
ARTÍCULO

Análisis de las dificultades en cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería: Un enfoque desde la teoría de representaciones semióticas y la dualidad estructural-operacional

Analysis of difficulties in differential calculus among engineering students: an approach based on the theory of semiotic representations and structural-operational duality

Maximiliano De Las Fuentes Lara^{*}

 ORCID iD 0000-0002-1001-4663

Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas^{**}

 ORCID iD 0000-0003-2223-9234

Sara Fernanda Leal Puga^{***}

 ORCID iD 0009-0009-6854-1480

Resumen

Este estudio analiza las dificultades que enfrentan los estudiantes de ingeniería en el curso de Cálculo Diferencial, con el objetivo de comprender cómo influyen los tipos de contenido (conceptual y procedimental), y los tipos de cambio en las representaciones matemáticas (congruentes e incongruentes) en la dificultad de los reactivos. Para ello, se diseñó y aplicó un instrumento criterial alineado al currículo, fundamentado en la teoría de las representaciones semióticas de Duval y en la dualidad estructural-operacional. El instrumento fue validado mediante juicio de expertos y presentó adecuados índices de validez y confiabilidad. Los resultados obtenidos mediante análisis estadísticos, incluyendo pruebas de hipótesis y ANOVA, revelan que los reactivos con cambios incongruentes y contenido conceptual presentan mayor dificultad. Estos hallazgos sugieren la necesidad de estrategias didácticas que favorezcan la conversión entre registros y el tránsito entre las dimensiones estructural y operacional del conocimiento matemático. Se concluye que una comprensión profunda del cálculo diferencial requiere abordar, simultáneamente, las representaciones semióticas y los enfoques estructurales-operacionales, abriendo líneas de investigación para la mejora del aprendizaje en ingeniería.

^{*} Doctor en Ciencias por la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). Profesor e investigador de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), Mexicali, Baja California, México. E-mail: maximilianofuentes@uabc.edu.mx.

^{**} Doctora en Ciencias por la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). Profesora e investigadora de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), Mexicali, Baja California, México. E-mail: aguilar.wendolyn@uabc.edu.mx.

^{***} Ingeniería en Gestión Empresarial por el Instituto Tecnológico de Mexicali (ITM). Profesora de asignatura en la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) y en el Instituto Tecnológico de Mexicali. Mexicali, Baja California, México. E-mail: sara.leal.puga@uabc.edu.mx.

Palabras clave: Cálculo diferencial. Representaciones semióticas. Dualidad estructural-operacional. Congruencia-incongruencia. Evaluación criterial.

Abstract

This study analyzes the difficulties faced by engineering students in the Differential Calculus course, with the aim of understanding how content types (conceptual and procedural) and types of change in mathematical representations (congruent and incongruent) influence item difficulty. To this end, a criterion-referenced instrument aligned with the curriculum was designed and administered, grounded in Duval's theory of semiotic representations and the structural-operational duality. The instrument was validated through expert judgment and showed adequate validity and reliability indices. The results obtained through statistical analyses, including hypothesis testing and ANOVA, revealed that items involving incongruent changes and conceptual content present greater difficulty. These findings suggest the need for instructional strategies that promote conversion between registers and movement between the structural and operational dimensions of mathematical knowledge. It is concluded that a deep understanding of differential calculus requires simultaneously addressing semiotic representations and structural-operational approaches, opening lines of research for improving learning in engineering.

Keywords: Differential calculus. Semiotic representations. Structural-operational duality. Congruence-incongruence. Criterion-referenced assessment.

1 Introducción

En el contexto educativo de la formación en ingeniería, el curso de Cálculo Diferencial (CD) representa un componente fundamental tanto en el desarrollo académico como en la consolidación de habilidades aplicables en diversas disciplinas técnicas y científicas. Su dominio está directamente relacionado con la capacidad para modelar y resolver problemas complejos, lo que lo convierte en un pilar de la trayectoria formativa del estudiante de ingeniería (Morán-Soto *et al.*, 2023; Cena; Silva; Minez, 2022).

No obstante, múltiples estudios han reportado que el CD presenta una elevada tasa de dificultad y fracaso, atribuida a factores como la abstracción de los conceptos, el uso limitado de conexiones matemáticas, y la dificultad para interpretar representaciones (Hitt, 2003; Stewart, 2012). Estas dificultades son especialmente evidentes cuando los estudiantes deben transitar entre distintas representaciones matemáticas, situación que suele generar una carga cognitiva elevada y desorientación conceptual (Ake, 2023; Bigotte de Almeida; Queiruga-Dios; Cáceres, 2020).

Diversas investigaciones han documentado que los estudiantes muestran deficiencias tanto en el tratamiento algebraico como en la comprensión conceptual de funciones, lo que afecta su capacidad para modelar situaciones y resolver problemas (Aguilar-Salinas *et al.*, 2021). Este fenómeno se agrava con una comprensión limitada de los enunciados matemáticos, dificultando aún más el proceso de conversión entre registros y el desarrollo de una comprensión profunda del cálculo.

En este contexto, la teoría de las representaciones semióticas de Duval (2006) resulta pertinente, al postular que el aprendizaje matemático implica la interpretación, el tratamiento y la conversión de representaciones en distintos registros (gráfico, algebraico, numérico y verbal). Complementariamente, la dualidad estructural-operacional (Sfard, 1991; Kieran, 1992) permite analizar cómo los estudiantes transitan entre el uso operacional de conceptos (como el cálculo de derivadas) y su comprensión estructural (como objeto matemático con propiedades abstractas).

Si bien existen numerosos trabajos centrados en las representaciones semióticas (Duval, 2006) o en los procesos estructurales y operacionales del pensamiento matemático (Sfard, 1991), son escasas las investigaciones empíricas que establecen un diálogo entre ambos marcos teóricos. Como advierte Schoenfeld (2016), uno de los desafíos actuales de la educación matemática radica, precisamente, en integrar perspectivas complementarias que expliquen la complejidad del aprendizaje. Un estudio reciente coincide en señalar la necesidad de enfoques teóricos más integradores que vinculen los procesos de representación, razonamiento y comprensión conceptual (Husamah *et al.*, 2022). La ausencia de investigaciones que combinen estos enfoques en contextos de evaluación del CD limita la comprensión integral de los factores cognitivos y representacionales que influyen en el desempeño estudiantil, así como la posibilidad de diseñar instrumentos más sensibles a esas interacciones.

Ante esta problemática, el presente estudio tiene como propósito analizar cómo influyen los tipos de contenido (conceptual y procedimental) y los tipos de cambio entre representaciones (congruente e incongruente) en la dificultad de los reactivos de una prueba criterial sobre CD. Para ello, se diseñó y aplicó un instrumento sustentado en la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2006) y la dualidad estructural-operacional (Sfard, 1991), cuyos resultados fueron sometidos a un análisis estadístico integral que incluyó la evaluación de la calidad del instrumento, las pruebas de hipótesis sobre los cambios entre representaciones y un análisis de varianza (ANOVA) para contrastar diferencias según el tipo de contenido conceptual o procedimental. Los resultados se discuten a la luz de ambas teorías, con el propósito de aportar evidencia empírica sobre las dificultades cognitivas y representacionales que enfrentan los estudiantes y orientar el diseño de estrategias pedagógicas que fortalezcan su comprensión conceptual del CD.

2 Lineamientos teóricos

Para comprender las dificultades que enfrentan los estudiantes de ingeniería en el

aprendizaje del CD, es necesario adoptar un enfoque teórico que permita analizar tanto las representaciones que intervienen en el pensamiento matemático como los tipos de razonamiento que los estudiantes movilizan al resolver problemas. En este estudio se integran dos marcos conceptuales que permiten abordar estos aspectos de manera complementaria: la teoría de las representaciones semióticas de Duval, que se centra en los procesos de conversión y tratamiento entre registros de representación, y la dualidad estructural-operacional, que distingue entre los enfoques procedimentales y conceptuales en la construcción del conocimiento matemático. A continuación, se presentan ambos marcos y su articulación teórica en el contexto del diseño y análisis de una prueba criterial de CD.

2.1 Teoría de las representaciones semióticas

La teoría de representaciones semióticas y los procesos de aprendizaje intelectual, desarrollados por Duval en 2004, ofrecen un marco adecuado para analizar la comprensión de los objetos matemáticos desde distintas formas de representación. Esta teoría destaca la importancia de las actividades cognitivas de la formación de una representación, tratamiento y conversión entre distintos registros de representación, facilitando así el análisis desde la conceptualización hasta la aplicación práctica en el contexto educativo. Duval subraya que el aprendizaje matemático efectivo depende de la habilidad para manejar y transformar estos registros, lo que permite a los estudiantes visualizar y procesar conceptos matemáticos de manera más flexible y profunda.

La formación de una representación es una actividad cognitiva donde los estudiantes construyen mentalmente una representación inicial de un objeto matemático abstracto o concepto. Esto implica crear una nueva imagen mental o simbólica que no había sido formulada previamente por el estudiante (Duval, 2006).

