ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

Modelo Epistemológico de Referência para a Fatoração Implementado por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa no Ensino Fundamental

Epistemological Reference Model for Factoring Implemented through a Study and Research Path in Elementary Education

Míriam do Rocio **Guadagnini***

ORCID iD 0000-0001-9145-9252

Marlene Alves **Dias****

ORCID iD 0000-0001-9168-9066

Resumo

Neste artigo, apresentamos um recorte de um estudo acerca do Modelo Epistemológico de Referência proposto em nossa pesquisa, em consonância com seus objetivos, que foram identificar as praxeologias didáticas e matemáticas existentes para o estudo da fatoração, perceber as relações de estudantes e professores com este objeto e explorar atividades que possam favorecer aplicações em contextos variados intra e extramatemáticos no Ensino Fundamental – Anos Finais no Brasil, a fim de implementar uma engenharia didática do tipo Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). O PEP foi desenvolvido por meio de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) relacionadas às praxeologias matemáticas (PM) identificadas. Tomamos como referência a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, as noções de PEP e AEP enunciadas por Barquero, Bosch e Gascón, e PM definida por Bosch e Gascón. Neste extrato de pesquisa, consideramos a primeira parte do objetivo da pesquisa, a saber: identificar as praxeologias matemáticas e didáticas existentes para o estudo da fatoração numérica e algébrica, ressaltando as possíveis dificuldades que podem ser encontradas em algumas aplicações e mostrando o funcionamento dessas praxeologias, quando da aplicação do PEP com estudantes do Ensino Médio e da Licenciatura em Matemática. O modelo epistemológico de referência permitiu estabelecer as praxeologias matemáticas de referência que auxiliaram na análise *a priori* das AEPs utilizadas no desenvolvimento do PEP. Os resultados mostram que a relação pessoal dos estudantes de ambos os grupos é centrada na aplicação direta das técnicas, e eles apresentaram dificuldades em reconhecer o papel protomatemático da fatoração nas aplicações propostas.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico de Referência. Praxeologias Matemáticas e Didáticas. Fatoração Numérica e Algébrica.

Abstract

In this article, we present a partial study on the Epistemological Model of Reference proposed in our research aligned with its objectives, which were to identify the existing didactical and mathematical praxeology for the study of factorization, to understand the relations of students and teachers with this object, and to explore activities that can favor its applications in varied intra and extra mathematical contexts in the final years of Elementary

* Doutora em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN). Professora na Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: miriamguadagnini@gmail.com.

** Doutora em Matemática pela Universidade de Paris Dennys Diderot (UPPD). Colaboradora no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: maralvesdias@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

School in Brazil. This is to implement a didactical engineering of the Study and Research Path (SRP) type. The SRP was developed through Study and Research Activities (SRA) related to the identified mathematical praxeology (MP). We take as a reference Chevallard's Anthropological Theory of Didactics, the notions of SRP and SRA introduced by Barquero, Bosch, and Gascón, MP defined by Bosch and Gascón. In this research extract, we consider the first part of the research objective, namely: Identifying the existing mathematical and didactical praxeology for the study of numerical and algebraic factorization, highlighting the possible difficulties that may be encountered in some applications and showing the functioning of this praxeology when applying the SRP to high school students and those studying for a Mathematics degree. The epistemological reference model allowed us to establish the reference mathematical praxeology that helped in the prior analysis of the SRA used in the development of the SRP. Results show that the personal relations of students from both groups is centered on the direct application of the techniques, and they had difficulties in recognizing the proto-mathematical role of factorization in the proposed applications.

Keywords: Epistemological Reference Model. Mathematical and Didactical Praxeologies. Numerical and Algebraic Factorization.

1 Introdução

Este trabalho é um recorte de pesquisa desenvolvida em tese de doutorado. A identificação da falta de sentido de objetos matemáticos na escola alimenta nosso questionamento relativo às fontes de dificuldades dos estudantes e professores, quando se trata do estudo da fatoração numérica e algébrica. Sendo assim, iniciamos esta pesquisa com o seguinte questionamento: Como a fatoração é tratada nas instituições de ensino brasileira? Existem novos meios de motivar o seu estudo? Em função desses questionamentos, consideramos como objetivo geral da pesquisa: identificar as praxeologias didáticas e matemáticas existentes para o estudo da fatoração, perceber as relações de estudantes e professores com este objeto e explorar atividades que possam favorecer aplicações em contextos variados intra e extramatemáticos no Ensino Fundamental – Anos Finais no Brasil a fim de implementar uma engenharia didática do tipo Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). Para esse extrato de pesquisa, consideramos apenas a primeira parte do objetivo geral da pesquisa, ou seja: identificar as praxeologias matemáticas e didáticas existentes para o estudo da fatoração, ressaltando as dificuldades que podem ser encontradas em algumas aplicações.

Para atender a esses objetivos, optamos pela Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e seus colaboradores, considerando mais particularmente as noções de: instituição, relação pessoal e institucional, níveis de codeterminação, praxeologia matemática e didática ou organização matemática e didática, na sequência apresentadas como PM e PD. Para complementar o estudo, utilizamos as noções de Modelo Epistemológico de Referência (MER) e o Modelo Didático de Referência (MDR), conforme definições de Bosch e Gascón (2010). Para a realização do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), foram consideradas algumas Atividades de Estudo e Pesquisa, indicadas no texto por AEP.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

Desse modo, iniciamos o estudo a partir das análises das relações institucionais esperadas, respaldando-nos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) como documento oficial. Para o estudo das relações institucionais existentes, analisamos três coleções de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental das décadas de 1960, 1970 e 2010, que perpassamos períodos: da Matemática Moderna, da Matemática voltada para um ensino tecnicista e da Matemática com ênfase na contextualização, respectivamente. A análise dos livros didáticos possibilitou compreender a ecologia dos saberes sobre fatoração que vivem e sobrevivem nas instituições de ensino nos períodos considerados, conforme Chevallard (2002).

Ressaltamos ainda que a Teoria Antropológica do Didático, na sequência TAD, assegura que a Matemática é um saber que nasce e cresce em determinados lugares da sociedade, dependendo das necessidades sociais de transmissão, uso e difusão, o que conduz à possibilidade de esse saber viver em outros lugares. No entanto a distância entre o lugar de origem e o de sobrevivência desses saberes motiva transformações que podem torná-los aptos ou não a enfrentarem situações adversas. Quando aptos, é preciso que os saberes se adaptem à ecologia local, processo denominado por Chevallard (1985) de "condições e restrições" impostas por diferentes instituições para sua sobrevivência.

