

Dificultades con la Fracción como Operador en Discentes de Sexto Curso de Educación Primaria

Difficulties with the Fraction as an Operator in Primary Education Sixth Grade Students

Diana **Herreros-Torres***

 ORCID iD 0000-0003-4773-0767

Maria T. **Sanz****

 ORCID iD 0000-0002-7146-8087

Carlos B. **Gómez-Ferragud*****

 ORCID iD 0000-0002-6742-644X

Resumen

El presente trabajo, de carácter exploratorio, busca detectar las dificultades presentes en un grupo de discentes de entre once y doce años de edad ante la fracción como operador sobre números naturales y fraccionarios, en dos situaciones diferentes: resolución de problemas y operatoria formal, y con un método aritmético y otro gráfico. Se diseñó una prueba compuesta por dos problemas aritmético verbales dónde la fracción actuaba sobre un número a) natural y b) fraccionario. Así mismo, se les propuso un ejercicio de operatoria formal que reproducía la operación necesaria en los problemas anteriores. Los resultados muestran que el alumnado presenta mayores dificultades cuando la fracción actúa frente a un número fraccionario que cuando se tiene un número natural. En la misma línea, la resolución gráfica no es una herramienta que aumente el éxito en la resolución. Finalmente, el conocimiento de la operación de fracción como operador sobre número fraccionario está fuertemente relacionado con la resolución del problema asociado.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Resolución de problemas. Fracción como operador. Dificultades de aprendizaje. Discentes.

Abstract

This exploratory work seeks to detect the difficulties existing in a group of students between eleven and twelve years of age when faced with the fraction as an operator on natural or fractional numbers, in two different contexts: problem-solving and formal operations, and using arithmetic and graphical methods. A test composed of two arithmetical-verbal problems was designed when the fraction acted on a number a) natural and b) fractional. Likewise, a formal operative activity was proposed to them that reproduced the necessary operation in the previous problems. The results show greater difficulties when the fraction acts against a fractional number than when it has a natural number. Along the same lines, graphic resolution is not a tool that increases resolution success. Finally,

* Graduada Maestro en Educación Primaria. Universidad de Valencia (UV). Estudiante de doctorado de la Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. E-mail: diahet@alumni.uv.es.

** Licenciada en Matemáticas. Universidad de Valencia (UV). Profesora Titular de Universidad de la Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. E-mail: m.teresa.sanz@uv.es.

*** Licenciado en Ciencias Ambientales. Universidad de Valencia (UV). Profesor Ayudante Doctor de la Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. E-mail: carlos.b.gomez@uv.es.

the knowledge of the fraction operation as an operator on fractional number is strongly related to the resolution of the associated problem.

Keywords: Mathematics teaching. Problem-solving. Fraction as operator. Learning difficulties. Learners.

1 Introducción

Las fracciones son cruciales en la educación matemática obligatoria, ya que, a partir del concepto de fracción, se enseñan los números racionales. Sin embargo, no es latente su comprensión, ni las operaciones con ellas por parte de los estudiantes (ESCOLANO; GAIRÍN, 2005). Investigadores como Kieren (1976), Streefland (1978) o Freudenthal (1983) admitían que las fracciones son uno de los contenidos matemáticos que presentaban mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje, principalmente en los niveles básicos de educación. Este hecho ha perdurado en el tiempo, siendo latente en estudios actuales Alibali y Sidney (2015), Cramer (2017) o Sanz, Figueras y Gómez (2018). O como indican Stelzer *et al.* (2021), las dificultades se presentan en todos los sistemas educativos, desde Latino América, América del Norte, Europa o Asia.

Esta dificultad viene determinada por los diferentes significados del número racional, los conocidos subconstructos que define Kieren (1976), no reciben el mismo peso ni el mismo protagonismo, estando basado el currículum de las fracciones en la definición como parte-todo (KIEREN, 2020). En particular, el significado *operador*, a pesar de su destacada presencia en la práctica escolar, tanto en Primaria como en Secundaria, sigue sin aportar un conocimiento conceptual relevante a los estudiantes ni despertar una verdadera utilidad de ello en sus vidas diarias.

Ante éste panorama, Ceballos y Murillo (2013), ya destacaron la necesidad de superar esa falsa creencia de comprensión que se crea del concepto de fracción, la cual se pone en evidencia cuando se le pide al estudiantado que se enfrente a la resolución de problemas en los que se contextualizan las operaciones con números racionales y se observa, en sus resultados, el aprendizaje memorístico de los algoritmos.

Son muchos los autores que resaltan la importancia de la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas (DOYLE *et al.*, 2015; LLINARES, 2003; RESNICK, 1987), así como el mayor éxito en la resolución frente a la situación multiplicativa formal (operatoria) (HART *et al.*, 1981). Sin embargo, tal y como se recoge en un estudio sobre libros de texto efectuado por Llinares y Sánchez (2000), el material educativo, en numerosas ocasiones, no favorece la resolución de problemas, ni en su defecto, la plena comprensión del

concepto de fracción, ya que según Pino y Blanco (2008), en los libros escolares la resolución de problemas ocupa un lugar secundario en la actividad del alumnado, sin aprovecharse como herramienta para la producción y consolidación de conocimiento.

Así, en el contexto definido, el presente trabajo, de carácter exploratorio, trata de indagar en uno de los contenidos básicos dentro de la Educación Primaria, la fracción como operador (KIEREN, 1976), pretendiendo responder a las siguientes preguntas de investigación: ¿el estudiantado de Educación Primaria manifiesta diferencias según se presente el contenido de fracción como operador mediante problemas aritmético escolares verbales (PAEV) o mediante una situación multiplicativa formal (operatoria)? ¿Existen dificultades derivadas del tipo de número (natural o racional) sobre el que opera la fracción? ¿Existen diferencias ante la resolución gráfica y aritmética de los problemas?

Para dar respuesta a las preguntas planteadas, el objetivo último del trabajo es analizar el desempeño del estudiantado, sobre el concepto fracción en dos contextos de práctica educativa: la resolución de problemas y los ejercicios de operatoria.

De aquí se desprenden las siguientes acciones investigadoras:

1. Analizar el proceso de resolución aritmética y gráfica ante PAEV que involucran la fracción como operador, por parte del alumnado de 6º de Educación Primaria.
2. Determinar si existen diferencias en la resolución de un PAEV con fracción como operador cuando estos se resuelven de forma gráfica o de forma aritmética en la muestra de estudiantes de Educación Primaria.
3. Determinar si existen diferencias en la resolución de un PAEV con fracción como operador cuando se presenta un número natural y uno fraccionario en la muestra de estudiantes de Educación Primaria.
4. Analizar el proceso de resolución de la situación multiplicativa formal asociada a la fracción como operador en la muestra de estudiantes de Educación Primaria.
5. Determinar si existen diferencias al respecto del conocimiento de fracción como operador en una situación formal (operatoria) o concreta (resolución de problemas) en estudiantado de Educación Primaria.

2 Fundamentos

2.1 Las fracciones en el contexto escolar

Entre los diferentes contenidos que se incluyen en el currículum de matemáticas, hemos

querido centrar nuestra atención al concepto de fracción, más concretamente al significado de operador.

Cuando en los niveles de Educación Primaria se introduce el concepto de fracción a los estudiantes se produce una disrupción con respecto al concepto de número, por el paso de los naturales a los racionales. Es por éste motivo que lleva a preguntarnos qué son las fracciones y qué sucede cuando se introducen en el contexto escolar.