El tratamiento de representaciones, según Duval (2006), es la actividad cognitiva donde los estudiantes manipulan una representación para transformarla en otra forma dentro del mismo registro de representación. Este proceso implica el manejo de símbolos matemáticos y procedimientos sin cambiar a otro sistema de representación. Es fundamental para resolver problemas matemáticos y desarrollar fluidez en el manejo de conceptos matemáticos dentro de un determinado registro.

La conversión entre registros de representación se refiere al proceso cognitivo de traducir información matemática de una forma de representación a otra, como de simbólica a gráfica, o de numérica a algebraica (Duval, 2006). Este proceso es crucial porque diferentes

registros revelan diferentes aspectos de un concepto matemático.

Raymond Duval ha destacado la importancia de los cambios congruentes e incongruentes en el aprendizaje de las matemáticas a través de su teoría de representaciones semióticas. Los cambios congruentes se refieren a las transiciones entre registros de representación que mantienen una consistencia relativa en la estructura y el significado del concepto matemático representado. Por otro lado, los cambios incongruentes involucran transiciones en las que la nueva representación requiere una reorganización significativa de la estructura conceptual o un cambio en la forma de pensar el concepto original (Duval, 2006).

Para describir los cambios congruentes de acuerdo a la teoría de representaciones de Duval se considera una representación gráfica definida en trozos o tramos en donde se debe identificar el valor del límite según se aproxima x a un valor desde la izquierda o la derecha, en este caso, los cambios en la actividad de conversión pueden considerarse congruentes, lo anterior se debe a la simplicidad de la operación, que es básicamente evaluar visualmente el valor al que se acerca la función cuando x tiende a un valor específico en un contexto de función por tramos claramente definidos.

Para revisar con detalle la incongruencia se puede suponer que se cuenta con la gráfica de una función senoidal cuyo periodo y amplitud es diferente a 2π y 1 respectivamente, además la gráfica está desplazada horizontalmente y verticalmente, en este caso, se solicita al estudiante de ingeniería determinar la expresión algebraica de la representación gráfica. La determinación de la expresión correcta involucra identificar la amplitud, el periodo, el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la orientación de la función, cada uno de estos aspectos debe inferirse a partir de la gráfica.

Los cambios en la actividad de conversión pueden considerarse incongruentes, esto se debe a la complejidad y el nivel de abstracción necesario para interpretar y relacionar la forma gráfica de la función trigonométrica con sus correspondientes expresiones algebraicas, especialmente considerando las transformaciones (traslaciones y reflexiones). La conversión requerida aquí es desde una representación gráfica, con todas sus características visuales, a una expresión algebraica que encapsula todas esas características en forma simbólica. Esta transformación de una representación visual a una simbólica es fundamentalmente incongruente porque no hay una correspondencia inmediata y evidente entre la forma visual y su descripción matemática detallada.

2.2 Dualidad estructural-operacional

La teoría de la dualidad estructural-operacional es un concepto fundamental en la didáctica de las matemáticas, esta teoría describe cómo los estudiantes interactúan con las matemáticas a través de dos dimensiones fundamentales: la estructural y la operacional. La dimensión estructural se refiere a la capacidad de los estudiantes para ver y manipular las estructuras matemáticas subyacentes en su forma más abstracta. Esta capacidad incluye reconocer patrones, generalizar propiedades y desarrollar argumentos a partir de definiciones y teoremas (Kieran, 1992; Sfard, 1991). En esta dimensión, el enfoque está en las entidades matemáticas como objetos completos, que pueden ser analizados y relacionados entre sí sin necesidad de llevar a cabo operaciones sobre ellos.

En contraste, la dimensión operacional implica el manejo de símbolos y la ejecución de procedimientos y algoritmos. Esta dimensión se centra en el *hacer* matemáticas en términos de procesos y acciones, como la manipulación de expresiones y la resolución de ecuaciones (Sfard, 1991). Aquí, los conceptos matemáticos son vistos y utilizados principalmente como herramientas para realizar tareas específicas.

La interacción entre estas dos dimensiones es medular para el desarrollo conceptual en matemáticas, Sfard (1991) argumenta que el aprendizaje matemático efectivo ocurre cuando los estudiantes pueden transitar fluidamente entre estas dos dimensiones, es decir, cuando pueden operar con símbolos y procedimientos (dimensión operacional) mientras comprenden y manipulan las estructuras subyacentes (dimensión estructural). Esta dualidad tiene implicaciones importantes en la educación matemática, donde la habilidad para alternar entre ver las expresiones como procesos (operaciones que se pueden realizar) y como objetos (entidades que pueden ser manipuladas de forma abstracta) es fundamental (Kieran, 1992; Sfard, 1991).

Para ubicar las dimensiones estructural y operacional en un curso de CD se ejemplifica con la función $f(x) = x^2$, en donde, desde el punto de vista estructural, se explora cómo la derivada, $f'(x) = 2x$ representa geométricamente la pendiente de la tangente en cualquier punto x de la función. Los estudiantes pueden visualizar y manipular gráficamente estas tangentes para diferentes valores de x , observando cómo cambia la pendiente y relacionando este cambio con la forma de la función cuadrática. En la dimensión operacional, los estudiantes se enfocan en calcular derivadas utilizando reglas de diferenciación, como la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena, y las derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, etc. Aquí, el énfasis está en la ejecución de procesos y el manejo de operaciones algebraicas para encontrar la derivada de funciones dadas.

2.3 Articulación teórica

La articulación entre la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2006) y la dualidad estructural-operacional (Sfard, 1991) se enmarca en una tendencia más amplia de la investigación en educación matemática, orientada a integrar diversas perspectivas teóricas para comprender fenómenos complejos de aprendizaje. Schoenfeld (2016) destaca que, tras la revolución cognitiva de finales del siglo XX, el campo experimentó una expansión epistemológica que desplazó el foco desde la enseñanza de procedimientos hacia el estudio del pensamiento matemático, las representaciones y los procesos de razonamiento. En este contexto, las investigaciones contemporáneas se caracterizan por la coexistencia de enfoques cognitivos, situativos y socioculturales, y por el desafío de construir marcos explicativos híbridos que vinculen el contenido matemático con las prácticas de significación asociadas.

En este estudio, ambas teorías se integran por su complementariedad: mientras Duval pone atención en las representaciones y en las dificultades de conversión entre registros, la dualidad estructural-operacional de Sfard permite analizar el tipo de razonamiento que subyace en la resolución de problemas, distinguiendo entre una visión procedimental y una comprensión estructural del concepto. En conjunto, estas perspectivas permiten clasificar los reactivos según el tipo de cambio representacional y el tipo de contenido, facilitando un análisis más preciso de los factores que inciden en la dificultad. De esta manera, la combinación teórica adoptada responde a la necesidad de vincular las formas de representación externa con los procesos internos de conceptualización, en concordancia con los esfuerzos internacionales por consolidar perspectivas integradoras en la investigación sobre el aprendizaje del CD (Cobb, 2007; Sfard, 2008; Schoenfeld, 2014).

3 Metodología

En una prueba criterial, el objetivo es medir qué tanto los estudiantes han alcanzado los conocimientos, habilidades o competencias esperadas, según los criterios establecidos, para el desarrollo de la prueba criterial se siguió el modelo propuesto por Nitko (1994), que se enfoca en la creación de exámenes basados en el currículo, este modelo se ha enriquecido con la metodología para la construcción de test criterios de Popham (1990) y se ha fortalecido con aportes metodológicos y operativos de Contreras (2000). El diseño de la prueba se orienta a evaluar las habilidades y conocimientos de CD que son esenciales para el éxito en cursos posteriores de matemáticas dentro de programas de ingeniería.

El análisis de calidad de la prueba criterial se realiza siguiendo los principios de la teoría clásica de los tests (TCT), asegurando que la prueba diseñada sea capaz de medir efectivamente las habilidades requeridas. Con este fin, se hace esencial la evaluación de varios aspectos como la confiabilidad, la validez de contenido, así como los índices de dificultad, discriminación y correlación biserial, siguiendo las recomendaciones de Carmines y Zeller (1987). Este enfoque integral garantiza que el instrumento no solo mida con precisión las habilidades matemáticas específicas, sino que también refleje los objetivos educativos del programa de ingeniería y responda adecuadamente a las necesidades del currículo.

3.1 Método

El índice de dificultad (ID) de cada reactivo es una métrica fundamental para determinar cuán bien los estudiantes pueden resolver problemas específicos relacionados con CD, según Crocker y Algina (1986), este índice se calcula tomando en cuenta la proporción de estudiantes que responden correctamente a cada reactivo.

El índice de discriminación (IDC) de un reactivo evalúa su capacidad para distinguir entre estudiantes que tienen un alto rendimiento en la prueba y aquellos con un rendimiento bajo. Este índice refleja la probabilidad de que los estudiantes con buen desempeño general en la prueba respondan correctamente al reactivo, mientras que los estudiantes con bajo desempeño probablemente no lo harán. Para este análisis, se considera el 54% de la población estudiantil, incluyendo el 27% con las calificaciones más altas y el 27% con las calificaciones más bajas, para cada reactivo analizado.