Por exemplo, a fatoração algébrica na França tem início no "*cinquième*" primeiro ano do "*collège*" (estudantes de 11 anos) por meio da redução de termos semelhantes de uma expressão algébrica, sendo essa técnica revisitada no ano seguinte, "*quatrième*" (estudantes de 12 anos), após a introdução da álgebra e do trabalho algébrico. É somente no "*troisième*" (estudantes de 13 anos) que serão desenvolvidas duas técnicas limitadas aos dois métodos: utilização da distributividade no sentido oposto ao desenvolvimento e dos produtos notáveis, conforme Raad (2004, p. 47). Já no Brasil, a fatoração numérica é introduzida no sexto ano (estudantes de 11 anos) por meio das noções de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum e a fatoração algébrica, no oitavo ano (estudantes de 13 anos), com a introdução da álgebra e do trabalho algébrico, isto é, as primeiras ideias coligadas à álgebra elementar.

Enfatizamos a diferença entre o ensino francês e o brasileiro, pois estes divergem em relação à introdução e às possíveis aplicações, uma vez que, no ensino francês, após a introdução, são desenvolvidas as técnicas considerando o papel de objeto protomatemático da fatoração, aquele que se aprende na prática, sendo assim destacado em aplicações no "*seconde"* (estudantes de 14 anos) e, mais particularmente, no primeiro ano do *"Lycèe"* (estudantes de 15 a 17 anos), quando se inicia o estudo das primeiras noções de análise matemática.

Observamos que, para melhor compreender a ecologia associada ao ensino e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

aprendizagem da noção de fatoração no Brasil, construímos um modelo epistemológico de referência (MER) fundamentado no estudo de Pilet (2012), cuja referência é Bosch e Gascón (1994), e um modelo didático de referência (MDR), seguindo a construção realizada por Ruiz-Munzón (2010). Esses modelos possibilitam a compreensão das condições e restrições impostas pelo ensino vigente, promovendo assim um controle maior das atividades propostas e das possíveis dificuldades encontradas pelos estudantes.

A partir da identificação do MER e do MDR associados ao desenvolvimento da fatoração, elaboramos um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), cuja questão geradora foi "Como desenvolver a fatoração nos Anos finais do Ensino Fundamental?". Esse PEP foi aplicado a dois grupos: o primeiro com dez estudantes do primeiro ano do Ensino Médio e o segundo, composto por sete licenciandos em Matemática que cursavam o segundo ao quarto semestre.

Adiante, apresentamos resumidamente os constructos teóricos escolhidos para conduzir o estudo proposto.

2 Teoria Antropológica do Didático - TAD

A TAD tem sua origem na abordagem teórica do conceito de transposição didática introduzido por Chevallard (1986), que caracterizava o papel do saber nas diferentes instituições, isto é, partindo do saber sábio, que corresponde ao saber do matemático de profissão. A passagem do saber sábio ao saber a ensinar representa a transposição feita pelos especialistas em Educação, geralmente apresentada nos documentos oficiais e nos materiais didáticos. Corresponde às organizações matemáticas e didáticas (OM e OD) ou praxeologias matemáticas ou didáticas (PM e PD) que serão utilizadas pelo professor na transposição ao saber ensinado que, por sua vez, será transformado em saber aprendido pelos estudantes.

A TAD entende a relação pessoal de um indivíduo com um objeto matemático como o conhecimento do indivíduo sobre um determinado objeto do saber, no caso desse extrato: a fatoração. Essa relação manifesta-se no sujeito, quando utiliza os objetos matemáticos nas situações em que são necessários. A relação institucional corresponde às instituições que apresentam o saber em suas diferentes formas, como aparecem na transposição didática. Nesta pesquisa, as instituições consideradas são os documentos oficiais e os livros didáticos.

Observamos que entre as transformações operadas nas diferentes instituições, o saber a ensinar e o saber ensinado serão compostos por praxeologias matemáticas ou didáticas que, segundo Chevallard (1999), possibilitam enquadrar a atividade matemática no conjunto das

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

atividades humanas regularmente desenvolvidas, modelando assim as práticas sociais.

O autor esclarece ainda que o saber não existe em um vácuo social, ele tem por base uma instituição ou várias instituições. A instituição constitui-se em um dispositivo social que torna possível impor regras ou maneiras próprias de fazer e pensar, que não precisam necessariamente ser formalizadas.

Desse modo, Chevallard (1989, 2003) explicita que todo saber vive em uma instituição, sendo ela responsável pela sua produção, gestão e controle; constituindo um conjunto de objetos de ensino, que correspondem à relação institucional com o saber visado. Quando um indivíduo torna-se sujeito de uma instituição, ele ocupa determinada posição, por exemplo, a de aluno, e assim os objetos dessa instituição vivem para ele sob as condições e restrições associadas a essa posição.

A noção de instituição conduz Chevallard (2007) a propor uma nova ferramenta didática denominada de níveis de codeterminação didática, a saber: os níveis superiores representados por humanidade ↔ civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina e os níveis inferiores representados por domínios ↔ setores ↔ temas ↔ tópicos. Segundo o autor, esses níveis permitem identificar o papel dos diferentes atores da relação didática e as condições e restrições conferidas pelos diversos níveis, cada um com suas peculiaridades. As modificações em um nível provocam alterações em todos os outros. Essa noção afere o modo como poderão ser organizadas as praxeologias matemáticas e os dispositivos e gestos necessários às praxeologias didáticas no ensino escolar (ver anexo 1).

A escala de níveis de codeterminação apresentada no Anexo 1 mostra que, na sociedade brasileira, o estudo de determinada noção matemática faz parte de uma escolha centrada no nível escola, o que leva a considerá-la uma responsabilidade política, que será proposta pela noosfera disciplinar que constrói os documentos oficiais, optando pela pedagogia a ser privilegiada, interferindo na disciplina e na disposição dos diferentes domínios e setores.

Chevallard (2002) destaca ainda que, em sua maioria, os professores ficam restritos somente aos níveis temas e tópicos, apresentando um ensino muito compartimentado; o ideal é que acedessem pelo menos aos níveis setores e domínios, o que possibilitaria aos estudantes avançarem na resolução de tarefas de aplicações dos conhecimentos desenvolvidos nos níveis temas e tópicos em situações mais variadas. Essa restrição aos temas e tópicos é evidente para o caso da fatoração numérica no Brasil, visto que esta é tratada no sexto ano do Ensino Fundamental e não é revisitada quando da introdução da fatoração algébrica.

