica de $V = f(h)$ es una gráfica creciente cóncava hacia abajo y en un recipiente cónico invertido () la gráfica de $V = f(h)$ es una gráfica creciente cóncava hacia arriba. Además, con botellas más complejas () se puede favorecer el desarrollo del concepto de punto de inflexión.

En general, los resultados de esta investigación señalan el potencial de la experiencia física de una situación dinámica y la utilización de instrumentos de medida para favorecer el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional y el aprendizaje del significado covariacional de función, esto es consistente con investigaciones que han mostrado que el estudio de situaciones dinámicas promueve el aprendizaje de un objeto matemático en Cálculo (Villa-Ochoa; González-Gómez; Carmona-Mesa, 2018). Por ello sugerimos investigaciones futuras que exploren el potencial anterior con diferentes instrumentos de medida (e.g. termómetro, cronómetro, velocímetro, luxómetro, etc.) en diferentes situaciones dinámicas (e.g. enfriamiento/calentamiento de líquidos, movimiento circular, movimiento rectilíneo uniforme, luz de un foco etc.). En particular, consideramos que el uso de instrumentos de medición como los sugeridos antes, favorecen al menos a razonar la variable que mide a un nivel continuo fragmentado.

7 Conclusión

Los resultados de esta investigación muestran que el diseño de aula de una trayectoria de aprendizaje hipotética con una secuencia de tareas, favoreció el desarrollo del razonamiento variacional y covariacional continuo fragmentado y el aprendizaje del significado covariacional de función en Luis, un estudiante de posgrado.

Luis alcanzó la meta de aprendizaje de la TAH y en su solución de las tareas confirmamos las hipótesis de aprendizaje de la TAH. Confirmamos la hipótesis del proceso de aprendizaje y la hipótesis de aprendizaje de la tarea, dado que la experiencia física de llenar un recipiente, el uso del centímetro como unidad de medida de altura y la utilización de una unidad

de medida para el volumen junto con un instrumento medición de volumen, promovió en Luis, el desarrollo de su razonamiento variacional en el nivel variación continua fragmentada de la variable altura y de la variable volumen, y en consecuencia, promovió el desarrollo de su razonamiento covariacional en el nivel covariación continua fragmentada de altura vs. volumen. Los resultados de Luis, confirman nuestras hipótesis generales de aprendizaje, dado que la experiencia física del llenado de recipientes y la medición con instrumentos como la regla en centímetros para longitud y la jeringa en mililitros para volumen, favoreció el desarrollo de su razonamiento variacional y covariacional a un nivel continuo fragmentado. Sin embargo, debido a que el estudio se centra en un único participante, los resultados deben interpretarse con cautela. Futuras investigaciones con muestras más amplias y diversas podrían confirmar la aplicabilidad general de estas estrategias.

A partir de lo anterior, consideramos que esta investigación contribuye al campo de la investigación del diseño de aula, de las trayectorias de aprendizaje hipotéticas y del razonamiento variacional y covariacional, dado que la metodología de investigación de diseño de aula y el diseño de una TAH fundamentadas en el marco teórico de razonamiento variacional y covariacional, permitieron indagar cómo promover el desarrollo del razonamiento (co)variacional en un estudiante de un posgrado en Matemática Educativa.

Por tanto, consideramos que esta investigación muestra el potencial de la investigación de diseño de aula como un medio para promover el desarrollo del razonamiento (co)variacional y sugerimos que las investigaciones futuras con diferentes aulas de estudiantes de diferentes niveles escolares como estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, exploren con mayor profundidad dicho potencial.

El diseño de una trayectoria de aprendizaje hipotética con tareas secuenciales y materiales físicos ofrece un modelo replicable para docentes interesados en fomentar el razonamiento covariacional en sus estudiantes. Además, sugerimos explorar cómo la introducción de recipientes de diferentes formas y unidades de medida puede promover niveles más avanzados de covariación, como el continuo suave. Asimismo, otras situaciones dinámicas (e.g., enfriamiento de líquidos, movimiento circular) y el uso de instrumentos como termómetros o velocímetros pueden ser escenarios prometedores para ampliar esta línea de investigación.