Según Freudenthal (1983, p. 134) “las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional”, es decir, las fracciones son elementos de las clases de equivalencia del conjunto de los números racionales. El caso es que, en relación a la enseñanza de las fracciones en el sistema escolar son varios los autores, como Kieren (1976) o Streefland (1978), quienes aluden a la importancia de las fracciones en el currículo escolar obligatorio por su capacidad de fomentar una gran diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar, así como desarrollar el control de las ideas matemáticas. Sin embargo, la comprensión conceptual profunda de las fracciones implica comprender la estructura a/b , es decir, la relación entre numerador y denominador. Pero, ésta relación puede tomar muchos significados: parte-todo, medida, cociente, razón, número decimal y operador (BEHR *et al.*, 1983; FREUDENTHAL, 1983; KIEREN, 1976,1980), los cuales, desde la teoría de los campos conceptuales, serían necesarios conocer si realmente se quiere tener un conocimiento adecuado de dicha estructura matemática (LIVAS, 2004; KIEREN, 2020).

Un buen número de investigadores en educación matemática coinciden en que, a pesar de que la mayoría de los estudiantes pasan un tiempo razonable de instrucción escolar frente al concepto de fracción, dicho término matemático continúa siendo uno de los contenidos donde se presentan mayores dificultades, sobre todo en los niveles básicos de educación (BUTTO, 2013).

La cuestión es que autores como Kieren (2020), Llinares y Sánchez (2000) o Ríos (2007), relacionan la dificultad de los escolares para comprender el concepto de fracción con las formas restringidas con que se enfoca el concepto de fracción en la enseñanza básica y con el papel que desempeñan los manuales; consideran que los manuales no colaboran a que los estudiantes lleguen a comprender el concepto, debido a no considerar la complejidad de las fracciones en la evolución del aprendizaje de los niños; la aproximación mecanicista que se hace de las fracciones, alejándose de la realidad y utilizando normas rígidas; y la consideración específica de los diferentes significados de forma aislada.

Muchas de estas dificultades se manifiestan, sobre todo, en el subconstructo fracción como operador. A simple vista, puede resultar un concepto bastante sencillo, sin embargo, aquí

se precisa de la necesidad de reversibilidad del pensamiento para ésta interpretación, lo cual la hace más compleja que aquellas en que se enfatiza lo gráfico o la formalización de las reglas.

En las fracciones como operador, la *n-ésima parte de* puede aplicarse a un objeto antes de que pueda tomar un valor de magnitud, una *n-ésima parte* de algo es una porción concreta; de otra forma, *n veces* no puede realizarse con el objeto dado, se requieren más objetos equivalentes al dado para llevar a cabo la operación. Según Behr *et al.* (1992, *apud* VALENZUELA, 2018) la naturaleza de los objetos que son transformados por la fracción como operador definen diferentes interpretaciones para el numerador y el denominador de ésta. De manera que, si la fracción como operador actúa frente a cantidades continuas, primero actúa el numerador y después el denominador, mientras que, si lo hace frente a cantidades discretas, el orden de aplicación es inverso. De aquí, destaca que es necesario considerar esa asimetría en el trabajo didáctico (SCHMIDT; WEISER, 1995).

De hecho, son varias las investigaciones realizadas en éste ámbito las que reflejan como el concepto de fracción como operador, así como su aplicación, no acaba de comprenderse ni de ser dominado.

Por ejemplo, a nivel conceptual, un estudio realizado por el grupo CSMS (*Concepts in Secondary Mathematics and Science*), en Inglaterra, con un amplio número de niños de entre doce y quince años, señala que ante problemas que involucraban fracciones, los niños obtuvieron mejores resultados en los problemas que en los propios algoritmos presentados de manera independiente (HART *et al.*, 1981). Según los investigadores, esto apunta al hecho de que los estudiantes utilizan estrategias distintas de las escolares para resolver las operaciones debido a una carencia en la plena asimilación del contenido de fracción.

Además, a nivel operacional ésta idea se ve acentuada, ya que, en el análisis de la resolución de operaciones concretas, donde se pone en juego la fracción como operador, se observan errores muy peculiares que se reiteran en distintas generaciones de estudiantes. Estos errores vienen iniciados por dos motivos, en primer lugar, relacionar con la operación asociada, la multiplicación, y, en segundo lugar, los errores propios de la multiplicación (SANZ; FIGUERAS; GÓMEZ, 2018). Uno de los errores muy comunes en la multiplicación es que, para multiplicar dos fracciones, algunos estudiantes reducen a común denominador y, después, multiplican únicamente los numeradores, evidenciándose, por tanto, que existe una clara confusión entre las reglas de adición y multiplicación, posiblemente por la memorización de las mismas (LLINARES; SANCHEZ, 1988). Estos mismos autores observaron que una parte del estudiantado utilizaba el algoritmo de la división para resolver la multiplicación.

Más recientemente, en el estudio de Egodawatte (2011) otro error que se detecta tiene que ver con el todo sobre el que actúa la fracción, y está relacionado con la naturaleza de los objetos; cuando los discentes se encuentran con un natural multiplicando una fracción, a menudo multiplican tanto numerador como denominador por dicho número natural. En esta misma línea, Sanz *et al.* (2020) determinan mayor complejidad medida a través del tiempo de lectura, cuando se lee una fracción sobre un número fraccionario que sobre un número natural.

2.2 Definición de problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) y su papel en la escuela

A día de hoy se puede observar, a nivel de documentos, en los recientes cambios curriculares, cómo la instrucción basada en la resolución de problemas está siendo incorporada como eje vertebrador de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; tanto es así, que en el NCTM (2021) (*National Council of Teachers of Mathematics*), la resolución de problemas ya es considerado un eje primordial para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares, considerándose ello como el conjunto de tareas matemáticas que tienen el potencial de proporcionar desafíos intelectuales para mejorar la comprensión y el desarrollo matemático de los estudiantes. La resolución de problemas ha de ser considerada como un lugar de producción de conocimiento, o un lugar donde aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones no familiares nuevas, para mostrar y poner de manifiesto la transferencia del mismo.

Así, la resolución de problemas se viene reconociendo como un campo fértil de las matemáticas digno de ser explorado, más minuciosamente, para poder comprender aspectos relativos a cómo los alumnos resuelven los problemas, las dificultades que se plantean, las variables relevantes en los procesos de resolución, los diferentes tipos de problemas que existen y los niveles educativos en que deben ser abordados.

Concretamente, aquí nos centramos en los problemas aritméticos verbales (BORASI, 1986). Puig y Cerdán (1988) los dividen en problemas de una o más de una etapa, dependiendo de que sea necesario para alcanzar la solución, realizar una o más operaciones aritméticas. Estos mismos autores los encuadran en los llamados problemas de encontrar definidos por Polya (1945), en ellos se nos pide que, bajo ciertas condiciones (parte informativa), se determine una cantidad (pregunta del problema) a partir de otras que se nos proporcionan.

Asimismo, la óptica elegida es la que enfoca los problemas desde el estudio y la descripción de su proceso de resolución, es decir, interesa conocer cómo resuelven los sujetos los problemas que se les va a plantear y qué dificultades presentan en dicha resolución.

2.3 Problemas escolares de fracciones

Si entrelazamos la fracción como operador y la resolución de problemas, planteándose como una posible estrategia que permita mejorar los resultados en el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos en cuestión, encontramos que la mayoría de las investigaciones efectuadas en éste sentido, reflejan la importancia de la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas, a pesar de que muchos de los resultados persisten negativos. Por ejemplo, Valdemoros y Ruiz (2008) defienden que la resolución de problemas es de vital importancia para esclarecer cómo se producen y articulan las elaboraciones básicas del estudiante en las fracciones, ya que, al enfrentarse a un problema aritmético, el sujeto duda, se formula preguntas, establece nexos entre distintas experiencias, se plantea ciertas conjeturas, ve distintas soluciones, reflexiona sobre ellas y anticipa resultados.