Outro constructo teórico da pesquisa é a noção de praxeologia que, segundo Chevallard (1999), corresponde a um saber que se organiza de dois modos diferentes: o da práxis, ligado

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

ao saber-fazer e o do logos, associado ao saber. A noção de praxeologia está associada aos tipos de tarefas (T), sendo o termo tarefa o ato de realizar alguma atividade conexa a um gênero de tarefa expressa por um verbo; por exemplo: fatorar, calcular, desenvolver, expressar, determinar ou resolver são gêneros de tarefa.

Assim, para Chevallard (1999), uma praxeologia corresponde aos tipos de tarefas (T) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada técnica (τ), a qual requer uma tecnologia (θ), que corresponde a um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), constitui uma praxeologia, indicado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Exemplos de praxeologias: fatorar uma equação do segundo grau ou ainda um exemplo do cotidiano, a saber: arrumar uma mesa.

Outro elemento da TAD importante para o estudo da fatoração é a noção de objeto protomatemático, uma vez que Chevallard (1985), Mercier (2002) e Constantin (2015) a arrazoam como um objeto protomatemático.

Mercier (2002) observa que objetos protomatemáticos são aqueles associados às competências ou capacidades, sendo construídos na prática e só podem viver, enquanto práticas, em situações que podem ser analisadas como comportamentos autoevidentes esperados dos estudantes, já que são evocados pela situação, ou seja, representam a capacidade de reconhecimento de um caso de fatoração a ser aplicado na ocasião do estudo de novos saberes. Como exemplo de objetos protomatemáticos, Mercier (2002) indica: o reconhecimento de uma expressão polinomial de grau dois advinda de uma fatoração simples, saber que um cálculo não está terminado, fatorar o resultado encontrado na primeira derivada para efetuar o cálculo da segunda derivada.

Constantin (2015) ilustra a dificuldade protomatemática em reconhecer a fatoração representada pela soma de dois binômios. Por exemplo, para fatorar a expressão $B = (x^2 - 4x) + 2(x - 4)$, a técnica consiste em fatorar o primeiro binômio para escrever $B = x(x - 4) + 2(x - 4)$, isto é, primeiro utiliza-se a noção de fator comum em evidência; na sequência, o agrupamento, para finalmente obter B, o produto dos dois binômios, ou seja, o estudante tem de perceber e visualizar diferentes casos de fatoração a serem empregados.

Outros constructos importantes para o desenvolvimento da pesquisa são as noções de Modelo Epistemológico de Referência, na sequência MER, e Modelo Didático de Referência, MDR. Segundo Bosch e Gascón (2010), esses modelos estão centrados nos conceitos de ensinar e de aprender; assim a construção de um MDR depende da interpretação do MER. O MDR

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

mantém-se implícito, não sendo questionado e justificado explicitamente, uma vez que utiliza apenas critérios genéricos do senso comum. Isso conduz os autores a associarem esses critérios a MDR espontâneos, como podemos constatar na seguinte citação:

> Ao longo da história, encontramos múltiplas formas de organizar o ensino escolar de Matemática. Todas elas se apóiam de certa forma, em uma maneira prática de interpretar a Matemática – *um modelo epistemológico* – estritamente relacionado com uma conceitualização concreta do que se entende por “ensinar e aprender Matemática” em cada momento histórico, em cada tradição cultural e em cada instituição: o que podemos considerar como *um modelo didático*. Na medida em que os modelos didáticos se mantêm implícitos, a salvo de todo questionamento e, sobretudo, na medida em que as maneiras de organizar o ensino de Matemática se apresentam como se não necessitassem de nenhum tipo de justificativa em fundamentação explícita, além de critérios genéricos que emanam principalmente do senso comum, diremos que se trata de *modelos didáticos espontâneos* (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 56, tradução nossa).

Observamos que o ensino da fatoração no Brasil segue MDR espontâneos centrados na apresentação dos diferentes casos possíveis e aplicações diretas desses casos, o que ocorre no decurso de apenas um bimestre, com pouca ênfase nas possíveis aplicações, quando da introdução de novos saberes, ou seja, empobrecem assim a utilização dos MER que os sustentam.

Voltando à pesquisa de Bosch e Gascón (2010), salientamos que os pesquisadores, ao esclarecerem as funções desses modelos, associam-nos à escala dos níveis de codeterminação, indicando a possibilidade de fazer a triagem das condições e restrições que governam o estudo escolar, e possibilitando efetuar escolhas que evitem um desequilíbrio muito flagrante. Isso conduz os autores a assinalarem a importância de tratar as praxeologias obedecendo às condições e restrições provenientes dos níveis superiores, quando da construção dos MDR, como podemos observar no extrato que segue.

> [...] isto é, entre as organizações matemáticas escolares e as correspondentes organizações didáticas, podemos considerar modelos didáticos de referência que sejam, em primeira instância, específicos de um tema, de um setor, ou de um domínio da Matemática escolar. Porém, igualmente ao que se passa com o MER, a estrutura e a dinâmica dos citados MDR devem ser coerentes com um modelo didático de referência geral, cuja descrição se formula no nível da disciplina (Matemática, neste caso) levando em consideração as condições e restrições provenientes dos níveis mais genéricos de codeterminação, como o nível pedagógico, o escolar, o social e o da civilização (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 62, tradução nossa).

Um exemplo de MDR associado à proposta de Bosch e Gascón (2010) é o de Ruiz-Munzón (2010), que esclarece ser a álgebra elementar um instrumento de Modelagem que não representa um setor ou domínio da Matemática, mas uma ferramenta que modela a atividade e interfere em todos os setores da Matemática, uma vez que, no processo de escolarização, a Matemática será gradativamente algebrizada. Assim, a pesquisadora observa que a álgebra tem um caráter de “instrumento genérico de Modelagem” de todas as praxeologias matemáticas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

escolares.

Após essa breve descrição dos principais constructos teóricos utilizados na pesquisa, consideramos a noção de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que corresponde à engenharia de nova geração desenvolvida enquanto recurso metodológico.

3 Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

Como resposta à perda do sentido do ensino da Matemática escolar, a TAD dedica-se à elaboração de uma engenharia didática de nova geração, denominada de Percurso de Estudo e Pesquisa, que articula o ensino da Matemática a uma atividade de Modelagem, pois o PEP parte de uma questão geradora e será conduzido pelo grupo de estudo, por meio de questionamentos que articulam noções matemáticas, permitindo respondê-las a partir de outros questionamentos associados à própria Matemática em jogo, como podemos observar no texto que segue.