El coeficiente de correlación del punto biserial (r_{pbis}) es otro elemento sustancial para evaluar la confiabilidad y validez del instrumento, como indica Henrysson (1971), sirve como un indicador de validez predictiva que relaciona la respuesta de un estudiante a un reactivo específico con su rendimiento general en la prueba.

El alcance de la investigación radica en un análisis ANOVA (análisis de varianza), el cual resulta fundamental para investigar cómo diferentes tipos de contenido (conceptuales y procedimentales) y tipos de cambio (congruentes e incongruentes) influyen en los índices de dificultad de los reactivos en una prueba criterial de CD aplicada a estudiantes de ingeniería. Esta técnica estadística permite comparar las medias de los índices de dificultad entre varios grupos definidos según el tipo de contenido y la naturaleza del cambio, ofreciendo una visión clara de las variaciones en la dificultad percibida.

3.2 Población y muestra

Se empleó un muestreo por conglomerados naturales, considerando como unidades de selección a los grupos académicos de la asignatura de Cálculo Integral. De los 14 grupos registrados en el ciclo escolar 2024-1, se seleccionaron aleatoriamente ocho, con una muestra total de 229 estudiantes (de una población de 490) inscritos en segundo semestre, quienes ya habían acreditado previamente la asignatura de CD. La participación fue de tipo censal dentro de cada grupo, es decir, se incluyeron todos los estudiantes asistentes a la aplicación. Este procedimiento garantiza independencia entre grupos, aunque no necesariamente entre individuos dentro del mismo conglomerado, por lo que los resultados deben interpretarse considerando dicha estructura de muestreo.

3.3 Construcción del instrumento y articulación con el marco teórico

El diseño de la prueba criterial se basó en un enfoque alineado al currículo, siguiendo el modelo de Nitko (1994) y los aportes de Popham (1990), complementados con marcos teóricos que permiten analizar tanto el contenido como las formas de representación y razonamiento implicadas en el aprendizaje matemático. En particular, se integraron la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2006) y la dualidad estructural-operacional (Sfard, 1991; Kieran, 1992), que guiaron la clasificación de los reactivos según tres dimensiones: tipo de contenido (conceptual o procedimental), tipo de actividad cognitiva (tratamiento o conversión) y tipo de cambio entre registros (congruente o incongruente). Esta categorización permitió estructurar los ítems con base en demandas cognitivas específicas y establecer vínculos explícitos con el desempeño esperado de los estudiantes.

Este enfoque se alinea con los planteamientos de Brookhart (2013), quien destaca que las evaluaciones criteriosales deben proporcionar evidencia clara del logro de objetivos de aprendizaje específicos, integrando tanto la complejidad cognitiva como la pertinencia curricular. En ese sentido, la incorporación de categorías teóricas como las propuestas por Duval y Sfard permitió orientar no solo el diseño de los reactivos, sino también su validación con criterios pedagógicos y cognitivos.

Para la selección del contenido, se aplicó una reticulación curricular (Robredo; Ledezma; Alvarado, 1983) que identificó los temas esenciales del curso de CD. A partir de esta estructura se elaboraron especificaciones técnicas para cada reactivo, en las que se precisaron el registro inicial y final, la demanda cognitiva y la orientación estructural u operacional,

asegurando así la congruencia entre los ítems, los objetivos del currículo y los marcos teóricos adoptados.

En la primera etapa se realiza un análisis utilizando la metodología de diseño y evaluación curricular conocida como reticulación, propuesta por Robredo, Ledezma y Alvarado (1983). Este enfoque sistémico permite no solo detallar los contenidos del currículo, sino también clarificar las interdependencias y relaciones de servicio entre los distintos elementos curriculares. Durante esta fase, se examina cómo los contenidos se interrelacionan para apoyar el desarrollo integral del estudiante, lo que facilita la creación de una retícula. El producto final, la retícula de CD (Figura 1), se distingue por su capacidad para visualizar tanto los contenidos como las secuencias didácticas y los prerrequisitos necesarios, optimizando así la coherencia y continuidad pedagógica del programa.

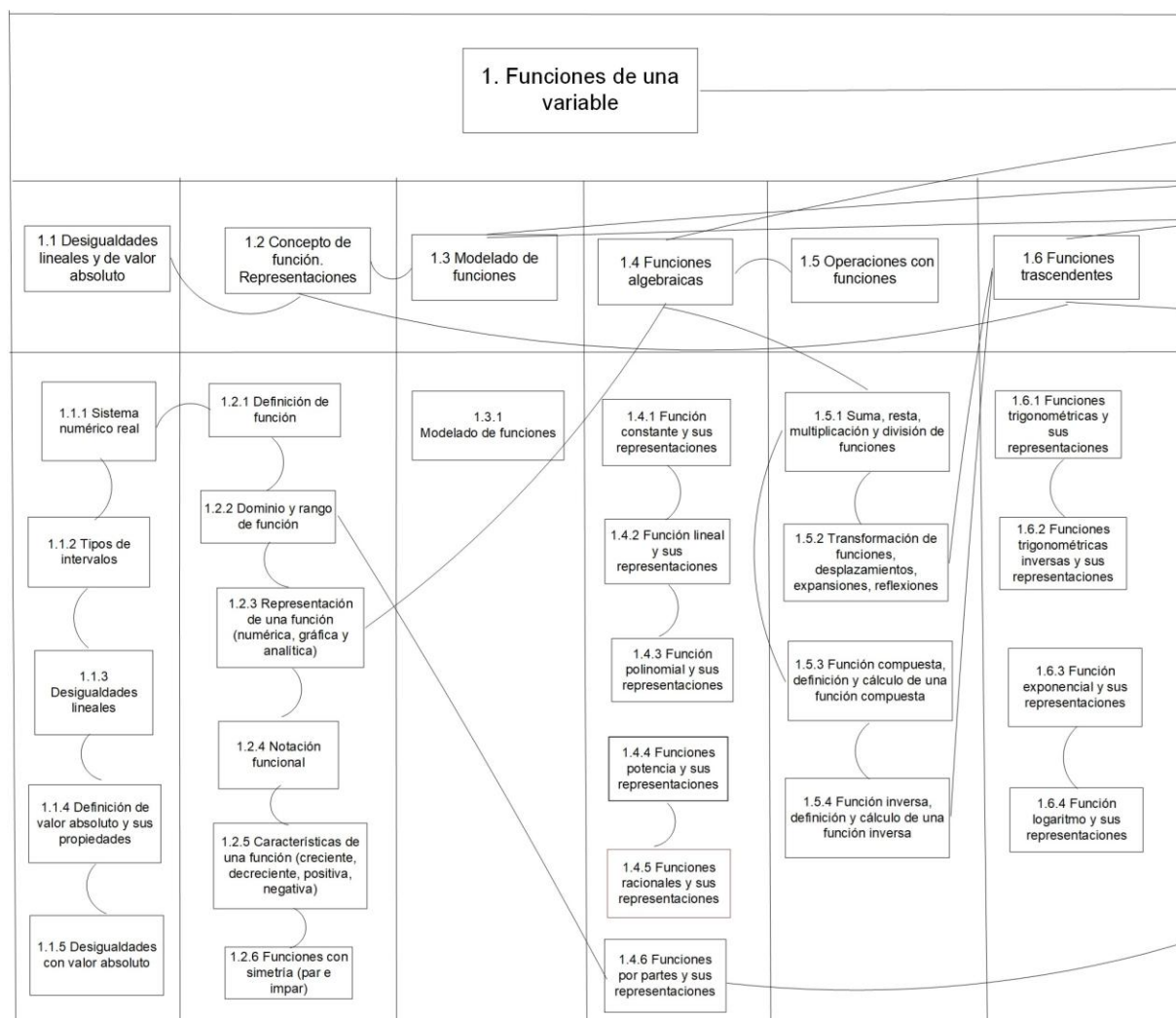


Figura 1 – Fragmento de retícula correspondiente a la unidad 1 de CD
Fuente: elaboración propia (2025)

En la segunda etapa se hace explícito que partes de currículum siempre serán evaluadas en el instrumento de medición por tratarse de los resultados de aprendizaje de primer nivel de

importancia o esenciales, y cuales otras podrían quedar incluidos sobre la base de un muestreo al azar, ya que por razones prácticas no es posible evaluar a todos, lo cual queda asentado en la tabla de justificación de contenidos. En el Cuadro 1, se ejemplifica el contenido 1.4.3 que corresponde a función polinomial y sus representaciones.

Contenido a evaluar	Razones que justifican la decisión
Unidad 1	
1.4.3 Función polinomial y sus representaciones	Se trata de un contenido enlace que recibe servicio de 1.4.2 función lineal y sus representaciones, brinda servicios a nivel meso a 1.5 Operaciones con funciones y a nivel macro a 2 Límites y continuidad, 3 La derivada y 4 Aplicaciones de la derivada. Por tratarse de un contenido esencial se elabora una especificación con 1 reactivo.