En éste sentido, parece un buen ámbito de estudio dentro de la educación matemática, recurrir a las confluencias existentes entre el contenido de fracción y la resolución de problemas. Es cierto, que el significado de fracción como operador, es cada vez uno de los contenidos que mayor interés despierta en la investigación matemática educativa, en cambio, la unión entre fracción como operador y resolución de problemas es un área muy reciente donde queda mucho por indagar. Sin ir más lejos, presentamos algunos de los referentes más próximos a ésta vertiente.

A nivel teórico, el estudio efectuado por Gómez, Sanz y Huerta (2016), donde se presenta una investigación sobre los problemas verbales de fracciones que ha transmitido la tradición escolar. Estos autores consideran los PAEV como problemas descriptivos, porque su contexto es una historieta o narración pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica y lo que hacen es, mediante un análisis didáctico e histórico-epistemológico, llevan a cabo una clasificación de éstos considerando los distintos tipos de problemas, sus estructuras, sus lecturas analíticas, sus reglas, fórmulas y métodos de resolución.

En segundo lugar, a nivel metodológico, destaca el estudio efectuado por Gómez y Contreras (2009) y el de Sanz, Figueras y Gómez (2018). En el primero de ellos, se presenta parte de una investigación donde se analiza el efecto de las variables de problema y las variables de resolución de problemas en las respuestas de estudiantes de segundo ciclo de educación secundaria obligatoria al resolver problemas multiplicativos de división de fracciones y como conclusión se sugiere la existencia de interrelaciones entre ambos tipos de variables. En el segundo caso, se estudian las habilidades de estudiantes españoles de entre quince y dieciocho años, en tres categorías: representación gráfica, cálculo de fracciones y resolución de

problemas. Ante esto, los resultados cuantitativos muestran bajos porcentajes de éxito al usar fracciones en relación con las tres habilidades, y en cuanto a lo cualitativo, destaca la dificultad de representar gráficamente situaciones en un número natural, con la representación *de lo que queda* (de parte de parte de una parte del todo) y con el cálculo numérico.

Por último, los problemas verbales de fracciones, como muchos otros problemas, se pueden resolver de diversas formas o en distintos registros matemáticos. En el caso de los PAEV que involucran fracciones, se suelen resolver tanto de forma aritmética como de forma gráfica, y se considera una competencia importante en los docentes el hecho de ser capaz de cambiar de registro de resolución para instruir en las diferentes representaciones (DUVAL, 2006; MOSELEY, 2005). También, se ha demostrado que conectar la comprensión de diversas representaciones gráficas mejora la comprensión conceptual del conocimiento matemático (RICO, 2009). Por su parte, Ríos-Cuesta (2021) en una investigación con estudiantes de doce años de edad, a partir de una tarea de resolución de problemas de fracciones, propició el desarrollo conceptual de problemas de fracciones desde la representación gráfica hasta la construcción del algoritmo, destaca que los estudiantes reciben una clara ayuda de las representaciones gráficas, pero siguen otorgando un lugar privilegiado al uso de algoritmos para resolver estos problemas.

3 Método

3.1 Participantes

Se trata de un estudio exploratorio en el que participaron veinte estudiantes de ambos sexos (nueve hombres y once mujeres) de 6º de Educación Primaria (once y doce años), con los que cuenta un centro escolar público de nivel socio-económico medio-bajo situado en una localidad del área metropolitana de Valencia, seleccionado de forma intencional. Es obvio que el conjunto de participantes no representa la población (57814 personas de once y doce años, de Valencia, a 1 de enero de 2021)¹, y la validez externa del estudio no está garantizada.

3.2 Instrumentos

Se diseñaron unas tareas para realizar con lápiz y papel donde se contemplaron los dos

¹ Información disponible en: <https://www.ine.es/jaxiT3/Datos.htm?t=31304>.

contextos de práctica educativa mencionados anteriormente. Así, se demandó la resolución de dos problemas aritméticos verbales (Problemas 1 y 2), y la solución a dos ejercicios de operatoria (Ejercicio 1) que constaban de operaciones equivalentes a las necesarias para la resolución de los problemas. En todos los casos, la fracción actuó como operador sobre un número natural y sobre un número fraccionario.

Problema 1. A un pozo con 20 litros de agua le vaciamos tres quintas ($3/5$) partes para regar las plantas ¿Cuántos litros se han vaciado?

Problema 2. La mitad ($1/2$) de un pozo está lleno de agua. Si vaciamos la tercera parte ($1/3$) para consumir ¿Qué parte de la cantidad de agua inicial se ha vaciado?

Ejercicio 1. Calcula

a) $3/5$ de 20=

b) $1/3$ de $1/2$ =

En cuanto a los problemas, se pidió a cada estudiante que resolviera de dos modos: de forma gráfica y de forma aritmética. En ambos casos, los enunciados fueron diseñados convencionalmente, de modo que respondieran a la estructura de los PAEV (parte informativa + pregunta), contando con no más de treinta palabras, ubicándose en un contexto o situación cercano a la vida de los estudiantes y evitando cualquier variable contaminante que no fuera de interés en este estudio. La diferencia entre el Problema 1 y el Problema 2 radicó en la cantidad numérica total sobre la que actuaba la fracción como operador; en el Problema 1, el todo sobre el que actuó la fracción era una cantidad natural, mientras que para el Problema 2, el todo sobre el que actuó la fracción fue una cantidad fraccionaria.

En el Ejercicio 1, se mostraron de forma explícita las dos operaciones que se deberían haber realizado en los problemas, pero esta vez sin un contexto, con el fin de obtener posibles diferencias en el éxito de las actuaciones de los estudiantes.

3.3 Variables y medidas

3.3.1 Evaluación de los problemas 1 y 2

Para analizar las dificultades de los estudiantes en las resoluciones, se tuvo en cuenta lo que los sujetos expresaron por escrito y, a partir de las resoluciones de dos expertos a ambos problemas, se efectuó una comparación y una categorización, en función del éxito en la resolución.

La categorización debida a su naturaleza fue dicotómica. De este modo, de cada una de las variables que se definirán a continuación se obtuvo una medida de tipo nominal que puede responder a un 0 o a un 1, siendo 0, siempre que no se cumplan las condiciones establecidas

para el valor 1. Para cada variable, en concreto, fueron diferentes las consideraciones que dieron lugar a la obtención de estos dos valores, por ello se especifica, ahora, cada variable de estudio con sus respectivas matizaciones, teniendo en cuenta que la codificación realizada se hizo siguiendo el siguiente criterio:

1. La primera inicial siempre será (P) y corresponde a la palabra problema.
2. La segunda inicial marca el tipo de número Natural (N) o Fraccionario (F).
3. La tercera inicial, en caso de existir, corresponde al tipo de resolución, Aritmética (A) o Gráfica (G).

Así las variables se detallan a continuación:

- PNA: nivel de éxito en la resolución aritmética del PAEV donde la fracción actúa como operador sobre un número natural.

Se otorgó un 1 cuando en la respuesta se mostraron, explícitamente, las dos operaciones aritméticas necesarias (multiplicación y división) y el resultado final fue el correcto. No fue condición indispensable que las operaciones se expresaran bajo la estructura de fracción como operador.

- PNG: nivel de éxito en la resolución gráfica del PAEV donde la fracción actúa como operador sobre un número natural.