> A TAD utiliza a noção de praxeologia ou Organização Matemática (OM) como ferramenta fundamental para modelar a atividade matemática [...] considera os processos de modelagem como processos de reconstrução e articulação de organizações matemáticas de complexidade crescente. Este processo parte de questões problemáticas que se apresentam em uma comunidade de estudo e que constituem a "razão de ser" das organizações matemáticas que serão necessárias para (re)construir uma resposta. Consequentemente, a modelagem matemática, assim interpretada, constitui um instrumento de articulação da atividade matemática escolar e requer de maneira totalmente essencial considerar a modelagem intramatemática como um caso particular de modelagem matemática (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2011, p. 340, tradução nossa).

Desse modo, a noção de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), de acordo com Martínez (2012, p. 27), "surge da necessidade de fundamentar as praxeologias didáticas – tanto as "escolares", como as de qualquer outro tipo de instituição – em uma epistemologia funcional", de modo que produzam conhecimentos úteis para a formulação de respostas a questões matemáticas problemáticas. Trata-se de considerar um modelo geral de estudo, que não está definido como um conjunto de praxeologias prontas, mas em um conjunto de questionamentos feitos pela comunidade de estudo em busca de uma resposta $R^{\heartsuit}$ (R coração). Durante a atividade de estudo, mobilizam-se todos os recursos, meios, saberes e respostas já disponíveis em $R^{\lozenge}$ (R punção), indispensáveis para a construção de uma resposta $R^{\heartsuit}$ satisfatória.

Um dos principais objetivos da proposta do PEP é "introduzir na escola uma nova epistemologia, que possibilite a substituição do paradigma escolar da monumentalização de saberes por um paradigma de questionamento do mundo para dar sentido ao estudo escolar de matemática" (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2011, p. 341, tradução nossa). Vale lembrar que, segundo Chevallard (2007), a monumentalização equivale ao estudo de diversas obras que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

não respondem a um desafio do estudo, uma vez que elas são visitadas como monumentos que perderam sua funcionalidade. O autor utiliza a metáfora da visita a um museu para ilustrar a visita a uma obra sem questionamentos sobre sua importância ou utilidade.

O PEP está relacionado ao paradigma de questionamento do mundo, de modo que, na sua elaboração, faz-se necessário transitar por diferentes Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), de maneira a tornar possível a integração das diferentes praxeologias matemáticas em estruturas mais completas. Esta característica do PEP responde às limitações de uma AEP.

Assim, embasamo-nos nas noções de PEP e AEP, procurando respostas à questão "geratriz" (Q_o), considerada em nosso PEP: "Como desenvolver o estudo da fatoração desde o Ensino Fundamental - Anos Finais?".

Para responder a esta questão, elaboramos e implementamos, por meio de um PEP, atividades para estudantes do Ensino Médio e da Licenciatura em Matemática, com base em AEP com grau de complexidade variada, contemplando as pesquisas sobre o tema, o que o PCN (BRASIL, 1998) prescreve para o conteúdo teórico em estudo, as propostas de ensino encontradas em livros didáticos de diferentes épocas e observando as ressalvas de autores como Chevallard (1985), Mercier (2002) e Constantin (2015), que consideram a fatoração como um objeto protomatemático.

Desse modo, as AEPs organizaram-se em torno da resolução de situações de aprendizagem abarcando conhecimentos acerca do mínimo múltiplo comum (mmc), máximo divisor comum (mdc), fatoração e produtos notáveis (equivalência), área, perímetro, escrita de uma expressão, resolução de equações do primeiro grau e do segundo grau, frações algébricas, sistemas de equações e noção de função.

4 Praxeologia Matemática (PM) de referência para a fatoração

Inicialmente, procuramos estabelecer uma referência didática por meio do estudo de pesquisas sobre o tema. Em seguida, ocupamo-nos em analisar o documento oficial e alguns livros didáticos, buscando identificar Praxeologias Matemática e Didática no interior das obras em que, de modo implícito, está pautada a fatoração numérica e algébrica. Além disso, os trabalhos em Didática da álgebra elementar de Ruiz-Munzón (2010) nos auxiliaram na construção da Praxeologia Matemática de Referência para fatoração apresentada na Figura 1, subsequente.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

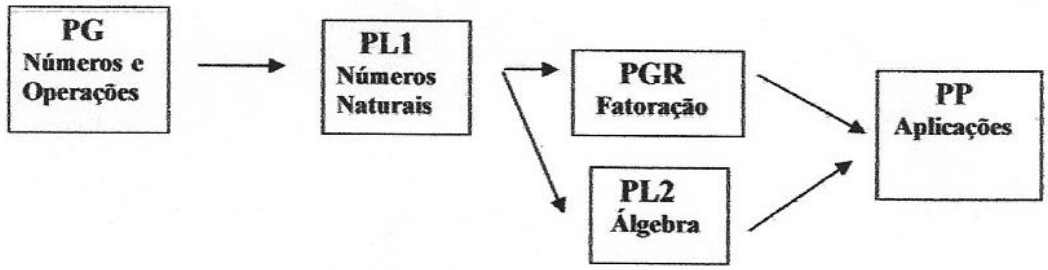


Figura 1 – Praxeologia Matemática de referência para fatoração
Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Na Figura 1, representamos praxeologia geral (PG) coligada ao bloco "Números e operações", seguindo prescrição do PCN (BRASIL, 1998), que trata da fatoração numérica por meio dos conteúdos relacionados ao mdc e mmc e da fatoração algébrica por meio da fatoração, produtos notáveis e as aplicações (mais imediatas), como os problemas de contextualização envolvendo as noções de mdc e mmc para a fatoração numérica e simplificação de frações algébricas para a fatoração algébrica. Assinalamos a praxeologia regional de referência (PGR) relativa à fatoração, ressaltando que essa engloba duas praxeologias locais, a saber: PL1 anexa aos números naturais e PL2 conexa à álgebra, que se juntam, formando praxeologias pontuais (PP) associadas às aplicações.

A praxeologia local 1 (PL1) visa integrar a fatoração numérica como o primeiro processo de fatoração apresentado no ensino, como a forma de escrita em fatores dos números naturais e suas aplicações na resolução de problemas, sendo centrada nas noções de múltiplos e divisores de números naturais e sua aplicação na forma de mmc e mdc para a resolução de problemas deste domínio. Entre os gêneros de tarefas privilegiados, encontramos: resolver, determinar, representados pelos tipos de tarefas: T: Resolver uma situação contextualizada por meio do mdc e mmc. T: Determinar os divisores de um número, T: Determinar o mdc, T: Determinar o mmc. As técnicas (τ) correspondem à decomposição dos números em fatores primos e identificação dos múltiplos e divisores, isto é, os elementos tecnológicos/teóricos (θ/Θ) ancoram-se nas noções de números primos e decomposição de um número em fatores primos.