Cuadro 1 – Justificación de contenidos de la prueba criterial (1.4.3 Función polinomial)
Fuente: elaboración propia (2025)

En la tercera etapa se elabora un resumen con los temas y subtemas a evaluar, la cantidad de especificaciones a diseñar y la cantidad de reactivos que forman parte de la prueba criterial. Tales decisiones deberán quedar registradas en una tabla de especificaciones del instrumento de medición. En la Tabla 1, se ejemplifican algunos de los contenidos de la unidad 1.

Tabla 1 – Resumen de los contenidos de la prueba criterial de la unidad 1

Eje curricular	Contenidos	Cantidad de especificaciones	Cantidad de reactivos	Número de reactivo
Unidad 1-. Funciones de una variable				
1.1 Desigualdades lineales y de valor absoluto.	1.1.2 Tipos de intervalos.	2	2	1,2
	1.1.3 Desigualdades lineales.	1	1	3
1.2 Concepto de función y sus representaciones.	1.2.1 Definición de función.	3	3	4, 5, 6
	1.2.2 Dominio y rango de una función	2	2	7, 8
	1.2.3 Representación de una función.	1	1	9
	1.2.5	1	1	10
	Características de una función: creciente, decreciente, positiva, negativa			
	1.2.6 Funciones con simetría par e impar	1	1	11

Fuente: elaboración propia (2025)

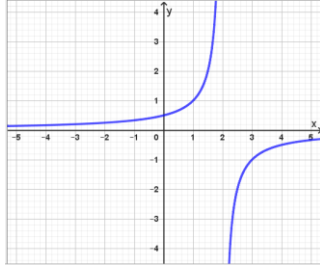
En la cuarta etapa se procedió a diseñar las especificaciones de cada reactivo, las cuales no solo definen claramente el contenido y el contexto del reactivo, sino que también establece criterios específicos para evaluar el rendimiento del estudiante. La especificación comienza con una identificación precisa del contenido a evaluar (unidad, tema y subtema), lo cual es esencial para contextualizar la pregunta dentro del marco del CD. Este nivel de detalle asegura que los estudiantes y los educadores comprendan claramente el ámbito de la pregunta,

facilitando una preparación y respuesta más efectiva (Stiggins, 2007).

Además, en la especificación se incluyen los atributos del reactivo, los cuales son muy importantes para guiar la construcción de preguntas que no solo midan el conocimiento factual, sino que también evalúen la capacidad de los estudiantes para aplicar este conocimiento en contextos prácticos. El comentario aclaratorio proporciona una base teórica sólida, destacando la importancia del contenido matemático en cuestión, en la especificación se señala el indicador de logro, centrado en las demandas cognitivas para resolver el reactivo, se indica si el reactivo cuenta con un enfoque preponderante procedimental o conceptual, alineado con las mejores prácticas en la educación matemática que enfatizan la importancia de la conversión y el tratamiento de representaciones (NCTM, 2000). Se incluyen los registros inicial y final (lenguaje natural, algebraico, gráfico y numérico) y si el reactivo implica en su proceso de resolución cambios congruentes o incongruentes. Se incluyen en la descripción de la especificación otros elementos importantes como la base del reactivo, el tipo de información y distractores. En el Cuadro 2 se cuenta con un ejemplo de especificación para el reactivo 17, la cual ilustra claramente los componentes de dicha especificación.

Una vez diseñada las especificaciones, se tiene la ventaja de construir la cantidad de reactivos requerida para contar con una versión ilimitada de pruebas de CD.

Identificación del contenido a evaluar del reactivo 17				
Asignatura:	Cálculo Diferencial		Unidad:	Funciones de una variable
Tema:	Funciones algebraicas		Subtema:	Funciones racionales y sus representaciones
Atributos del reactivo				
Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido	Una función racional f es una razón de dos polinomios $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. El dominio consiste de todos los valores tales que $Q(x) \neq 0$. $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función racional que se obtiene del cociente entre $P(x) = 1$ y $Q(x) = x$, el dominio y el rango de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Obsérvese que en $x = 0$, $f(x)$ no está definida, sin embargo, cuando x se aproxima a cero por la izquierda la gráfica de manera abrupta se dirige hacia abajo, se dice entonces que $f(x)$ tiende a $-\infty$. De modo similar $f(x)$ tiende a ∞ cuando x se aproxima a cero por la derecha. Al presentarse esta situación se dice que en $x = 0$ hay una asíntota vertical.			
Indicador de logro	Determinar la expresión algebraica de la función racional a partir de su representación gráfica.			
Tipo de contenido:	Concepto ()		Procedimiento (x)	
Representación inicial:	Lenguaje Natural ()	Algebraico ()	Gráfico (x)	Numérico ()
Representación final:	Lenguaje Natural ()	Algebraico (x)	Gráfico ()	Numérico ()
Actividad cognitiva:	Representación ()		Tratamiento ()	Conversión (x)
Cambio en la representación:	Congruente ()		Incongruente (x)	
Características del reactivo				
Instrucciones para responder el reactivo:		Determinar la expresión algebraica de la función a partir de su representación gráfica.		
Base del reactivo:		La base del reactivo es un enunciado en el que se presenta también una representación gráfica y se solicita al estudiante elegir la expresión algebraica que la representa.		
Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:		Este reactivo se presenta de manera textual aunado al lenguaje gráfico, se espera que el alumno aplique una		

	conversión para obtener la representación algebraica correcta.
Distractores:	Los distractores presentados en este reactivo están diseñados para explorar errores comunes en la interpretación de gráficos de funciones racionales. Los distractores están relacionados con una comprensión limitada del impacto de los signos y la ubicación de las asíntotas en la representación gráfica de funciones racionales.
Reactivo muestra:	
Dada la siguiente gráfica.	
	
¿Cuál es su representación algebraica?	
A) $f(x) = \frac{-1}{x-2}$	B) $f(x) = \frac{-1}{x+2}$
C) $f(x) = \frac{1}{x+2}$	D) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Cuadro 2 – Especificación del reactivo 17
Fuente: elaboración propia (2025)

3.4 Validez de contenido de la prueba criterial

Para evaluar la validez de contenido del instrumento, se recurrió al juicio de expertos, una estrategia ampliamente documentada en la literatura educativa (Alsina; Coronata, 2014; Hernández-Nieto, 2002). El panel estuvo conformado por cinco docentes universitarios con formación en matemáticas y experiencia de al menos cinco años en la enseñanza del CD en programas de ingeniería. Cada experto evaluó los reactivos con base en criterios previamente establecidos, alineados tanto con los principios de evaluación criterial como con los marcos teóricos adoptados en este estudio. Entre los aspectos revisados se incluyeron: la correspondencia con los temas y subtemas del currículo, la claridad en la redacción, la independencia entre ítems, la adecuación de los registros de representación, el equilibrio entre contenidos conceptuales y procedimentales, la congruencia o incongruencia de los cambios representacionales y la pertinencia de los distractores.

El proceso de validación se llevó a cabo utilizando una escala de valoración de 0 (totalmente en desacuerdo) a 4 (totalmente de acuerdo) y los datos fueron analizados mediante el cálculo del Coeficiente de Validez de Contenido (CVC), siguiendo la metodología propuesta por Hernández-Nieto (2002) y Urrutia *et al.* (2014). Solo se conservaron aquellos reactivos que alcanzaron un CVC igual o superior a 0.80, valor considerado aceptable en estudios de validación educativa. Este procedimiento permitió asegurar la pertinencia y alineación

curricular del instrumento, así como su congruencia con las demandas cognitivas definidas por los marcos teóricos empleados en el estudio.

Aunque el panel de expertos aportó una revisión sólida desde la perspectiva disciplinar y didáctica, se reconoce como una limitación la ausencia de especialistas en evaluación psicométrica o en otras metodologías de validación (criterio, constructo). Esta condición restringe, parcialmente, la solidez técnica del proceso, dado que los juicios se centraron en la adecuación conceptual y representacional de los ítems, sin incorporar análisis estadísticos más rigurosos, como la verificación empírica de la estructura del instrumento o el estudio de su dimensionalidad mediante técnicas factoriales. En consecuencia, la validez de contenido obtenida debe interpretarse como adecuada para fines exploratorios y diagnósticos, pero no suficiente para sustentar generalizaciones amplias sobre la calidad psicométrica del instrumento.

Esta limitación metodológica destaca la necesidad de triangular los procedimientos de validación mediante técnicas complementarias, como análisis factorial exploratorio o índices de acuerdo entre jueces, que permitan integrar la valoración experta con evidencia empírica adicional. Muñiz (2010) enfatiza que la validez de contenido se fortalece cuando los juicios de expertos se acompañan de resultados empíricos que respalden las decisiones sobre los ítems. A su vez, Libedinsky (2024) plantea que las evaluaciones criterioales, además de garantizar rigor técnico, deben promover la equidad y la mejora continua del aprendizaje, articulando la perspectiva psicométrica con la pedagógica.