Se otorgó un 1 cuando la respuesta mostró un único gráfico del total dividido en las partes que se demandaron (iguales), se mostrasen sombreadas/indicadas las partes que correspondían, y se haya indicado, en número, qué valor correspondía a cada parte del dibujo en relación a los datos. Se aceptaron las diferentes posibilidades en que se podía representar gráficamente en base a los múltiplos y submúltiplos de los datos proporcionados.

- PFA: nivel de éxito en la resolución aritmética del PAEV donde la fracción actúa como operador sobre un número fraccionario.

Se otorgó un 1 cuando en la respuesta se mostró, explícitamente, la operación aritmética necesaria (multiplicación) y el resultado final fue el correcto (estuviera expresado en forma de fracción o mediante un decimal). No fue condición indispensable que la operación se expresase bajo la estructura de fracción como operador.

- PFG: nivel de éxito en la resolución gráfica del PAEV donde la fracción actúa como operador sobre un número fraccionario.

Aquí, se codificó con un 1 cuando la respuesta mostró un único gráfico del total dividido en las partes que se demandaron (iguales), se mostrasen sombreadas/indicadas las partes que correspondieran y se hubiera indicado, en número, qué valor correspondía a cada parte del

dibujo en relación a los datos.

- PN y PF: nivel de éxito en el PAEV donde la fracción actúa como operador sobre un número natural y un número fraccionario, respectivamente.

Estas variables lo que permitieron medir fue el nivel de éxito total para el problema de número natural (Problema 1) y número fraccionario (Problema 2) considerando, al mismo tiempo, los dos tipos de resolución (aritmética o gráfica). En este caso, la codificación se estableció con un valor=1 cuando los dos resultados del Problema 1 se hubieron codificado con un 1 (en base a los motivos especificados anteriormente) y con un valor=0 cuando, como mínimo, una de las dos respuestas presentó un valor=0.

3.3.2 Evaluación del Ejercicio

Puesto que son dos las operaciones aritméticas que se encontraban en el ejercicio, las únicas variables que aquí se consideraron fueron las siguientes:

- OPN: nivel de éxito en la operación: fracción de un natural.
- OPF: nivel de éxito en la operación: fracción de una fracción.

Al tratarse de variables de tipo categóricas dicotómicas, esta vez también se obtuvo una medida de tipo nominal para cada una de ellas que pudo responder a los valores de 0 y 1. En este caso, se otorgó un valor=0 cuando no se realizaron las operaciones aritméticas adecuadas para cada caso o cuando el resultado no fue el correcto y un valor=1 en caso contrario a los motivos anteriores.

3.4 Procedimiento de recogida y análisis de datos

Puesto que el presente estudio tuvo lugar durante el estado de alarma decretado en España desde el día 14 de marzo hasta el 21 de junio de 2020, acudir a los centros educativos era una tarea restringida, por tanto, los diferentes instrumentos de recogida de datos antes explicados se tuvieron que facilitar a distancia, a través de recursos online.

En primer lugar, se facilitó por el correo personal del centro educativo a cada estudiante del grupo de sexto los problemas. Ante ello, los padres y madres debían grabar a sus hijos efectuando la tarea, desde el momento en que la dan por iniciada hasta que los estudiantes la dan por finalizada. Era importante que no se viera el rostro de los estudiantes, que no se hubiera aportado información previa sobre los problemas a los niños y que los padres y madres contestaran con precisión cualquier pregunta o duda que a sus hijos les surgiera. Tras su

ejecución, debían aportar la grabación de cada estudiante junto con una imagen final de los problemas para evitar posibles errores en la visualización.

En segundo lugar, una semana más tarde, también mediante correo electrónico, se proporcionó el ejercicio correspondiente a la operatoria y, a diferencia de los problemas, aquí solo se reclamó que, al finalizar el ejercicio, los padres y madres enviaran una imagen la solución. Finalmente, una vez recogidos todos los datos necesarios a través de los instrumentos de evaluación, el siguiente paso fue establecer el tratamiento de los datos en función de los objetivos propuestos. Para ello, teniendo presente las variables e indicadores a estudiar según cada herramienta utilizada y las diferentes medidas de evaluación optadas, se procedió al análisis de los datos:

Para el análisis de los problemas se tomaron los veinte videos e imágenes del proceso y las respuestas a los problemas por parte de los estudiantes y se codificaron en términos de las variables de estudio según fuera el valor de 0 o 1. A continuación, una vez distribuidas las respuestas con sus códigos en cada variable se efectuaron dos tipos de análisis. Por un lado, un análisis descriptivo donde se observase la frecuencia en cada uno de los valores de la codificación (0 o 1) para cada una de las seis variables que se consideran (PNA, PNG, PFA, PFG, PN, PF) y un análisis inferencial donde se estudiase la relación entre los diferentes pares de esas variables en función de las preguntas de investigación y objetivos propuestos.

Así, puesto que la información recogida por este primer instrumento (junto con el tratamiento de sus variables) se determinaron las acciones investigadoras 1, 2 y 3, estudiándose la relación entre los siguientes pares de variables:

- PNA vs PNG: mide si existe o no relación entre los dos métodos (aritmético y gráfico) en que se resuelve el problema donde la fracción como operador actúa sobre un número natural.
- PFA vs PFG: mide si existe o no relación entre los dos métodos (aritmético y gráfico) en que se resuelve el problema donde la fracción como operador actúa sobre un número fraccionario.
- PN vs PF: permite saber si considerando a la vez ambos tipos de resolución (aritmético o gráfico) hay relación entre ambos problemas que presentan diferentes números (natural en caso del Problema 1 y fraccionario en caso del Problema 2). Por ello, previamente a estudiar PN vs PF, primero se investigó sobre estos pares de variables.
- PNA vs PFA: mide si existe o no relación entre los dos problemas donde la fracción como operador actúa sobre números diferentes, al efectuar ambos por el método aritmético.

- PNG vs PFG: mide si existe o no relación entre dos problemas donde la fracción como operador actúa sobre números diferentes, al efectuar ambos por el método gráfico.

A continuación, respecto al Ejercicio 1, puesto que se trató de una herramienta de evaluación que se rige por los mismos criterios de medida que los problemas, esto es que los resultados se codifican bajo el valor de 0 y 1, para su análisis se efectuaron los dos mismos tipos de análisis (descriptivo e inferencial) pero en base, ahora, a las veinte imágenes correspondientes a los resultados de los estudiantes en el Ejercicio 1. Como lo que se quiso averiguar es si los alumnos mostraban diferencias en sus resultados según se presentase el contenido de fracción como operador mediante un PAEV o mediante la situación multiplicativa formal (operatoria), se pudieron determinar las acciones de investigación 4 y 5. Aquí, no solo interesó conocer la frecuencia de cada valor para cada variable, sino que se hizo preciso recurrir a ciertas variables ya definidas. Para ello, se efectuó el estudio de los siguientes pares de variables:

- OPN vs PNA: mide la relación entre los resultados de los alumnos al problema de número natural (Problema 1) y los resultados de los mismos a la operación donde la fracción actúa sobre un número natural.
- OPF vs PFA: mide la relación entre los resultados de los alumnos al problema de número fraccionario (Problema 2) y los resultados de los mismos a la operación donde la fracción actúa sobre otra fracción.

Notar que para el tratamiento cuantitativo de los datos se tomaron en cuenta el Test de Fisher (TF) para evaluar la asociación, la V de Cramer (VC) para determinar la fuerza de la asociación y, finalmente, el Test de proporciones (TP) para analizar las posibles diferencias entre las categorías.