O trabalho com a fatoração numérica nos leva a formular a praxeologia local 2 (PL2), que envolve a fatoração no contexto dos números reais como uma escrita em forma de fatores, utilizando a linguagem algébrica.

Desse modo, a praxeologia local 2 (PL2) é organizada em torno da noção de fatoração no domínio da álgebra, conduzindo às noções de fatoração algébrica e de produtos notáveis e abordando a noção de equivalência de expressões. Os principais gêneros de tarefas que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

constituem a PL2 são: aplicar, calcular, desenvolver, verificar, representados pelos tipos de tarefas. T: Desenvolver um produto notável, T: Aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, T: Calcular o produto entre polinômios, T: Verificar as igualdades, cujas técnicas (τ) associadas estão coligadas aos produtos notáveis e fatoração e para as quais, destacamos os seguintes elementos tecnológicos/teóricos (θ/Θ): propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, regra de fatoração para o caso do trinômio quadrado perfeito.

A partir da coligação entre as praxeologias locais PL1 e PL2, estabelecemos, de acordo com a noção de objetos protomatemáticos, as praxeologias pontuais (PP), que tratam da aplicação das praxeologias locais para a resolução de tarefas, cujas técnicas estão associadas a estes objetos protomatemáticos (mmc, mdc, fatoração e produtos notáveis), ou seja, aquelas que favorecem o reconhecimento desses objetos pelos estudantes.

Desse modo, as praxeologias pontuais (PP) relativas às aplicações possíveis no Ensino Fundamental, em geral, estão associadas ao gênero de tarefa: Resolver, o qual se relaciona aos seguintes tipos de tarefas: T: Resolver uma situação contextualizada envolvendo equações do 2º grau. T: Resolver uma situação contextualizada envolvendo equações. T: Resolver uma situação contextualizada envolvendo sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Para esses tipos de tarefas, as técnicas (τ) associadas podem ter relação com: casos de fatoração, propriedade do produto de dois fatores iguais a zero, resolução de equações polinomiais e sistemas de equações. Essas técnicas (τ) são justificadas a partir de tecnologias/teorias (θ/Θ) inerentes ao conjunto dos números reais, suas operações e propriedades e ao conjunto dos polinômios com coeficientes reais, suas operações e propriedades.

Após essa breve descrição das praxeologias associadas ao desenvolvimento da fatoração no Ensino Fundamental - Anos Finais, apresentamos, na Figura 2, a seguir, o mapa do Percurso de Estudo e Pesquisa, na sequência PEP.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

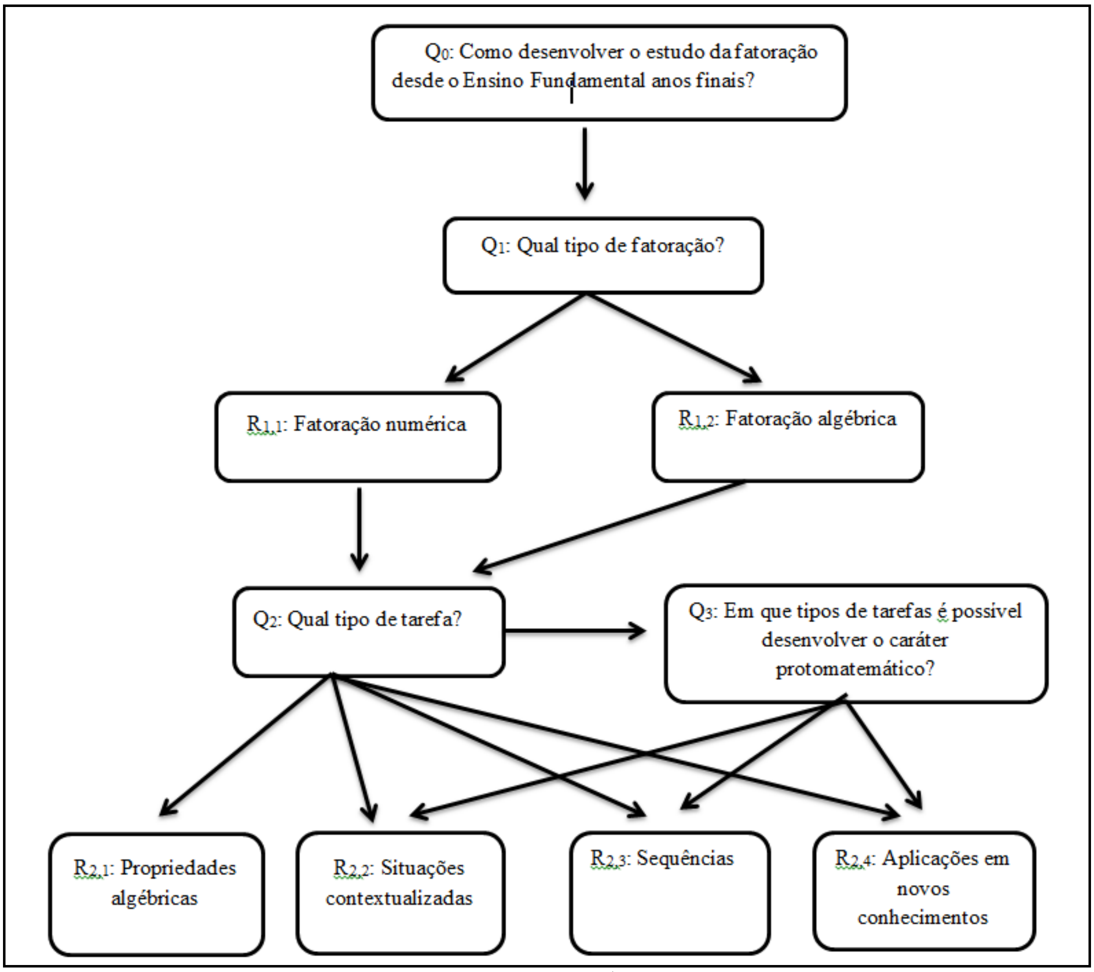


Figura 2 - Mapa do PEP
Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Em função dos questionamentos apresentados por meio do mapa, elaboramos o PEP e, na sequência, discutimos, por meio da análise *a priori,* algumas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) que compõem a aplicação do PEP. Essa análise foi efetuada pelo pesquisador para servir de base no acompanhamento do PEP, com o objetivo de responder às questões dos estudantes, propondo AEPs, quando necessário.