Cabe destacar que, aunque la validación de contenido se centró en el juicio de expertos disciplinares, la consistencia interna (Kuder-Richardson, mitades partidas y Ferguson) y la calidad psicométrica del instrumento (índices de dificultad, discriminación y correlación biserial) fueron verificadas mediante análisis estadísticos (KR-20, Spearman-Brown, Ferguson, índices de dificultad, discriminación y correlación biserial). Estos resultados complementan la revisión cualitativa inicial y ofrecen evidencia empírica que respalda la fiabilidad del instrumento en el contexto de este estudio.

3.5 Confiabilidad de la prueba criterial

Los análisis de confiabilidad son esenciales para medir la consistencia o estabilidad de las mediciones cuando el proceso de medición se repite en distintas ocasiones (Prieto; Delgado, 2010). Esta evaluación determina la capacidad del instrumento para demostrar estabilidad en sus resultados a lo largo del tiempo (García; Vilanova, 2008). En este contexto, se han aplicado

dos métodos principales para evaluar la confiabilidad: el coeficiente de Kuder-Richardson (KR-20) y el método de mitades partidas.

El coeficiente de Kuder-Richardson (KR-20) es un método efectivo para obtener la confiabilidad de un instrumento de medición que se basa en datos obtenidos de una sola aplicación. Este método es particularmente útil para ítems que se valoran de manera dicotómica (correcto o incorrecto), considerando que cada ítem o reactivo puede tener un índice de dificultad diferente. Este enfoque proporciona una medida robusta de la confiabilidad al evaluar la consistencia interna del instrumento (Corral, 2009).

Por otro lado, el análisis de confiabilidad mediante el método de mitades partidas implica dividir el instrumento en dos subpruebas, típicamente separando los ítems en pares e impares, y tratando cada subprueba como paralela. La confiabilidad de las dos mitades se evalúa mediante el coeficiente de consistencia interna, utilizando la fórmula de Spearman-Brown para ajustar la correlación entre las mitades. Si el instrumento es confiable, se espera que las puntuaciones de las dos mitades estén fuertemente correlacionadas, indicando una consistencia en las mediciones a través de diferentes conjuntos de ítems (Reidl-Martínez, 2013).

4 Análisis y discusión de los resultados

Este capítulo presenta los resultados derivados de la aplicación de una prueba criterial de CD a estudiantes de ingeniería, con el propósito de analizar cómo los tipos de contenido (conceptual y procedimental) y los tipos de cambio entre representaciones (congruente e incongruente) influyen en la dificultad de los reactivos. La organización del capítulo responde a los lineamientos de la Teoría Clásica de los Tests (TCT) y se articula con los marcos teóricos previamente presentados: la teoría de las representaciones semióticas y la dualidad estructural-operacional. En primer lugar, se reporta el análisis psicométrico del instrumento; posteriormente, se interpretan los resultados obtenidos a través de pruebas de hipótesis y análisis de varianza (ANOVA), con el fin de identificar patrones de desempeño relacionados con las dimensiones teóricas del estudio.

4.1 Análisis de calidad del instrumento de medición

La implementación del instrumento de medición tuvo lugar en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería Mexicali (FIM) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), durante la primera semana del ciclo lectivo 2024-1. Participaron 229 estudiantes de

segundo semestre, quienes ya habían acreditado la asignatura de CD.

La confiabilidad del instrumento se estimó mediante dos métodos de la Teoría Clásica de los Tests: el coeficiente Kuder-Richardson (KR-20), que resultó en $r = 0.853$, y el método de mitades partidas con corrección de Spearman-Brown, con un valor de $r = 0.849$. Ambos coeficientes superan el umbral mínimo de 0.80 propuesto para estudios educativos (Muñoz; Mato, 2008; Contreras; Backhoff, 2004), lo que sugiere una adecuada consistencia interna del instrumento. Adicionalmente, la prueba delta de Ferguson arrojó un valor de 0.98, indicando una distribución eficiente de los puntajes.

Respecto a los indicadores psicométricos individuales, el índice de dificultad (ID) promedio fue de 0.42 (± 0.14), con un rango entre 0.13 y 0.79. El índice de discriminación (IDC) promedio fue de 0.45 (± 0.08), y la correlación biserial (r_{pbis}) tuvo un promedio de 0.33 (± 0.11). Estos valores se alinean con los estándares recomendados por la literatura especializada en construcción de instrumentos (Contreras; Backhoff, 2004).

Estos resultados respaldan el uso del instrumento para el análisis posterior del desempeño estudiantil según el tipo de contenido evaluado (conceptual o procedimental) y los tipos de cambio entre representaciones (congruente o incongruente), en coherencia con los objetivos teóricos y metodológicos del estudio.

4.2 Análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de medición

El análisis de los estadísticos obtenidos a partir de la prueba de CD aplicada a 229 estudiantes de ingeniería proporciona una visión general del desempeño estudiantil. En la Tabla 2 se presentan los principales resultados descriptivos.

La media de las calificaciones es 42.01, lo que indica el promedio de desempeño en la prueba. Sin embargo, la mediana es 37.50, sugiriendo una distribución ligeramente sesgada hacia calificaciones más bajas, ya que la mediana es menor que la media. La desviación estándar es de aproximadamente 15.66, lo que muestra una variabilidad moderada en las calificaciones de los estudiantes. Esto sugiere que mientras algunos estudiantes se desempeñan bien, otros tienen dificultades significativas.

Tabla 2 – Estadísticos de la aplicación del instrumento de medición

Número de estudiantes	229
Media	42.01
Mediana	37.50
Moda	37.50
Desviación estándar	15.66
Varianza	245.16
Asimetría	0.881
Curtosis	0.467
Rango	80.36
Mínimo	8.93
Máximo	89.29
Cuartil 1 (25%)	31.25
Cuartil 2 (50%)	37.50
Cuartil 3 (75%)	50.00

Fuente: elaboración propia (2025)

El coeficiente de asimetría es de 0.881, indicando una distribución asimétrica con una cola más larga hacia las calificaciones más altas. Esto es consistente con la observación de que la mediana es menor que la media, señalando que un número más significativo de estudiantes obtuvo calificaciones por debajo del promedio. La curtosis de 0.467 indica una distribución ligeramente leptocúrtica, lo que sugiere que la distribución de las calificaciones tiene colas más pesadas y un pico más agudo que una distribución normal, implicando una mayor concentración de calificaciones alrededor de la media y extremos más extremos.

El rango considerable de 80.36 entre el mínimo y el máximo sugiere que hay una amplia dispersión en cómo los estudiantes respondieron a la prueba. Algunos estudiantes lograron calificaciones cercanas a la perfección, mientras que otros lucharon significativamente. Los percentiles muestran que el 25% de los estudiantes obtuvo 31.25 o menos, y el 75% obtuvo 50 o menos. Esto refuerza la idea de que la mayoría de los estudiantes se desempeñan por debajo del promedio de 42.01.

Los resultados de la prueba de CD muestran un reto considerable para los estudiantes, con una tendencia general hacia calificaciones más bajas y una variabilidad significativa en el desempeño.

El sesgo positivo y la curtosis más alta que lo normal indican que mientras una minoría de estudiantes domina bien el material, una proporción más considerable lucha o tiene un desempeño inconsistente. Estos resultados podrían utilizarse para revisar y ajustar las estrategias pedagógicas, asegurándose de que abordan las necesidades de todos los estudiantes y de que el contenido del curso se enseña de manera efectiva.

4.3 Pruebas de hipótesis sobre los cambios congruentes e incongruentes en las representaciones de los reactivos

Con el objetivo de determinar si existe una diferencia significativa en la dificultad de los reactivos según el tipo de cambio entre registros de representación — congruente o incongruente —, se planteó la siguiente hipótesis:

Hipótesis nula (H_0): No existen diferencias significativas en la dificultad de los reactivos entre los cambios congruentes e incongruentes.

Hipótesis alternativa (H_1): Existen diferencias significativas en la dificultad de los reactivos entre los cambios congruentes e incongruentes.

La prueba T (Tabla 3), ajustada por varianzas no iguales, muestra un valor t de 3.361 y una significancia bilateral de .002, lo que es menor que .05, indicando que rechazamos la hipótesis nula. Esto significa que hay una diferencia estadísticamente significativa en los índices de dificultad entre los reactivos con cambios congruentes e incongruentes, con los reactivos congruentes.

Tabla 3 – Estadísticos de grupo Índice de dificultad contra congruencia

Congruencia	Número de reactivos	Media	Desviación	Error
Cambio congruente	43	0.4440	0.15193	0.02317
Cambio incongruente	13	0.3392	0.07511	0.02083

Fuente: elaboración propia (2025)

Los resultados sugieren que los reactivos que involucran cambios congruentes, según la teoría de representaciones semióticas de Duval, presentan una dificultad menor que aquellos con cambios incongruentes. Esto es coherente con Duval (2006), quien argumenta que los cambios congruentes permiten una mayor coherencia en la transición entre representaciones, facilitando así el proceso de aprendizaje y comprensión por parte de los estudiantes. Por el contrario, los cambios incongruentes pueden aumentar la carga cognitiva, complicando la interpretación y manipulación de la información (Sweller, 1988).