4 Resultados

Para redactar los resultados se acaecieron los siguientes puntos: modo de resolución y nivel de éxito en los problemas, donde se analizan y muestran los resultados de ambos problemas por separado; relación entre las variables de los problemas donde se relacionan y comparan variables iguales entre ambos tipos de problemas; influencia del dominio de la operatoria que permite analizar contrastes en relación con la resolución aritmética de los PAEV; indicadores de dificultades y obstáculos en el alumnado que muestra a nivel teórico qué elementos les han generado dificultad.

4.1 Modo y Éxito en la resolución de problemas

Por lo que respecta al Problema 1, donde la fracción actúa sobre un número natural, todos los estudiantes respondieron (o lo intentaron) a las dos formas de resolución del problema.

Además, se registraron resultados más exitosos en la resolución aritmética que en resolución gráfica; quince estudiantes efectuaron correctamente la resolución aritmética, pero solo seis de ellos hicieron bien la resolución gráfica.

En total, cinco estudiantes de veinte resolvieron bien el Problema 1. Véanse estas concreciones en la Figura 1.

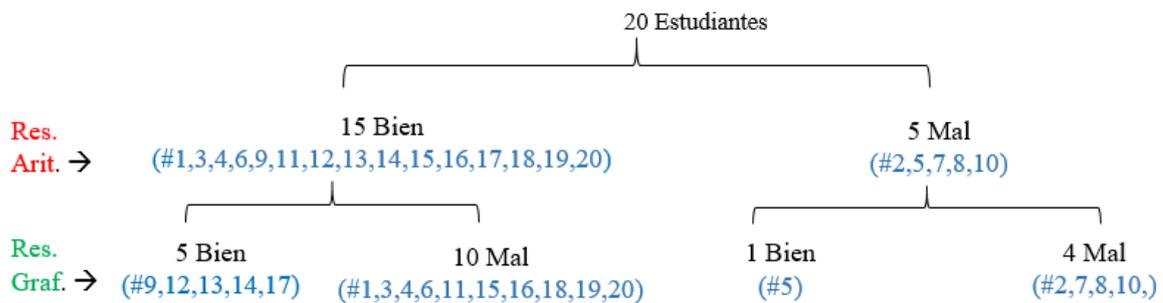


Figura 1 - Clasificación de los estudiantes según el éxito en el Problema 1
Fuente: elaborada por el autor

A continuación, en referencia al Problema 2 cabe destacar que no todos los estudiantes respondieron a las dos formas de resolución de este problema, ya que varios dejaron en blanco la respuesta que se demandaba en el tipo de resolución correspondiente, esto se consideró como un resultado no exitoso (categorizado con valor= 0).

En este caso, se registraron mejores resultados en resolución gráfica en relación con la aritmética; dos correctos en gráfica frente a un en aritmética.

En su totalidad, ningún estudiante tuvo los dos tipos de resolución bien. Véanse las concreciones en la Figura 2.

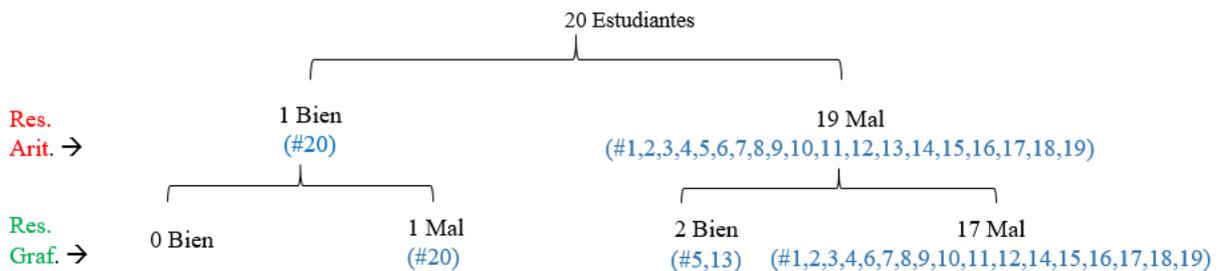


Figura 2 - Clasificación de los estudiantes según el éxito en el Problema 2
Fuente: elaborada por el autor

4.2 Relación entre las variables de los problemas

A partir de la codificación en términos de éxito (1) o de error (0) de los resultados de los estudiantes de EP en los problemas, se ha creado la Tabla 1 donde aparecen las variables a considerar acompañadas de su frecuencia según el análisis descriptivo efectuado.

Tabla 1 - Frecuencia de valores para cada variable obtenida de los estudiantes de Primaria

| <i>Variable</i> | <i>Error (0) (frecuencia absoluta)</i> | <i>Éxito (1) (frecuencia absoluta)</i> | <i>Total</i> |
|-----------------|--|--|--------------|
| PNA | 5 | 15 | 20 |
| PNG | 14 | 6 | 20 |
| PFA | 19 | 1 | 20 |
| PFG | 18 | 2 | 20 |
| PN | 15 | 5 | 20 |
| PF | 20 | 0 | 20 |
| OperatoriaN | 3 | 17 | 20 |
| OperatoriaF | 6 | 14 | 20 |

Fuente: elaborada por el autor

Asimismo, se presenta la Figura 3, dónde se representan todas las variables de la Tabla 1, considerando sus proporciones, herramienta muy útil para iniciar predicciones acerca de las posibles diferencias significativas entre las variables que se estudian a continuación.

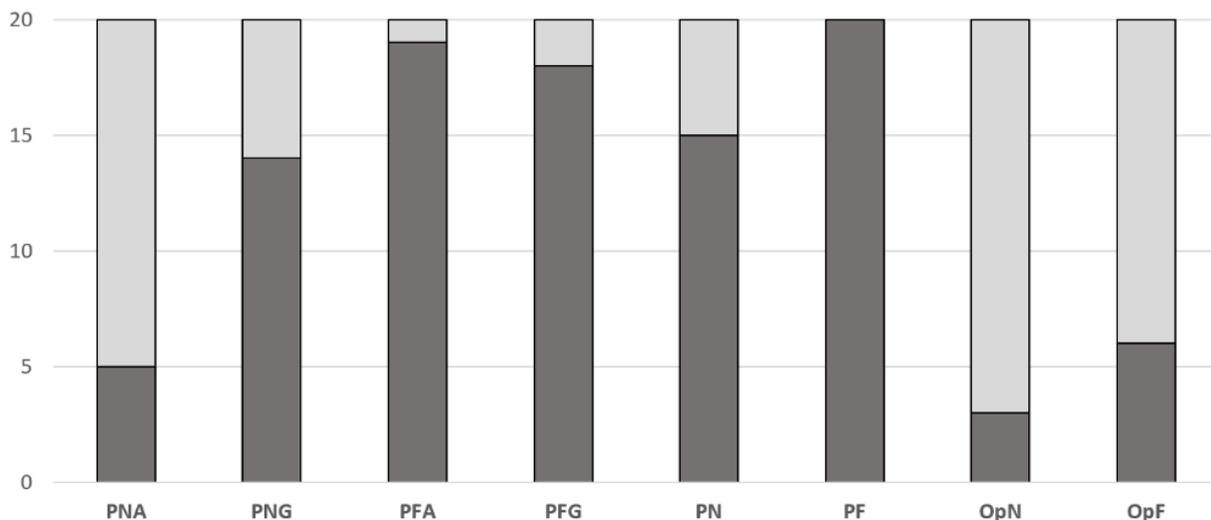


Figura 3 - Proporciones correspondientes a las variables del estudio para el alumnado.