Contribuciones de autoría

Todos los autores contribuyeron sustancialmente a la concepción y planificación del

estudio; en la obtención, análisis e interpretación de datos; en redacción y revisión crítica; y aprobó la versión final para ser publicada.

Disponibilidad de datos

Los datos generados o analizados durante este estudio se incluyen en este artículo publicado.

Referencias

ANTONINI, S.; LISARELLI, G. Designing Tasks for Introducing Functions and Graphs within Dynamic Interactive Environments. **Mathematics**, Pavia, v. 9, n. 572, p. 1-16, 2021.

BASU, D.; PANORKOU, N. integrating covariational reasoning and technology into the teaching and learning of the greenhouse effect. **Journal of Mathematics Education**, London, v. 12, n. 1, p. 6-23, 2019.

CARLSON, M.; JACOBS, S.; COE, E.; LARSEN, S.; HSU, E. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 33, n. 5, p. 352-378, nov. 2002.

CARLSON, M.; LARSEN, S.; LESH, R. Integrating a Models and Modeling Perspective With Existing Research and Practice. In: LESH, R. A; DOERR, H. M. (eds.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. New York: Routledge, 2003. p. 465-478.

CÁRCAMO A.; FORTUNY, J. M; FUENTALBA, C. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 9, n. 1, p. 45-64, 2021.

CÁRCAMO, A.; FUENTALBA, C. Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. **Bolema**, Rio Claro, v. 37, n. 76, p. 577-601, 2023.

CASTAÑEDA-OVALLE, A.; GARCÍA-RODRÍGUEZ, M. L. Procesos de razonamiento covariacional durante la integración cognitiva de conceptos de matemáticas y de física en la interpretación del gasto hidráulico. **IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH**, Chihuahua, v. 14, n. 766, p. 1-23, 2023.

CASTILLO-GARSOW, C. Continuous quantitative reasoning. In: MAYES, R. L.; HATFIELD, L. (eds.), **Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context**. Laramie: University of Wyoming, 2012. p. 55-73.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C.; Conducting Design Studies to Investigate and support mathematics students' and teachers' learning. In: CAI, J. (ed.). **Compendium for research in mathematics education**. Reston: NCTM, 2017. p. 208-216.

DIERDORP, A; BAKKER, A.; EIJKELHOF, H. M. C.; VAN MAANEN, J. Authentic Practices as Contexts for Learning to Draw Inferences Beyond Correlated Data. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 13, n. 1, p. 132-151, 2011.

ELLIS, A. B. ; WEBER, E. ; LOCKWOOD, E. The case for learning trajectories research. **PME 38/ PME-NA Proceedings**, Vancouver, vol.1, 2014. p.1-8.

ELLIS, A. B.; OZGUR, Z.; KULOW, T.; WILLIAMS, C. C.; AMIDON, J. Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth, **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 39, n. 39, p. 135-155, 2015.

ELLIS, A. B.; OZGUR, Z.; KULOW, T.; DOGAN, M. F.; AMIDON, J. An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v.18, n.3, p.151-181, 2016.

FERRARI-ESCOLÁ, M.; MARTÍNEZ-SIERRA, G.; MÉNDEZ-GUEVARA, M. E. M. "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 42, p. 92-108. 2016.

FONGER, N. L.; ELLIS, A. B.; DOGAN, M. F. A quadratic growth learning trajectory. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 59, n. 100795, p. 1-22, 2020.

GONZÁLEZ, D. A. The progression of preservice teachers' covariational reasoning as they model global warming. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 62, n. 100859, p.1-22, mar. 2021.

JOHNSON, H. L. Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 31, n. 3, p.313-330, 2012.

JOHNSON, H. L. Designing covariation tasks to support students' reasoning about quantities involved in rate of change. In: Watson, A. Ohtani, M. (eds.). **Task design in Mathematics Education: proceedings of ICMI Study 22**. Oxford: Springer, 2013.

JOHNSON, H. L. Designing technology-rich tasks to foster secondary students' covariational reasoning. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2016, Hamburg. **Proceedings...** Hamburg: Springer; Universitat Hamburg, 2016. p. 287-291. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-62597-3.pdf>. 27 mar. 2025.