Desde una perspectiva didáctica, este resultado sugiere la necesidad de incluir en la enseñanza del CD actividades que entrenen, específicamente, la conversión entre registros, particularmente en situaciones incongruentes. El uso de tecnologías como GeoGebra puede facilitar esta transición al ofrecer visualizaciones dinámicas que permitan a los estudiantes explorar el vínculo entre una gráfica compleja y su expresión simbólica.

En conjunto, el análisis estadístico apoya la idea de que el tipo de representación no es neutral en el proceso de evaluación ni en el aprendizaje, y debe ser cuidadosamente considerado

al diseñar instrumentos didácticos o evaluativos.

4.4 Análisis ANOVA para contenido conceptual, procedimental y cambios congruentes e incongruentes

Con el fin de explorar de forma más detallada la interacción entre el tipo de contenido evaluado (conceptual o procedimental) y el tipo de cambio entre registros (congruente o incongruente), se realizó un análisis de varianza (ANOVA).

Antes de aplicar los análisis inferenciales, se verificaron los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianzas, cuyos resultados se mantuvieron dentro de los rangos aceptables para estudios de tipo exploratorio. El uso del ANOVA se justifica por la necesidad de comparar las medias de desempeño entre las combinaciones de contenido y tipo de cambio representacional, en coherencia con los objetivos teóricos del estudio. Los 56 reactivos del instrumento fueron clasificados en cuatro categorías:

1. Conceptual con cambio congruente
2. Conceptual con cambio incongruente
3. Procedimental con cambio congruente
4. Procedimental con cambio incongruente

El ANOVA reveló diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los índices de dificultad de estos grupos ($p = 0.048$), lo que indica que al menos dos de las combinaciones presentan diferencias reales en cuanto a la dificultad percibida por los estudiantes. Con un intervalo de confianza para la media al 95% en la Tabla 4 se presentan los descriptivos del análisis ANOVA.

Tabla 4 – Descriptivos del ANOVA entre los índices de dificultad, el tipo de contenido y congruencia

Categoría	Número de reactivos	Media	Desviación	Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	22	0.4200	0.147	0.031	0.3548	0.4852	0.13	0.76
2	6	0.2917	0.035	0.014	0.2545	0.3289	0.24	0.35
3	21	0.4690	0.156	0.034	0.3979	0.5402	0.23	0.79
4	7	0.3800	0.0776	0.029	0.3082	0.4518	0.29	0.52
Total	56	0.4196	0.1440	0.019	0.3810	0.4583	0.13	0.79

Fuente: elaboración propia (2025)

La prueba post-hoc de Tukey (Tabla 5) mostró que la diferencia significativa se encuentra entre los reactivos conceptuales con cambio incongruente y los procedimentales con cambio congruente ($p = 0.037$).

Tabla 5 – Subconjuntos homogéneos obtenidos de la prueba post-hoc de Tukey

Categoría	Número de reactivos	Subconjuntos para alfa=0.05	
		1	2
2	6	0.2917	
4	7	0.3800	0.3800
1	22	0.4200	0.4200
3	21		0.4690

Fuente: elaboración propia (2025)

Se muestran las medias para los grupos en los subconjuntos homogéneos. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 9.935. Los tamaños de los grupos no son iguales. Se utiliza la media armónica de los tamaños de los grupos. Los niveles de error tipo I no están garantizados.

Este resultado sugiere que los estudiantes experimentan mayores dificultades cuando se enfrentan a tareas que demandan un razonamiento conceptual y, al mismo tiempo, implican cambios incongruentes entre registros de representación. Esta observación es consistente con la teoría de Duval (2006), que sostiene que los cambios incongruentes exigen una reorganización mental compleja, y con la propuesta de Sfard (1991), que indica que los enfoques conceptuales (estructurales) son más demandantes cognitivamente que los procedimentales (operacionales), especialmente cuando el estudiante no ha desarrollado aún una comprensión abstracta del objeto matemático.

Desde el punto de vista pedagógico, este hallazgo señala que las mayores barreras de aprendizaje se concentran en reactivos que combinan ambas dimensiones cognitivas elevadas: interpretación conceptual y conversión incongruente. En contextos como el CD, esto se refleja en tareas como la interpretación gráfica de una función compleja y la derivación de su forma algebraica, situación que requiere tanto la comprensión del concepto como la transformación de la representación.

Para poner en contexto las diferencias estadísticamente encontradas entre los grupos 2 y 3 se describen, a continuación, un reactivo de cada categoría.

El reactivo 49 (Figura 2) que pertenece al grupo 2 (conceptuales, cambio incongruente) cuenta con un ID de 0.30 es principalmente conceptual porque requiere entender y aplicar el concepto de derivadas en relación con tasas de cambio relacionadas. Este problema ilustra una aplicación práctica de las tasas de cambio relacionadas y cómo las tasas de cambio en una variable (volumen) impactan otra variable (radio) en un contexto físico real. Aunque la solución involucra cálculos procedimentales, el entendimiento necesario para configurar y relacionar las ecuaciones de tasa de cambio es fundamentalmente conceptual.

Reactivo 49

Se bombea aire a un globo esférico a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es 2 pies?

A) $\frac{dr}{dt} = \frac{9}{32\pi}$

B) $\frac{dr}{dt} = \frac{32\pi}{9}$

C) $\frac{dr}{dt} = \frac{9}{16\pi}$

D) $\frac{dr}{dt} = \frac{16\pi}{9}$

Figura 2 – Reactivo 49 del instrumento de medición
Fuente: elaboración propia (2025)

En este reactivo 49, donde se debe calcular la tasa de cambio del radio de un globo que se está inflando a una tasa conocida de volumen, los cambios en la actividad de conversión pueden considerarse incongruentes. Aunque el problema está basado en aplicar la relación entre el volumen de una esfera y su radio, la transformación de esta relación en una tasa de cambio del radio involucra el uso de CD, específicamente derivadas relacionadas. Determinar la tasa de cambio del radio del globo a partir del cambio en el volumen requiere entender la fórmula del volumen de la esfera y cómo los cambios en el volumen afectan al radio. Este proceso involucra diferenciación implícita y comprensión de cómo aplicar la regla de la cadena en un contexto físico real, la tarea requiere aplicar la diferenciación relacionada para conectar la tasa de cambio del volumen con la tasa de cambio del radio. Esto no es inmediatamente evidente a partir de la expresión del volumen, y requiere una manipulación algebraica y diferenciación que va más allá de la simple manipulación de fórmulas.

La conversión de una fórmula de volumen a una relación entre las tasas de cambio de volumen y radio implica una transformación significativa en la representación de la información. Los estudiantes necesitan reinterpretar una relación geométrica estática (el volumen de una esfera en términos de su radio) en términos dinámicos de cómo una variable (el volumen) afecta a otra variable (el radio) a lo largo del tiempo. Por estas razones, los cambios son incongruentes porque implican una transformación conceptual y matemática significativa, de un conocimiento geométrico estático a una aplicación dinámica de la diferenciación para resolver un problema de tasa de cambio en un contexto práctico.

El reactivo 22 (Figura 3) forma parte del grupo 3 (procedimentales, cambio congruente) y tiene un ID de 0.56, el registro inicial es considerado como algebraico y el registro final numérico, este reactivo es principalmente procedimental. El estudiante necesita calcular el valor de $f(g(x=0))$, el proceso requiere seguir una serie de pasos matemáticos específicos para encontrar el resultado, evaluar $g(x=0)$ y luego sustituir el valor obtenido en la

función $f(x)$. Este reactivo es claramente procedimental y congruente, ya que se centra en la aplicación de un método matemático directo para resolver el problema. Aunque se basa en la comprensión conceptual de lo que son las funciones compuestas y cómo se evalúan, el énfasis está en seguir los pasos de cálculo.

Reactivo 22 Dadas las siguientes funciones $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = 2x + 2$. ¿Cuál es el valor de $f(g(x = 0))$? A) 20 B) 8 C) 4 D) 0

Figura 3 – Reactivo 22 del instrumento de medición
Fuente: elaboración propia (2025)

Los resultados de la investigación sugieren que los cambios incongruentes, que requieren una reevaluación y reorganización más significativas de la información, tienden a ser más exigentes para los estudiantes debido a que tales cambios demandan una mayor carga cognitiva y una reconfiguración conceptual más profunda (Ainsworth, 2006; Sweller, 1988) como por ejemplo cuando los estudiantes deben reevaluar su comprensión de la derivada no sólo como una pendiente de recta tangente, sino como una medida de cómo cambia la posición de un objeto en el tiempo, es decir, su velocidad instantánea. Estos cambios son particularmente difíciles en reactivos conceptuales, que ya implican un nivel de abstracción superior, y se vuelven aún más complejos cuando se combinan con cambios incongruentes. Por otro lado, la ausencia de diferencias significativas en la percepción de dificultad entre los otros grupos podría reflejar la efectividad de las estrategias de instrucción o una homogeneidad en las habilidades de los estudiantes respecto a esos tipos de contenido. Investigaciones anteriores han encontrado que cuando los estudiantes están igualmente preparados y las instrucciones son efectivas, las variaciones en la dificultad de los reactivos tienden a ser menores (Hattie, 2009).