Gris oscuro (éxito), gris claro (error)

Fuente: elaborada por el autor

4.3 Asociación entre las variables PNA vs PNG y PFA vs PFG

El estudio de estos pares de variables permitió observar si para cada problema existían diferencias significativas entre la resolución aritmética y la gráfica. Visualmente se observó (Figura 3) que existen diferencias entre la resolución aritmética y gráfica efectuada para cada uno de los problemas, tanto en el de número natural como fraccionario.

Numéricamente, el estadístico TF indicó que sí existe asociación entre el éxito en resolución aritmética y gráfica, en el número natural (TF=8.42; $p=0.010$) siendo la fuerza de asociación entre ellas mediana (VC = 0.451). Además, también se registraron diferencias significativas entre ambas resoluciones cuando se trató de un número natural (TP=6.416; $p=0.011$).

A continuación, por lo que respecta al problema de número fraccionario, no se obtuvo asociación entre el éxito en resolución aritmética y gráfica (TF=0.3620; $p=1$), siendo la fuerza de asociación débil o pequeña (VC=0.095). Además, tampoco se registraron diferencias significativas entre ambas resoluciones cuando se trató de un número fraccionario (TP=0,117; $p=1$).

Asociación entre PN vs PF

Una vez analizados los dos problemas de manera independiente, se pretendió observar la relación existen entre los resultados totales del problema con cantidad total natural (Problema 1) y cantidad total fraccionaria (Problema 2).

Para ello, se hicieron tres comprobaciones: PNA vs PFA, PNG vs PFG y PN vs PF

- PNA vs PFA

Teniendo en cuenta la resolución aritmética en ambos problemas, visualmente se observaron (Figura 3) posibles diferencias entre la resolución aritmética efectuada para el problema de número natural y esa misma resolución efectuada para el problema de número fraccionario. Numéricamente, TF=20.417; $p=0.001$, indicando que sí, existía asociación entre ambas variables, con una fuerza de asociación grande (VC=0.714). Además, existieron diferencias significativas para el éxito entre número natural y fraccionario para el caso de resolución aritmética (TP=17.604; $p=0.001$).

- PNG vs PFG

Teniendo en cuenta la resolución gráfica de cada problema, visualmente se observaron (Figura 3) posibles diferencias en este tipo de resolución entre ambos problemas. Sin embargo, el valor determinado por el análisis numérico (TF= 2.500; $p=0.235$; VC=0.25; TP=1.406; $p=0.235$), indicó que no existían diferencias significativas y que no había asociación entre

las variables al considerarse la fuerza entre ambas, pequeña.

- PN vs PF

Al considerarlos globalmente, no existieron evidencias que pudieran determinar unas diferencias significativas entre ambos (TP=3.657; P=0.056); aunque sí, que existía asociación (TF= 5.714; p=0,047; VC =0.378).

4.4 Influencia del dominio de la operatoria

Por lo que respecta al Ejercicio 1 sobre la operatoria, tras analizar las respuestas de los estudiantes y codificarlas en términos de éxito (1) o de error (0), se observó que, para la primera operación, diecisiete de veinte estudiantes sí supieron hacer la operatoria cuando la fracción actuó sobre un número natural, mientras que, para la segunda operación, son catorce estudiantes de veinte quienes sí supieron hacer la operatoria cuando la fracción actuó sobre un número fraccionario. Además, puesto que la operatoria se consideró condición necesaria (no suficiente) para la resolución aritmética de los problemas 1 y 2 anteriores, se expone, a continuación, la relación entre el éxito en ejercicio y los problemas 1 y 2 a través de la Tabla 2.

Tabla 2 - Clasificación de estudiantes según su nivel de éxito o error en operatoria en relación a la resolución aritmética de los problemas 1 y 2

| | | | | |
|---------------------|--|------------------|--|------------------|
| <i>Problema 1</i> | <i>Éxito (15)</i> | | <i>Error (5)</i> | |
| | #1,3,4,6,9,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 | | #2,5,7,8,10 | |
| <i>Ejercicio 1a</i> | <i>Éxito (13)</i> | <i>Error (2)</i> | <i>Éxito (4)</i> | <i>Error (1)</i> |
| | #1,3,6,9,11,12,14,15,16,17,18,19,20 | #4,13 | #2,5,8,10 | #7 |
| <i>Problema 2</i> | <i>Éxito (1)</i> | | <i>Error (19)</i> | |
| | #20 | | #1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19 | |
| <i>Ejercicio 1b</i> | <i>Éxito (1)</i> | <i>Error (0)</i> | <i>Éxito (13)</i> | <i>Error (6)</i> |
| | #20 | | #3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18 | #1,2,4,7,17,19 |

Fuente: elaborada por el autor

De ello se destaca que, en el caso donde la fracción como operador actuó sobre un número natural (Ejercicio 1a), dos (#4,13) de los estudiantes que efectuaron bien la resolución aritmética del Problema 1, realizaron mal la operatoria, mientras que de los cinco estudiantes que efectuaron mal el problema, cuatro (#2,5,8,10) efectuaron bien la operatoria. Del mismo modo, cuando la fracción como operador actuó sobre otra fracción (Ejercicio 1b), se observa

que trece de los diecinueve estudiantes que tuvieron mal el problema, sí supieron hacer la operatoria.

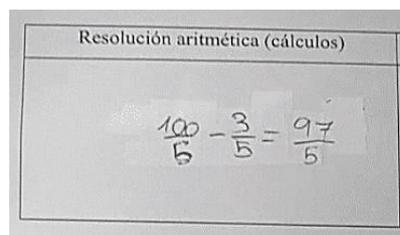
Al respecto de la asociación entre estas dos variables y la resolución de problemas se analizó PNA vs OPN y PFA vs OPF.

De forma visual, la Figura 3 muestra posibles relaciones significativas entre las variables centradas en un número fraccionario. Del mismo modo, numéricamente se confirmó el hecho de que mientras que para PNA vs OPN la fuerza de asociación entre las variables fue débil (TF=1.2903; $p=0.4506$; VC=0.18) y las diferencias entre los éxitos de ambas variables no fueron significativas (TP=0.449), para PFA vs OPF los resultados reflejaron lo contrario (TF=21.538; $p<0.001$; VC=0.734; TP=<0.001).

4.5 Indicadores de dificultades y obstáculos en el alumnado

Una vez analizados los resultados, se procede a explicar algunos de los obstáculos y/o dificultades presentes en los estudiantes motivo de sus respuestas ante los problemas y el ejercicio.

Por lo que respecta a los problemas se identifica que, para el Problema 1, en sus respuestas a la resolución aritmética, cuatro estudiantes efectuaron una resta en lugar de una multiplicación, lo que sugiere que asociaron *vaciar* con quitar (Figura 4).

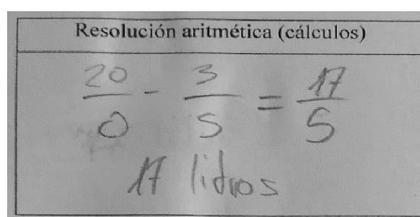


Resolución aritmética (cálculos)

$$\frac{100}{5} - \frac{3}{5} = \frac{97}{5}$$

Figura 4 - Ejemplo de respuesta estudiante #10: asociar el problema 1 a una resta al resolver aritméticamente
Fuente: datos de investigación

En casos puntuales, como ahora, los sujetos 5 y 8 manifestaron carencias en cuanto a las reglas de las fracciones; indicaron que el 0 podía actuar de denominador, o no efectuaron el mínimo común múltiplo para realizar suma entre fracciones (Figura 5).