5 Atividades de Estudo e Pesquisa implementadas no PEP

Apresentamos, a seguir, algumas tarefas desenvolvidas na aplicação do PEP, de acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2011), que foi realizado com dois grupos. O primeiro grupo foi composto por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, considerando que eles já tiveram todas as instruções sobre a fatoração no Ensino Fundamental, bem como receberam instrução de conteúdos matemáticos do campo da aplicação da fatoração, como: números primos, critérios de divisibilidade, mdc e mmc, sistemas de equações, equação do 2º grau, noção de função, área e perímetro de figuras planas e introdução aos conceitos de álgebra elementar. Isso

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

possibilita avaliar os conhecimentos de que os estudantes dispõem ao término do Ensino Fundamental e as aplicações que são capazes de fazer, evidenciando o que ainda será necessário ser aprofundado, quando do encontro com esses objetos protomatemáticos.

O segundo grupo foi integrado por estudantes de Licenciatura em Matemática e teve como objetivo avaliar a relação que estabelecem com a fatoração e se esta evolui/modifica-se ao longo dos anos de ensino, acrescido por mais, pelo menos, dois anos de estudo no curso de Matemática. As tarefas propostas foram as mesmas para ambos os grupos.

Na sequência, discutimos algumas tarefas associadas às praxeologias PL1, PL2 e PP, cujo objetivo é verificar o domínio dos estudantes nas atividades relacionadas.

PL1: Números naturais: Tarefas sobre Números naturais: mdc e mmc

Tarefa 1[1]*:* Uma empresa possui três tipos de ônibus: convencional, especial e o leito, que fazem a mesma linha. O ônibus convencional parte do terminal rodoviário a cada 40 minutos, o especial, a cada 60 minutos e o leito, a cada 1 hora e 30 minutos. Se todos partiram juntos às 7h00, qual o próximo horário em que voltarão a partir juntos?

*Tarefa 2:*Dois depósitos têm, respectivamente, 306 e 126 litros de capacidade. Para encher cada um desses depósitos, usou-se um mesmo balde, um número exato de vezes. Qual a maior capacidade que pode ter o balde?

O tipo de tarefa enunciado é o de T: Resolver uma situação contextualizada por meio do mdc e mmc, T: Determinar os divisores de um número, T: Determinar o mdc, T: Determinar o mmc.

As tarefas (T) são apresentadas no domínio numérico e exigem, para sua resolução, a aplicação de uma técnica (τ) associada às noções em jogo, cuja tecnologia/teoria (θ/Θ) está associada aos conceitos de divisores e múltiplos. Trata-se de uma situação contextualizada em que o estudante deverá decidir como resolvê-la, necessitando assim recorrer às situações de referência desenvolvidas no Ensino Fundamental para identificar a necessidade da aplicação do objeto protomatemático fatoração, que não está explicitado nas tarefas apresentadas. Esse tipo de situação tem sido tratado nos livros didáticos atuais, por exemplo, Dante (2012).

Em relação às técnicas (τ), destacamos duas que nos parecem privilegiadas na relação

[1]As tarefas 1 a 6 foram elaboradas pela autora, baseando-se em livros didático, paradidáticos, entre outros materiais.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

institucional existente, a saber: para a tarefa 1, o estudante, após transformar todos os tempos em minutos, pode utilizar uma das técnicas: 1- determinar os conjuntos de múltiplos de 40, 60 e 90 e assim identificar o menor múltiplo comum; 2- utilizar a técnica das divisões sucessivas e multiplicar os divisores para encontrar o menor múltiplo comum. Em ambas as técnicas (τ), é necessário transformar em horas o resultado encontrado em minutos.

Da mesma forma, para a tarefa 2, o estudante pode determinar os conjuntos dos divisores de 306 e 126 e identificar o maior divisor comum entre eles ou utilizar a técnica (τ) da decomposição em fatores primos.

Observamos aqui que as técnicas (τ) das divisões sucessivas e decomposição em fatores primos podem ser discutidas a partir da identificação dos múltiplos e divisores, respectivamente, mostrando seu interesse como facilitadoras do trabalho matemático. Essa discussão conduz a uma justificativa encaminhada por meio da língua natural, que corresponde à tecnologia/teoria (θ/Θ) relativa aos números naturais, suas operações e propriedades.

As tarefas 1 e 2 demandam que o estudante disponha de situações de referência que possam auxiliá-lo na sua resolução, uma vez que, nas situações propostas, cabe ao estudante reconhecer o objeto a utilizar: a fatoração numérica. Esse tipo de situação tem sido tratado nos livros didáticos atuais, por exemplo, Dante (2012).

PL2: Álgebra: Tarefas sobre regras de fatoração algébrica e produtos notáveis

Este grupo de atividades visa estabelecer a dialética numérica e algébrica das expressões e desenvolver raciocínios do tipo prova e generalização. O objetivo das tarefas é verificar o domínio dos estudantes no uso das regras associadas aos produtos notáveis e fatoração, em aplicações numéricas e algébricas, bem como analisar se, diante de uma situação numérica, o estudante, para facilitar o cálculo, é capaz de expressá-la por meio dessas regras e relacionar os domínios numérico e algébrico, substituindo corretamente valores numéricos na resolução de uma expressão algébrica.

Assim, podemos compreender, ao final do Ensino Fundamental, se o estudante é capaz de reconhecer a forma fatorada ou a sua forma desenvolvida e aplicá-las em situações para as quais elas simplificam o trabalho matemático a ser realizado, o que corresponde a praxeologias encontradas em livros didáticos, em particular, quando da introdução da álgebra. Em geral, essas praxeologias são tratadas no oitavo ano por meio da passagem da forma desenvolvida para a fatorada e vice-versa, seguida de alguns exemplos de aplicação intra e extramatemáticos,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

sendo utilizadas no nono ano para o estudo das equações de segundo grau e da noção de polinômios e suas propriedades.

Tarefa 3: Desenvolva:

1. (100 +3).(100+2) =	4. (a+ 3).(a +5) =
2. (10 – 7).(10- 3) =	5. (x-9).(x-2) =
3. (50 +5).(50 – 2)=	6. (b+ 3).(b -1) =

a) Existe algo comum para todas as atividades? Caso exista, descreva. Você conhece uma noção matemática para desenvolver os produtos acima?

b) Se as expressões fossem como no exemplo abaixo, é possível identificar algo comum? Se sim, justifique.

(a +3). (a + 3) (y-10).(y-10) (x +4).(x – 4)

c) De acordo com a ideia acima, resolva: 14 x 17.

d) Você identificou alguma noção matemática para desenvolver os produtos acima? Você saberia escrevê-las em linguagem usual? Para que servem estas regras?