5 Discusión

Los hallazgos de este estudio se alinean con investigaciones internacionales que han destacado la relevancia de las representaciones en el aprendizaje del cálculo y otros dominios matemáticos (Duval, 2006; Sfard, 1991, 2008; Schoenfeld, 2016; Bigotte de Almeida; Queiruga-Dios; Cáceres, 2020; Ainsworth, 2006). De acuerdo con estos autores, los resultados evidencian que las dificultades de los estudiantes no se limitan estrictamente a carencias conceptuales, sino que están estrechamente vinculadas con los desafíos cognitivos que implica

la conversión entre registros semióticos y la transición entre los modos operacional y estructural del razonamiento matemático. Esta integración teórica, aplicada empíricamente en el contexto de la educación en ingeniería, constituye un aporte innovador al campo, al vincular el tipo de contenido y la congruencia representacional con los patrones de desempeño observados. Asimismo, los resultados refuerzan la pertinencia de diseñar experiencias de aprendizaje que promuevan la flexibilidad representacional y la comprensión estructural, aspectos señalados en la literatura reciente como determinantes para el aprendizaje profundo de las matemáticas universitarias.

De igual manera, Chang, Cromley y Tran (2016) destacan que la coordinación entre representaciones múltiples constituye un proceso cognitivo central en el aprendizaje del cálculo y que las mayores dificultades surgen precisamente en las tareas que requieren conversiones no directas entre representaciones simbólicas, gráficas o verbales. Sus resultados muestran que los estudiantes experimentan mayores obstáculos al pasar del lenguaje algebraico al gráfico o del texto al gráfico, patrones que coinciden con los hallazgos del presente estudio, donde los ítems con cambios incongruentes presentaron una mayor demanda cognitiva y niveles de dificultad significativamente superiores. Asimismo, la distinción establecida por estos autores entre tareas de percepción (reconocimiento de correspondencias) y tareas de construcción (generación de una nueva representación) permite profundizar la interpretación de los resultados obtenidos. Las conversiones congruentes pueden asociarse con tareas de percepción, mientras que las incongruentes se asemejan a tareas de construcción, al demandar la producción de una nueva representación mental o simbólica.

Por ejemplo, en el reactivo 29 del instrumento, donde se presenta la gráfica de una función con una discontinuidad vertical y se solicita determinar el valor del límite bilateral precisamente en el lugar de la discontinuidad, solo tres de cada diez estudiantes respondieron correctamente que el límite no existe, mientras que la mayoría eligió erróneamente la opción de infinito positivo. Este resultado evidencia una confusión conceptual frecuente: los estudiantes asocian el crecimiento indefinido de la función con la existencia de un límite, sin considerar que en el caso de un límite bilateral las tendencias opuestas desde la izquierda y la derecha impiden su existencia. Desde el modelo de Bossé, Adu-Gyamfi y Chandler (2014), esta situación refleja una conversión incongruente incompleta, ya que el estudiante interpreta la información visual, pero no logra desempaquetar los elementos conceptuales relevantes —la dirección del acercamiento y la dualidad de las aproximaciones numéricas laterales— para construir una representación analítica equivalente. En términos de Duval (2006), se trata de una conversión no isomórfica, donde el registro gráfico conserva la forma visual del

comportamiento de la función, pero se pierde parte de su significado matemático, generando una pérdida semántica entre lo observado y lo conceptualizado.

Adu-Gyamfi, Bossé y Chandler (2017) amplían el análisis al introducir la relación entre el conocimiento del dominio (Domain Knowledge, DK), el conocimiento del registro (Register Knowledge, RK) y su integración (Domain Register Knowledge, DRK). Este marco tripartito explica las diferencias en el desempeño de los estudiantes frente a tareas de conversión congruente e incongruente. Los autores encontraron que las conversiones incongruentes requieren un nivel más alto de coordinación cognitiva entre el DK y el RK, característica asociada con un razonamiento semántico mediado. Desde esta perspectiva, las dificultades detectadas en este estudio pueden interpretarse como indicios de un DRK incipiente: los estudiantes con un dominio limitado del registro tienden a ejecutar transformaciones sintácticas superficiales, mientras que quienes integran ambos conocimientos muestran una comprensión estructural más profunda, en consonancia con la dualidad estructural–operacional propuesta por Sfard (1991).

Más recientemente, Adu-Gyamfi, Bossé y Lynch-Davis (2019) consolidaron una tipología de tres tipos de traducciones representacionales — unidireccional, bidireccional e iterativa — que permite distinguir niveles crecientes de complejidad cognitiva. Las traducciones iterativas, que implican la coordinación recíproca y sostenida entre dos registros, presentan las mayores demandas cognitivas, situación comparable a la de los cambios incongruentes identificados en este estudio. De acuerdo con estos autores, la dificultad de una tarea representacional depende no solo del número de registros involucrados, sino también de la reversibilidad y de los heurísticos necesarios para mantener la equivalencia semántica entre ellos. Este planteamiento refuerza la interpretación de que las incongruencias representacionales conllevan mayores exigencias cognitivas y conceptuales, y sustenta la necesidad de diseñar secuencias instruccionales que progresen desde traducciones unidireccionales hacia iterativas, promoviendo la flexibilidad representacional y la comprensión estructural del cálculo.

6 Conclusiones

Este estudio permitió identificar y analizar las dificultades que enfrentan los estudiantes de ingeniería en el aprendizaje del CD, integrando la teoría de las representaciones semióticas y la dualidad estructural-operacional como marcos teóricos complementarios. A través de un instrumento criterial validado y confiable, se examinó cómo los tipos de contenido

y los cambios entre registros de representación influyen en la dificultad de los reactivos.

Los análisis estadísticos revelaron que los reactivos con cambios incongruentes y contenido conceptual presentan mayor dificultad, lo cual sugiere que estas características generan una mayor demanda cognitiva. Este resultado concuerda con lo planteado por Duval (2006) y Sfard (1991), al evidenciar que la conversión entre registros en situaciones incongruentes y el razonamiento estructural requieren niveles más altos de abstracción y reorganización conceptual.

Asimismo, se confirmó que el tipo de representación no es un factor neutro en el aprendizaje matemático: su congruencia o incongruencia influye significativamente en el desempeño. Este hallazgo tiene implicaciones directas para el diseño de instrumentos didácticos y evaluativos, que deben considerar cuidadosamente las formas de representación y su impacto en la comprensión de los estudiantes.

Desde el punto de vista metodológico, el instrumento desarrollado demostró altos niveles de confiabilidad y validez, con índices que superan los estándares aceptados en la literatura. Esto respalda su uso como herramienta diagnóstica para detectar patrones de dificultad en estudiantes de ingeniería.

En términos pedagógicos, los resultados respaldan la necesidad de implementar estrategias didácticas activas que favorezcan la conversión entre registros y el tránsito entre las dimensiones estructural y operacional del conocimiento matemático. Herramientas como GeoGebra, así como metodologías como el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), pueden contribuir a este objetivo.

Finalmente, se recomienda extender esta línea de investigación a otras áreas del currículo de matemáticas en ingeniería, e investigar la eficacia de intervenciones específicas dirigidas a mejorar la flexibilidad representacional y el razonamiento estructural. Asimismo, futuras investigaciones podrían fortalecer la validación de instrumentos mediante la inclusión de perfiles psicométricos y metodológicos diversos.

Contribuciones de autoría

Todos los autores contribuyeron sustancialmente a la concepción y planificación del estudio; a la obtención, análisis e interpretación de los datos; a la redacción y revisión crítica del manuscrito; y aprobaron la versión final que será publicada.

Disponibilidad de datos

Los datos generados o analizados durante este estudio están incluidos en este artículo publicado.