Resolución aritmética (cálculos)

$$\frac{20}{0} - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

17 litros

Figura 5 - Ejemplo de respuesta estudiante #8: considerar el 0 como posible denominador
Fuente: datos de investigación

De hecho, de los quince sujetos que sí ejecutaron bien la resolución aritmética, siete no definieron, explícitamente, la condición de operador (Figura 6).

Figura 6 - Ejemplo de respuesta estudiante #1: no se define explícitamente la condición de operador
Fuente: datos de investigación

Sin embargo, en las resoluciones gráficas se encontraron más obstáculos, se observaron carencias como no saber determinar un resultado en base a la representación de los datos, no diferenciar la representación de las fracciones propias e impropias y no respetar la división igualitaria de las partes, así como no saber elegir el gráfico que mejor se adapte (Figura 7).

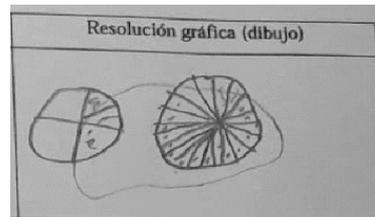


Figura 7 - Ejemplo de respuesta estudiante #4: no respetar la división igualitaria de las partes de un gráfico
Fuente: datos de investigación

A continuación, en referencia al Problema 2, también se observaron dificultades en ambos métodos de resolución, la mayoría muy similares a las del problema anterior. A nivel aritmético, se identificó que doce estudiantes efectuaron una resta en lugar de una multiplicación, tres no efectuaron el mínimo común múltiplo al realizar sumas y restas de fracciones y ningún sujeto indicó, explícitamente, la condición de operador. A nivel gráfico, la resolución se vio afectada por las operaciones de la parte aritmética, ya que la mayoría trató de imitar las operaciones, pero dibujando cajitas independientes y operando restas o sumas, según habían efectuado en la aritmética (Figura 8).

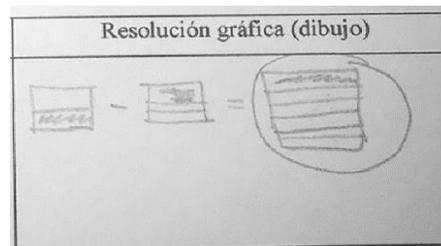


Figura 8 - Ejemplo de respuesta estudiante #19: resolución gráfica afectada por la resolución aritmética
Fuente: datos de investigación

Por último, respecto al ejercicio sobre operatoria, las dificultades que más destacaron fueron la aplicación de la regla de operador al revés, asociar la condición de operador a otra

operación aritmética como la suma o la resta, o efectuar mal el cálculo de las operaciones (Figura 9).

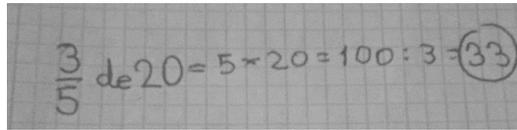

$$\frac{3}{5} \text{ de } 20 = 5 \times 20 = 100 : 3 = 33$$

Figura 9 - Ejemplo de respuesta estudiante #13: aplicación de la regla de operador al revés
Fuente: datos de investigación

5 Discusión y conclusiones

El presente trabajo permite determinar que existen dos elementos principales en los problemas aritmético verbales estudiados, que generan relevantes diferencias en la consideración final de los resultados. Con ello nos referimos, por un lado, a la cantidad o todo sobre el que actúa la fracción como operador, según sea un número natural o fraccionario y, por otro lado, al método de resolución que se pide según sea aritmético o gráfico.

Los resultados que se derivan apuntan a un registro de mejores calificaciones cuando la fracción opera sobre un número natural, y no la fracción actúa sobre otra fracción. Este hecho puede resultar obvio, debido a que se puede justificar en la premisa de que los números naturales son un contenido más sencillo e introducido en la educación escolar con anterioridad. Sin embargo, una justificación alternativa, probablemente más sofisticada, es la aportada por Kieren (2020) o Ríos (2007), quienes apuntan a que, en la didáctica de las fracciones, el contexto que más se domina es el discreto, puesto que suele predominar la interpretación de parte-todo enseñada normalmente a través de representaciones gráficas de objetos o cantidades discretas.

Además, un estudio reciente (SANZ *et al.*, 2020) acerca de la relación entre la complejidad – medida a través del tiempo de lectura del propio enunciado – y el éxito en la resolución de problemas con las mismas características que los presentes en este estudio, muestran que están relacionados, siendo más complejos aquellos cuyo todo es una fracción.

A continuación, considerando cada método de resolución, la mayoría de los participantes obtienen un mayor nivel de éxito en la resolución aritmética frente a la gráfica, para el caso dónde el todo es natural; sin embargo, cuando el todo es un número fraccionario esto no sucede así. No obstante, este último dato no es recurrente, ya que el éxito en gráfica no se debe a que demuestren dominar el método gráfico frente al desarrollo aritmético, sino que de veinte estudiantes solo dos han conseguido éxito en gráfica, frente a un que ha efectuado correctamente la aritmética, ya que el resto o no ha respondido al problema o no ha sabido hacerlo. Además, considerando la resolución gráfica, en ambos casos los resultados también

apuntan a un nivel más exitoso cuando se trata de un número natural y no de un fraccionario.

De este modo, frente a estas ideas, son varias las consideraciones a las que se debe recurrir en busca de una posible justificación.

Por lo que respecta a la diferencia en el nivel de éxito, según el método de resolución que se pide, una de las referencias importantes es el papel que juegan los materiales curriculares españoles en base a lo establecido en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero (ESPAÑA, 2014), ya que puesto que en tal documento la representación gráfica se incluye como uno de los contenidos clave en relación con las fracciones hasta 3º curso de educación primaria, posteriormente, este tipo de representación pasa a un segundo plano, siendo sustituida por la priorización del tratamiento aritmético de las operaciones con fracciones. De hecho, es tanta la importancia que se da al tratamiento aritmético desde una perspectiva teórica que, de acuerdo con Pino y Blanco (2008), la mayoría de actividades que se practican en la escuela, hoy en día, están más enfocadas al asentamiento de conocimientos que a considerarse un espacio donde producir nuevos saberes matemáticos.

Una consecuencia clara de esto son los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio de operatoria frente a la resolución de problemas. Como se ha visto, de manera contraria al estudio efectuado por Hart *et al.*, (1981), en esta ocasión el nivel de éxito general ha sido mayor cuando se pide al estudiante que resuelva el cálculo de la situación multiplicativa formal y no cuando se pide la resolución de un problema, tratándose en ambos casos de los mismos contenidos. Pero sí, que sigue los estudios efectuados por Sanz, Figuera y Gómez (2018). Por tanto, esto apunta a una carencia en la plena asimilación del concepto de fracción, al no saber integrar un mismo contenido en situaciones diversas, consecuencia del aprendizaje a través de regla, memorísticas.

Seguidamente, ubicándonos ahora en el subconstructo de fracción como operador en comparación con el resto de interpretaciones de la fracción, cabe apuntar, que más allá del tratamiento gráfico o aritmético de los datos, o de la consideración en favor de un menor o mayor tratamiento de la resolución de problemas en la práctica educativa, la aportación que en mayor grado permite justificar los resultados obtenidos en esta investigación, se resume en la visión pluralista en la que se introduce el concepto de fracción en las aulas, lo que Llinares y Sánchez (2000) consideran como un camino que conduce a un conocimiento atrofiado. De ahí que la mayoría confundan la función del operador con un problema matemático donde debe efectuarse una resta, tal y como indican Sanz, Figuera y Gómez (2018, 2019).