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Essa tarefa associa cálculos numéricos com a resolução de binômios algébricos com o objetivo de analisar se o estudante relaciona o numérico com o algébrico e como efetua essa aplicação. Além disso, verificamos se o estudante generaliza o cálculo efetuado, o que permite reconhecer se ele dispõe de conhecimentos sobre a multiplicação entre binômios, podendo auxiliar no estudo das equações do 2º grau e da noção de polinômios e suas propriedades. Para os itens (a) e (b), verificamos se o estudante utiliza a multiplicação de binômios ou reconhece os casos de fatoração e produto notável, em particular, se é capaz de mobilizar esses conhecimentos para auxiliar na resolução de tarefas numéricas, como a proposta no item c.

Observamos ainda a relação entre a identificação da regra, a enunciação em língua natural e sua aplicação em situações nas quais ela não é pedida explicitamente, o que corresponde a reconhecer implicitamente o caráter protomatemático do objeto fatoração. Esse trabalho matemático é essencial para o desenvolvimento matemático dos estudantes, pois a fatoração será utilizada para a compreensão e execução de tarefas de outros domínios, por exemplo, no cálculo da segunda derivada, no domínio do Cálculo Diferencial e Integral.

Tarefa 4: As igualdades são verdadeiras ou falsas para todo o valor de x?

Igualdade	V ou F	Justificativa	Se falsa, escreva a correta
$(x + 5).8 = 8x + 40$			
$(x – 2)^2= x^2+4x+4$			

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

$(5+x)^2 = x^2 + 5x + 25$			
$(2x-3).(2x+3) = 4x^2 - 9$			

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

A tarefa enfatiza a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e as noções de produtos notáveis representados pelo quadrado da soma e da diferença de dois termos, de multiplicação de polinômios, o que torna possível verificar quais conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental o estudante é capaz de reconhecer e como ele justifica sua resposta, isto é, se apresenta uma propriedade que generaliza o resultado ou um contraexemplo que mostra que a propriedade é falsa. Esse contraexemplo pode ser obtido assumindo valores para as letras e efetuando o cálculo.

Para as tarefas deste bloco, o estudante precisa mobilizar conhecimentos sobre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, os casos de fatoração e os produtos notáveis, em particular para justificar suas respostas, podendo ainda apresentar contraexemplos para os casos cuja resposta é falsa.

As tarefas e as resoluções apresentam-se no domínio numérico e algébrico e os objetos protomatemáticos necessários à realização das tarefas são os produtos notáveis, fatoração e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, associados às noções de polinômios com coeficientes reais, suas operações e propriedades, assim como o emprego de parênteses e a noção de número real, suas operações e propriedades. Observamos que, em geral, no ensino, é dada a ênfase às técnicas (τ) associadas aos produtos notáveis e fatoração e a propriedade distributiva é pouco tratada, o que representa uma tecnologia/teoria (θ/Θ) que dificulta a justificativa das técnicas, ou seja, pouca evidência das propriedades algébricas associadas ao conjunto dos polinômios e dos números reais.

PP: Aplicações

PP1: Tarefa envolvendo as noções de área e perímetro

Tarefa 5: Um retângulo A tem comprimento de medida m e largura de medida m–2. Um retângulo B é obtido de A, aumentando 4 unidades no comprimento e dobrando a largura. Indique por meio de expressões algébricas:

a) O perímetro de A;
b) O perímetro de B:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

c) A área de A;
d) A área de B;
e) Quanto o perímetro de B tem a mais do que o perímetro de A;
f) Quanto a área de B tem a mais do que a área de A.
g) Considerando m = 10, calcule c e d.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Para resolver esta tarefa, o estudante deve mobilizar conhecimentos sobre as noções de área e perímetro de figuras planas, particularmente de retângulos, e ser capaz de estabelecer uma expressão para representá-las. Além disso, é preciso dispor de conhecimentos sobre a representação algébrica de expressões em língua natural, como por exemplo: aumentar ou dobrar uma medida m. Observamos que, segundo Duval *et al* (2015), trata-se de um conhecimento a ser desenvolvido quando da introdução da álgebra, ou seja, para o autor, é preciso efetuar a conversão entre o registro da língua natural e o registro algébrico nos dois sentidos entre as primeiras atividades associadas à introdução da álgebra escolar.

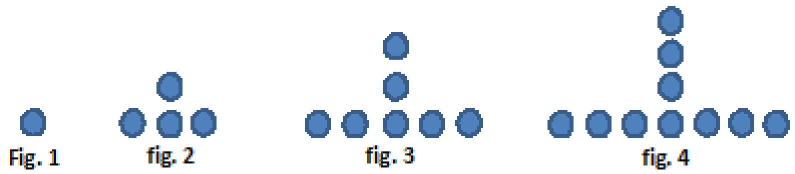
Ressaltamos ainda que, por se tratar de uma tarefa enunciada no domínio geométrico e algébrico, seria importante que os estudantes utilizassem a representação figural, o que poderia auxiliar na identificação de situações de referência, em geral, desenvolvidas quando da articulação entre grandezas e medidas e álgebra.

PP2: Tarefa sobre sequências

A tarefa apresentada na intervenção representa uma situação usual para a introdução do uso de letras. O estudante, após interpretar a relação existente entre as diferentes figuras, utiliza apenas conhecimentos numéricos para, na sequência, generalizar o resultado. É importante que o desenvolvimento desse tipo de tarefa seja estabelecido desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental para que o estudante dos Anos Finais desenvolva esse tipo de raciocínio, de forma que possa generalizar para uma figura qualquer. Portanto, o objetivo desse tipo de tarefa é conduzir o estudante à elaboração de uma sentença numérica e sua passagem para a escrita algébrica.

Tarefa 6: Considere as figuras do box seguinte e responda:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13



a) Qual é o número de bolas para a figura 4 e a figura 5?

b) Qual será o número de bolas da figura 100?

c) E no caso de uma figura de um número qualquer n, qual a expressão que pode representar o número total de bolas?

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

A tarefa refere-se à quantidade de bolas de uma figura. Para executá-la, o estudante irá verificar que é possível contar o número de bolas da Figura 4 e assim desenhar a próxima figura e utilizar o mesmo raciocínio. Já para a figura 100, é preciso procurar uma forma de representação algébrica, o que conduz a utilizar a noção de sequência algébrica para determinar a sua respectiva representação.

Observamos aqui que a noção de sequência numérica, em geral, é trabalhada apenas no Ensino Médio, com ênfase nas progressões aritméticas e geométricas, o que dificulta a identificação da sequência dada por meio de uma representação algébrica. É um conhecimento que precisa ser mais valorizado no Ensino Fundamental e que pode ser introduzido gradativamente a partir dos anos iniciais, pois favorece o pensamento algébrico.

Nas tarefas 5 e 6, a fatoração algébrica tem o papel de facilitar os cálculos e a generalização.