JOHNSON, H. L.; MCCLINTOCK, E. D.; GARDNER, A. Opportunities for Reasoning: Digital Task Design to Promote Students' Conceptions of Graphs as Representing Relationships between Quantities. **Digital Experiences in Mathematics Education**, Denver, v. 6, n. 1, p. 340-366, 2020.

JOHNSON, H. L.; MCCLINTOCK, E.; HORNBEIN, P. Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. **ZDM: The International Journal Mathematics Education**, Berlin, v. 49, n. 6, p. 851-864, 2017.

LEIKIN R.; DINUR, S. Teacher flexibility in mathematical discussion. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 26, n. 4, p. 328-347, 2007.

LIANG, B.; MOORE, K. C. Figurative and operative partitioning activity: students' meanings for amounts of change in covarying quantities. **Mathematical Thinking and Learning**, United Kingdom, v. 25, n. 4, p. 291-317, 2020.

MKHATSHWA, T. P. A quantitative and covariational reasoning investigation of students' interpretations of partial derivatives in different contexts. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 54, n. 4, p. 511-533, 2023.

MOORE, K. C. Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. **Journal for Research in Mathematics Education**, Michigan, v. 45, n. 1, p. 102-138, 2014.

MOORE, K. C.; PAOLETTI, T.; MUSGRAVE, S. Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 32, n. 3, p. 461-473, 2013.

OEHRTMAN, M.; CARLSON, M.; THOMPSON, P. Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Function Understanding. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (eds.). **Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education**. DOI: 10.5948/UPO9780883859759.004. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. p. 27-42.

PANORKOU N.; GERMIA, E. F. Integrating math and science content through covariational reasoning: the case of gravity. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 23, n. 4, p.318-343, sept. 2020.

PAOLETTI, T.; VISHNUBHOTLA, M. Constructing covariational relationships and distinguishing Nonlinear and linear relationships. In: KARAGOZ AKAR, G.; OZGUR ZEMBAT, I.; ARSLAN, S.; THOMPSON, P.W. **Quantitative reasoning in mathematics and science education**. Edition 1. Springer Cham, 2022. p.133-168.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 1, p. 114-145, jan. 1995.

SIMON, M. Hypothetical learning trajectories in Mathematics. In: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer, 2020. p. 354-357.

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the role of mathematical task in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and learning**, London, v.6, n.2, p. 91-104, 2004.

STALVEY, H. E; VIDA KOVIC, D. Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 40, n. 2, p. 192-210, oct. 2015.

STEVENS, I. E.; PAOLETTI, T.; MOORE, K.C.; LIANG, B.; HARDISON, H. Principles for designing task that promote covariational reasoning. In: PROCEEDINGS OF THE 20TH ANNUAL CONFERENCE ON RESEARCH IN UNDERGRADUATE MATHEMATICS EDUCATION. 2017. San Diego. **Proceedings...** San Diego CA: The Special Interest Group of the Mathematical Association of America, 2017. Pag. 928-936.

THOMPSON, P. W. A Theoretical Model of Quantify-Based Reasoning in Arithmetic and Algebra. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, n. 70, 1990, San Francisco. **Actas...** San Francisco: NSF Grants, 1990. p. 1-54. San Diego State University.

THOMPSON, P.; CARLSON, M. Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In: CAI, J. (ed.). **Compendium for research in mathematics education**. Reston: NCTM, 2017. p. 421-456.

TREJO-MARTÍNEZ, M.; FERRARI-ESCOLÁ, M.; MARTÍNEZ-SIERRA, G. Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 33, n.1, p. 41-70, abr. 2021.

VILLA-OCHOA, J. A. Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. **Tecné, Episteme y Didaxis**, Antioquia, v. 1, n. 31, p. 9-25, 2012.



VILLA-OCHOA, J. A.; GONZÁLEZ-GÓMEZ, D.; CARMONA-MESA, J. A. Modelación y tecnología en el estudio de la tasa de variación instantanea en matemáticas. **Formación Universitaria**, La Serena, v. 11, n. 2. p. 25-34, abr. 2018.

Submetido em: 20 de Fevereiro de 2024.

Aprovado em: 07 de Janeiro de 2025.

Editor-chefe responsável: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Editor associado responsável: Profa. Dra. Veronica Albanese