Sin ir más lejos, se confirma la premisa de Freudenthal (1983) criticando la enseñanza impartida. En ella no se consideraba la complejidad de las fracciones en la evolución del

aprendizaje de los niños, sino que se ejecutaba a través del desarrollo de conceptos. Este autor remarca que el desarrollo de conceptos solo sirve para acentuar el aspecto formal de las definiciones y la fragmentación de las relaciones con otros contenidos matemáticos, de modo que los conceptos quedan aislados en la mente del alumno, impidiendo que los aplique en la resolución de problemas asociados a la vida cotidiana, por no fundamentarse en la experiencia del estudiante.

En conclusión, parece ser que conocer el origen y evolución de las dificultades presentes en los estudiantes para el contenido que aquí se investiga, debe ir más allá de las complejidades características de la propia naturaleza matemática, por ello, ante la insistente importancia de la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas, parece importante evaluar hasta qué punto la enseñanza en primaria está siendo funcional por lo que respecta a la didáctica de las fracciones. Es necesario detectar aquellos aspectos que podrían ser mejorados durante la formación inicial en la universidad y, posteriormente, en la enseñanza a los estudiantes, para ofrecer, así, una formación más competente que desencadene en uno resultados más prometedores por parte de los estudiantes en su formación básica.

Referencias

- ALIBALI, M. W.; SIDNEY, P. G. Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. **Learning and Instruction**, London, v. 37, p. 56–61, 2015.
- BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational Number Concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.
- BORASI, R. On the nature of Problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 17, p.125–141, 1986.
- BUTTO, C. El aprendizaje de fracciones de educación primaria una propuesta de enseñanza en dos ambientes. **Horizontales Pedagógicos**, Bogotá, v.15, n.1, p.33-45, 2013.
- CEBALLOS, L.; MURILLO, A. Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones. **Revista Científica**, Bogotá, v. 14, p. 253-257, 2013.
- CRAMER, K. Numerical Reasoning: Number and Operations with Fractions. *In*: BATTISTA, M. (ed.). **Reasoning and Sense making in the Elementary Grades 3-5**. Reston, VA: NCTM, 2017. p. 43 - 66.
- DOYLE, K. M.; DIAS, O.; KENNIS, J. R.; CZARNOCHA, B.; BAKER, W. The rational number sub-constructs as a foundation for problem solving. **Adults Learning Mathematics: An International Journal**, London, v. 11, n. 1, p. 21-42, 2015.
- DUVAL, R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La gaceta de la rsme**, Madrid, v. 9, n. 1, p. 143–168, 2006.

EGODAWATTE, G. **Secondary school students' misconceptions in Algebra**. 2011. Thesis (Doctorate in Philosophy) - Department of Curriculum, Teaching and Learning, Universidad de Toronto, Toronto, 2011.

ESCOLANO, R.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Unión: revista iberoamericana de educación matemática**, Andújar, v. 1, p. 17-35, 2005.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht, Países Bajos: Reidel, 1983.

GÓMEZ, B.; CONTRERAS, M. Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. **PNA**, Granada, v. 3, n. 4, p. 169-183, 2009.

GÓMEZ, B.; SANZ, M. T.; HUERTA, I. Problemas Descriptivos de fracciones. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, p. 586-604, 2016.

HART, K. M.; BROWN, M. L.; KUCHEMANN, D. E.; KERSLAKE, D.; RUDDOCK, G.; MCCARTNEY, M. **Children's understanding of mathematics**. Dordrecht, Holland, and Boston: John Murray, 1981.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA INE. 2021
<https://www.ine.es/jaxiT3/Datos.htm?t=31304>.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. A. (ed.). **Number and Measurement: Papers from a Research Workshop**, ERIC/SMEAC. Georgia: Columbus, 1976. p. 101-144.

KIEREN, T. The rational number constructs. Its elements and mechanisms. *In*: T. KIEREN, T. (ed.). **Recent Research on Number Learning**, Georgia: Columbus, 1980. p. 125-149.

KIEREN, T. Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. *In*: LEINHARDT, G.; PUTNAM, R.; HATTRUP, R.A. (ed.). **Analysis of arithmetic for mathematics teaching**. Routledge: New York, 2020. p. 323-371.

MOSELEY, B. Students' early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 60, p. 37-69, 2005.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2021.

LIVAS, M. L. Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo. **Revista del Centro de Investigación de la Universidad la Salle**, México, D.F., v. 6, n. 22, p. 83-83, 2004.

LLINARES, S. Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. *In*: CHAMORRO, M. (coord.). **Didáctica de las Matemáticas para Primaria**. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2003. p. 187-219.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M. V. **Fracciones: la relación parte todo**. Sevilla: Síntesis, 1988.

LLINARES, C.; SÁNCHEZ, M. Las fracciones: Diferentes interpretaciones. *In*: LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M. (ed.). **Fracciones**. Madrid: Síntesis, 2000. p.52-75.

PINO, J.; BLANCO, L. J. Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para

alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. **Publicaciones**, Granada, v. 38, p. 63-88, 2008.

POLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press., 1945.

PUIG, L.; CERDÁN, F. Problemas y problemas aritméticos elementales. *In*: PUIG, L.; CERDÁN, F. (ed.). **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1988. p. 2-33.

ESPAÑA. **Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero**, por el que se establece el currículo básico de la Educación primaria. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid, España: Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. Disponible en: <https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/02/28/126/con>. Acceso: 25 jul. 2020.

RESNICK, L. B. Instruction and the cultivation of thinking. *In*: CORTE, E.; LODEWIJKS, H.; PARMENTIER, R. (ed.). **Learning & instruction: European research in an international context**. Oxford: Pergamon Press, 1987. p.415-442.

RICO, L. Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. **PNA**, Granada, v. 4, n. 1, p.1-14, 2009.

RÍOS-CUESTA, W. Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo. **Revista Virtual Universidad Católica del Norte**, Medellín, v. 63, p. 196-222, 2021.

RÍOS, Y. Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, D.F., v. 20, p. 270-275, 2007.

SANZ, M. T.; FIGUERAS, O.; GÓMEZ, B. Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. **Revista de Educación de la Universidad de Granada**, Granada, v. 25, p. 257-279, 2018.

SANZ, M. T.; FIGUERAS, O.; GÓMEZ, B. A tool to evaluate students' performance in solving fraction word problems. *In*: U. T. JANKVIST, U. T.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. van den; VELDHUIS, M. (ed.). **Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, 2019. p. 487-494.

SANZ, M. T.; LÓPEZ-IÑESTA, E.; GARCIA-COSTA, D.; GRIMALDO, F. Measuring arithmetic word problem complexity through reading comprehension and learning analytics. **Mathematics**, Switzerland, v. 8, n. 9, p. 1556, 2020.

SCHMIDT, S.; WEISER, W. Semantic Structures of One-Step Word Problems Involving Multiplication or Division. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 28, n.1, p. 55-72, 1995.

STELZER, F.; RICHARD'S, M. M.; ANDRÉS, M. L.; VERNUCCI, S.; INTROZZI, I. Cognitive and maths-specific predictors of fraction conceptual knowledge. **Educational Psychology**, London, v. 41, n. 2, p.172-190, 2021.

STREEFLAND, L. Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. **Educational studies in mathematics**, Dordrecht, v. 9, n. 1, p. 51-73, 1978.

VALDEMOROS, M. E.; RUIZ, E. F. El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, México, D.F., v. 11, n. 1, p. 127-157, 2008.



VALENZUELA, C. **Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets**: estudio en comunidades marginadas. Ciudad de México: Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, 2018.

**Submetido em 05 de Junho de 2021.
Aprovado em 03 de Fevereiro de 2022.**