6 Alguns resultados

Após as aplicações do PEP com os dois grupos, foi possível observar que, como esperado, os estudantes da Licenciatura em Matemática evoluem no decorrer da escolaridade, mas ainda apresentam dificuldades próximas às identificadas no grupo dos estudantes do Ensino Médio.

Em relação às técnicas (τ), observa-se que os licenciandos têm uma melhor performance que os estudantes do Ensino Médio, mas parecem não compreender as tecnologias/teorias (θ/Θ) que as justificam. Isso fica evidente nas tarefas pertinentes às praxeologias PL1 e PL2.

Da mesma forma, para as tarefas PL1, PL2 e PP, foi possível observar que ambos os grupos apresentaram dificuldades em relacionar os domínios numérico e algébrico, em particular, desenvolver as tarefas que exigiam a conversão da língua natural para a linguagem algébrica nos dois sentidos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

7 Considerações finais

Com base nas praxeologias matemáticas associadas ao estudo da fatoração numérica e algébrica, conforme proposta dos PCN (BRASIL, 1998) e dos livros didáticos analisados, consideramos que elas não são articuladas, pois são tratadas de maneira dissociada, podendo assim prejudicar a construção de uma relação pessoal com o objeto fatoração, em particular, quando se considera a importância da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à passagem da aritmética para a álgebra, que necessita de maior atenção no ensino, uma vez que corresponde às tecnologias/teoria (θ/Θ) que justificam as técnicas (τ) empregadas.

Ao estabelecer uma praxeologia matemática de referência, articulando a fatoração numérica e algébrica como conhecimentos complementares e importantes para a resolução de situações intra e extramatemáticas no Ensino Fundamental, foi possível identificar as dificuldades dos estudantes e observar que, no estudo da álgebra elementar, é preciso enfatizar a conversão entre os registros da língua natural e linguagem algébrica, o que corrobora a proposta de Duval *et al* (2015).

Ressaltamos ainda que, para desenvolver as fatorações numérica e algébrica enquanto objetos protomatemáticos (MERCIER, 2002), é preciso ficar atento quando da introdução de novas noções para mostrar o papel do objeto fatoração enquanto ferramenta facilitadora do trabalho matemático a realizar. É necessário utilizar tais noções em situações matemáticas diversas e nos diferentes domínios da Matemática e das outras ciências, assim como em situações contextualizadas, como em algumas das tarefas apresentadas quando da implementação do Percurso de Estudo e Pesquisa.

Aqui é importante observar a opção em aplicar o PEP com estudantes do 1º ano do Ensino Médio, pois os mesmos já poderiam ter desenvolvido uma relação pessoal com o objeto fatoração e suas aplicações em diferentes noções matemáticas, em função das relações institucionais indicadas no PCN e desenvolvidas nos livros didáticos. Esses materiais foram utilizados para a organização das praxeologias e, consequentemente, para a identificação dos tipos de tarefas possíveis de serem desenvolvidas, o que mostrou a necessidade de um trabalho mais específico que articule fatoração numérica e algébrica.

A partir da identificação das praxeologias associadas à fatoração numérica e algébrica, foi possível construir o mapa do PEP e implementá-lo, o que propiciou pôr em relevo a importância de estudar a fatoração desde o início do Ensino Fundamental – Anos Finais, dando ênfase à articulação entre a fatoração numérica e algébrica por meio de aplicações que possibilitem a generalização de situações apresentadas nesses domínios, o que corresponde à

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

passagem da aritmética para a álgebra, sendo esta motivada pela indicação de ferramentas que podem facilitar o trabalho matemático a ser realizado.

Pontuamos ainda que é importante dar ênfase à fatoração, quando da introdução de novos conhecimentos, ficando atentos para seu papel nos domínios numérico e algébrico e enquanto ferramenta facilitadora do desenvolvimento de novas praxeologias matemáticas associadas aos conhecimentos indicados para serem desenvolvidos na Educação Básica, que irão funcionar como conhecimentos prévios necessários para a introdução de novos saberes intra e extramatemáticos no Ensino Superior.

Observamos finalmente que a relação pessoal dos dois grupos de estudantes com a fatoração é apenas de um monumento que foi visitado, mas para o qual não se compreendeu exatamente a importância de sua visita, o que se tornou evidente nos protocolos dos estudantes da Licenciatura.

Referências

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciências experimentales. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 29, n. 3, p. 339-352, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. *In:* BRONNER, A. *et al.* (org.) **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action**. Montpellier: IUFM, 2010. p 55-92.

______. La integración del momento de la técnica en el processo de estudio de campos de problemas de matemáticas. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 12, n. 3, p. 314-332, 1994.

CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de laThéorie Anthropologique du Didactique**. 2007. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em: 03 mar. 2020.

______. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques. *In:* MAURY, S. S.; CAILLOT, M. (org.). **Rapport au savoir et didactiques**. Paris: Éditions Faubert, 2003. p. 81-104.

______.**Organiser l’etude 3**. Ecologie & Regulation. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em: 5 out. 2020.

______. L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

______. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. **Petit X**, Grenoble, v. 19, p. 43-75, 1989.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

______. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986.

CONSTANTIN, C. **Quelles alternatives pour l´enseignement du calcul algébrique au collège?** 2015. 517 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Universite Aix Marseille, França, 2015.

DANTE, L. R. Projeto Teláris: Matemática. (6º ano). São Paulo: Ática, 2012.

DUVAL, R. *et al.* **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. Introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso? São Paulo: PROEM, 2015.

GUADAGNINI, M. R. **Fatoração: por que estudá-la desde o ensino fundamental?** 2018. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018.

MARTÍNEZ, L. S. **La modelización matemática en los estúdios universitarios de economía y empresa**: análisis ecológico y propuesta didáctica. 2012. 364f. Tese (Doutorado em Estatística Aplicada) - Universitat Ramon Llull, Barcelona, 2012.

MERCIER, A. La transposition des objets d'enseignement et la definition de l'espace didactique, em mathématiques. **Revue Française de Pédagogie**, Lyon v. 141, p. 135-171, 2002.

RAAD, N. A. **Les Identités Remarquables fonctionnent-elles comme un théorème ou comme une règle d'action dans le sens de lafactorisation pour lesélèves de la classe de troisième en France**. 2004. 128 f. Mémoire de DEA (Interactions, Corpus, Apprentissages, Représentations) – Université Lumière Lyon II, Lyon, 2004.

RUIZ-MUNZÓN, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. 2010. 407f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2010.

Submetido em 10 de Março de 2021.
Aprovado em 29 de Agosto de 2021.