Referências

- AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and Instruction**, v. 16, n. 3, p. 183–198, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- ADU-GYAMFI, K.; BOSSÉ, M. J.; CHANDLER, K. Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 5, p. 915–938, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9730-1>
- ADU-GYAMFI, K.; BOSSÉ, M. J.; LYNCH-DAVIS, K. Three types of mathematical representational translations: Comparing empirical and theoretical results. **School Science and Mathematics**, v. 119, n. 7, p. 396–404, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1111/ssm.12360>
- AGUILAR-SALINAS, W. E.; FUENTES-LARA, M. D. L.; JUSTO-LÓPEZ, A. C.; MARTÍNEZ-MOLINA, A. D. Propuesta para el tratamiento de problemas de tasas de variación relacionadas mediante el uso de GeoGebra: un estudio de casos. **Formación universitaria**, La Serena, v. 14, n. 5, p. 95–106, 2021. Disponible en: <https://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v14n5/0718-5006-formuniv-14-05-95.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.
- AKE, B. T. **An investigation of the instructional norms of mathematical communication when students present geometry proofs at the board**. 2023. Disertación (Doctorado en Educación) – The University of Maine, Augusta, 2023.
- ALSINA, Á.; CORONATA, C. Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. **Educación matemática en la infancia**, Valladolid v. 3, n. 2, p. 23–36, 2014. DOI: <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2014.23-36>
- BIGOTTE DE ALMEIDA, M.; QUEIRUGA-DIOS, A.; CÁCERES, M. J. Differential and integral calculus in first-year engineering students: a diagnosis to understand the failure. **Mathematics**, v. 9, n. 1, p. 61, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9010061>
- BOSSÉ, M. J.; ADU-GYAMFI, K.; CHANDLER, K. Students' differentiated translation processes. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, Plymouth, p. 1–28, mar. 2014. Disponible en: <http://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.
- BROOKHART, S. M. **How to create and use rubrics for formative assessment and grading**. Alexandria: ASCD, 2013.
- CARMINES, E.; ZELLER, R. **Reliability and validity assessment**. Thousand Oaks: Sage, 1987.
- CENAS, F. Y.; SILVA, M. G.; MINEZ, Y. Z. Evaluación de competencia en cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería. **Horizontes**, La Paz, v. 6, n. 24, p. 1193–1203, jun. 2022. DOI: <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i24.407>
- CHANG, B. L.; CROMLEY, J. G.; TRAN, N. Coordinating multiple representations in a reform calculus textbook. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 14, n. 8, p. 1475–1497, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9652-3>

COBB, P. Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. In: LESTER, F. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. 2. ed. Charlotte: Information Age, 2007. p. 3-38.

CONTRERAS, L. **Desarrollo y pilotaje de un examen de español para la educación primaria en Baja California**. 2000. Disertación (Maestría en Educación) – Universidad Autónoma de Baja California, Baja California, 2000. Disponible en: http://iide.ens.uabc.mx/documentos/divulgacion/tesis/MCE/1998/Luis_Angel_Contreras_Nino.pdf. Acceso en: 12 mar. 2026.

CONTRERAS, L.; BACKHOFF, E. Metodología para elaborar exámenes criterios alineados al currículo. In: CASTAÑEDA, S. (ed.). **Educación, aprendizaje y cognición: teoría en la práctica**. México: Manual Moderno, 2004. p. 155-174.

CORRAL, Y. Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. **Revista Ciencias de la Educación**, Valencia, v. 19, n. 33, p. 228-247, 2009. Disponible en: <https://es.calameo.com/read/00441616680da9a5cd6ab>. Acceso en: 12 mar. 2026.

CROCKER, L.; ALGINA, J. **Introduction to classical and modern test theory**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1986.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

GARCÍA, M.; VILANOVA, S. Las representaciones sobre el aprendizaje de los alumnos de profesorado: diseño y validación de un instrumento para analizar concepciones implícitas sobre el aprendizaje en profesores de matemática en formación. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, Buenos Aires, v. 3, n. 2, p. 27-35, 2008. Disponible en: <https://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v3n2/v3n2a03.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.

HATTIE, J. **Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement**. New York: Routledge, 2009.

HENRYSSON, S. Gathering, analyzing, and using data on test items. In: THORNDIKE, R. L. (ed.). **Educational measurement**. Washington: American Council on Education, 1971. p. 130-159.

HERNÁNDEZ-NIETO, R. **Contributions to statistical analysis**. Mérida: Universidad de Los Andes, 2002.

HITT, F. Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 1, p. 123-134, 1998. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/222036692_Difficulties_in_the_articulation_of_different_representations_linked_to_the_concept_of_function.pdf. Acceso en: 12 mar. 2026.

HUSAMAH, H.; SUWONO, H.; NUR, H.; DHARMAWAN, A. Sustainable development research in Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education: a systematic literature review. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Eastbourne, v. 18, n. 5, p. e2103, 2022. Disponible en: <https://www.ejmste.com/download/sustainable-development-research-in-eurasia-journal-of-mathematics-science-and-technology-education-11965.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. En: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 390-419.

LIBEDINSKY, N. S. Evaluación basada en criterios: rúbricas y dianas. In: CÁRCAMO, H.; MONTES, S. (ed.). **Modelo híbrido: reflexiones desde la práctica pedagógica**. Santiago de Chile: Fundación Lúminis; Instituto de Formación Docente, 2024. p. 39-50.

MORÁN-SOTO, G.; GONZÁLEZ-GARCÍA, N. I.; LÓPEZ-TORRES, R. M.; CABRERA-MARTÍNEZ, R.; MEDINA-NÚÑEZ, A.; CARDOZA-MARTÍNEZ, M. G. The importance of differential calculus in the performance of engineering students. In: WORLD ENGINEERING EDUCATION FORUM, 24., 2023, Monterrey. **Proceedings...** New York: IEEE, 2023. p. 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1109/WEEF-GEDC59520.2023.10344022>

MUÑIZ, J. Las teorías de los tests: teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems. **Papeles del Psicólogo: Revista del Colegio Oficial de Psicólogos**, Madrid, v. 31, n. 1, p. 67-74, 2010. Disponible en: <https://www.papelesdelpsicologo.es/pdf/1796.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2025.

MUÑOZ, J.; MATO, M. Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. **Revista de Investigación Educativa**, Murcia, v. 26, n. 1, p. 209-226, 2008. Disponible en: <http://revistas.um.es/rie/article/view/94181>. Acceso en: 12 mar. 2025.

NITKO, A. A model for developing curriculum-driven criterion-referenced and norm-referenced national examinations for certification and selection of students. In: CONFERENCIA INTERNACIONAL SOBRE EVALUACIÓN Y MEDICIÓN EDUCATIVAS DE LA ASOCIACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LA EVALUACIÓN EDUCATIVA, 1., 1994, Pretoria. **Proceedings...** Pretoria: ASSESSA, 1994. p. 1-29. Disponible en: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED377200.pdf>. Acceso en: 10 feb. 2026.

POPHAM, W. J. Modern educational measurement: a practitioner's perspective. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1990.

PRIETO, G.; DELGADO, A. Fiabilidad y validez. **Papeles del Psicólogo**, Madrid, v. 3, n. 1, p. 67-74, 2010. Disponible en: <http://www.papelesdelpsicologo.es/pdf/1797.pdf>. Acceso en: 10 feb. 2026.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

REIDL-MARTÍNEZ, L. Confiabilidad en la medición. **Investigación en Educación Médica**, Ciudad de México, v. 2, n. 6, p. 107-111, 2013. Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/iem/v2n6/v2n6a7.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.

ROBREDO, J. M.; LEDEZMA, R.; ALVARADO, J. F. **Reticulación: una estrategia para la elaboración de programas de estudio**. 1983. Tesis (Licenciatura en Psicología) – Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 1983.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 1-36, 1991. Disponible en: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00302715.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.

SFARD, A. Introduction to Thinking as Communication. **The Mathematics Enthusiast**, Missoula, v. 5, n. 2-3, p. 429-436, 2008. Disponible en: <https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1121&context=tme>. Acceso en: 12 mar. 2026.

SCHOENFELD, A. H. What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. **Educational Researcher**, Washington, v. 43, n. 8, p. 404-412, 2014. DOI: <https://doi.org/10.3102/0013189X14554450>

SCHOENFELD, A. H. Research in mathematics education. **Review of Research in Education**, Washington, v. 40, p. 497-528, 2016. DOI: <https://doi.org/10.3102/0091732X16658650>

STEWART, J. **Calculus**: early transcendentals. Boston: Cengage Learning, 2012.

STIGGINS, R. J. Assessment through the student's eyes. **Educational Leadership**, Alexandria, v. 64, n. 8, p. 22-26, 2007. Disponible en: https://pdo.ascd.org/lmscourses/PD11OC106/media/USM_M6_Reading_Students_Eyes.pdf. Acceso en: 12 mar. 2026.

SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: effects on learning. **Cognitive Science**, Medford, v. 12, n. 2, p. 257-285, 1988. Disponible en: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1207/s15516709cog1202_4. Acceso en: 12 mar. 2026.

URRUTIA, M.; BARRIOS, S.; GUTIÉRREZ, M.; MAYORGA, M. Métodos óptimos para determinar validez de contenido. **Educación Médica Superior**, La Habana, v. 28, n. 3, p. 547-558, 2014. Disponible en: <http://scielo.sld.cu/pdf/ems/v28n3/ems14314.pdf>. Acceso en: 12 mar. 2026.

Enviado el: 04 de diciembre de 2024.

Aprobado el: 27 de octubre de 2025.

Editor jefe responsable: Prof. Dr. Roger Miarka

Editora asociada responsable: Prof. Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa