
ARTÍCULO

El Conocimiento de la Disciplina en la Formación de Profesores en Matemática: estudio de la complementariedad de las geometrías sintética y analítica

Subject Matter Knowledge in Mathematics Teacher Training: study of the complementarity of synthetic and analytical geometries

Lucía Schaefer*

 ORCID iD 0009-0009-4184-1926

Natalia Sgreccia**

 ORCID iD 0000-0003-2988-7410

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo analizar el conocimiento de la disciplina puesto en juego al estudiar la complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica del plano en la formación de profesores. La investigación es de tipo cualitativa, con alcance descriptivo-interpretativo, para el estudio de un caso. Se realiza un análisis de contenido de una propuesta intencionalmente diseñada, que involucra el trabajo en ambos enfoques, y su respectiva implementación en la asignatura Geometrías del Plano del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. Como perspectiva teórica se adopta el modelo del *conocimiento matemático para la enseñanza* y las categorías de análisis se corresponden con los dominios propuestos en este marco y correspondientes al conocimiento de la disciplina, en articulación con modalidades relativas a las geometrías sintética y analítica devenidas en estudios previos. Entre los principales hallazgos se encuentra la influencia de la forma en que se presentan los enunciados al momento de plantear una consigna de trabajo, como así también el aporte que realizan a la complementariedad de los enfoques las discusiones entre docentes y estudiantes al compararlos y confrontarlos. Se detecta este análisis en asignaturas disciplinares como una situación fértil que podría contribuir a la configuración del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores.

Palabras clave: Geometrías Sintética y Analítica. Formación de Profesores. Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Conocimiento de la disciplina.

Abstract

* Profesora en Matemática por la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Profesora Adjunta Dedicación Simple en la UNR y Profesora Titular en el Colegio Parque de España, Rosario, Santa Fe, Argentina. E-mail: lucias@fceia.unr.edu.ar.

** Doctora en Humanidades y Artes mención Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Profesora Titular Dedicación Exclusiva en la UNR e Investigadora Adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Rosario, Santa Fe, Argentina. E-mail: sgreccia@fceia.unr.edu.ar.

The objective of this article is to analyze the knowledge of the discipline put into practice when studying the complementarity and continuity of the synthetic and analytical geometries of the plane in teacher training. The research is qualitative, with a descriptive-interpretive scope for a case study. A content analysis is carried out on an intentionally designed proposal, which involves working on both approaches and their respective implementation in the Plane Geometries subject of the Mathematics Teaching course at the National University of Rosario. From a theoretical perspective, the model of *mathematical knowledge for teaching* is adopted and the analysis categories correspond to the domains proposed in this framework and corresponding to the knowledge of the subject, in articulation with modalities related to the synthetic and analytical geometries developed in previous studies. Among the main findings is the influence of how the statements are presented when proposing a work assignment, as well as the contribution that discussions between teachers and students make to the complementarity of approaches when comparing and confronting them. This analysis in disciplinary subjects is detected as a fertile situation that could contribute to the configuration of mathematical knowledge for the teaching of future teachers.

Keywords: Synthetic and Analytical Geometries. Teacher training. Mathematical Knowledge for Teaching. Knowledge of the discipline.

1 Introducción

En los estándares preliminares propuestos por el Consejo Interuniversitario Nacional (Argentina, 2013) para los Profesorados Universitarios en Matemática (PUM), se distinguen las geometrías como un ejemplo paradigmático para la enseñanza de una teoría axiomático-deductiva. Se señala, al igual que en Barrantes, López y Fernández (2015), que las geometrías tienen numerosas aplicaciones sobre el mundo que nos rodea y que propician el desarrollo de diferentes habilidades y formas de razonamiento. A pesar de esto, se trata de una rama de la Matemática que ha sufrido cierta desvalorización disciplinaria, no solo en la escuela, sino también en la formación de profesores (Fernández; Gysin, 2010; Ferraris; Montoro, 2004). Generalmente relegada en la práctica, suele ser presentada de forma desarticulada (Méndez, 2010), con contenidos repetidos año a año desde la educación primaria y una importante falta de integración entre los enfoques sintético y analítico en la escuela secundaria. Gascón (2002) destaca la necesidad de investigar cómo conectar las técnicas sintéticas y las analíticas sin perder de vista la continuidad y complementariedad de ambos enfoques (Henríquez-Rivas; Montoya-Delgadillo, 2016), lo que permitiría una comprensión más profunda e integrada de las geometrías (Bonilla; Parraguez, 2013). Cerizola, Martínez y Mini (2006) y Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) enfatizan esta mutua influencia con propuestas didácticas que enfocan un mismo problema desde los dos puntos de vista (sintético y analítico). Pero equipos de autores de diversas latitudes resaltan la escasa formación en geometrías en futuros profesores en Matemática, con desconocimiento de sus fundamentos (Santos; Teles, 2021; Crescenti, 2009; Zakaryan; Sosa, 2021). Incluso, Jones (2000) menciona que la cantidad de geometría enseñada disminuye a medida que se avanza en la escolaridad, pudiendo hasta desaparecer en el nivel

universitario, lo cual consiste un problema pues se espera que los profesores enseñen la disciplina teniendo poca formación. A pesar de esto, Gonzato, Godino y Neto (2011) señalan que habitualmente las investigaciones ponen foco en analizar procedimientos y estrategias puestas en juego para resolver tareas por parte de niños y adolescentes, y que las pocas que lo hacen con profesores, se centran en cuestiones aisladas de cada concepto.

En tal sentido, y en el marco de una investigación más amplia, interesa analizar los modos de complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica del plano en carreras de PUM del país, en cada uno de los tres niveles de concreción curricular: políticas curriculares, accionar institucional y trabajo didáctico en el aula (Terigi, 1999). En particular, se comparten algunos resultados referidos al trabajo didáctico en el aula, con relación a las tareas matemáticas llevadas a cabo en la asignatura Geometrías del Plano, correspondiente al tercer año del PUM de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) en Argentina. De este modo, se busca atender al interrogante: ¿de qué manera se fortalece el conocimiento de la disciplina de futuros profesores para la enseñanza de las geometrías al abordar tareas formativas que implican el trabajo con la complementariedad y continuidad a los enfoques sintético y analítico?

2 Marco teórico

A partir de los aportes de Shulman (1987), quien define el *paradigma perdido* y considera que la comprensión del contenido es un tipo de conocimiento clave en la profesión de enseñar, Ball, Thames y Phelps (2008) proponen el *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT) como modelización del conocimiento necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de la Matemática. Los autores señalan que este conocimiento es multidimensional y reconocen seis dominios de conocimiento: común del contenido (CCK), en el horizonte del contenido (HCK) y especializado del contenido (SCK), del contenido y de los estudiantes (KCS), del contenido y de la enseñanza (KCT) y del contenido y del currículum (KCC). Los tres primeros se agrupan, a su vez, en el *conocimiento de la disciplina* y los restantes tres en el *conocimiento didáctico del contenido*.

En lo que interesa en este artículo, el conocimiento de la disciplina, el modelo propone que el CCK refiere al empleado en diversos ámbitos profesionales y científicos que se sustentan en la Matemática, más allá del contexto de enseñanza; el HCK, al nivel conciencia de cómo los tópicos matemáticos se relacionan entre sí, con una visión integral de los contenidos a través del currículum; el SCK, a habilidades específicas y exclusivas de la tarea de enseñar, atravesadas por la especificidad del contenido matemático. A su vez, desde el equipo de

investigación donde se inscribe este trabajo, se proponen ciertas modalidades, las cuales se indican dentro de cada dominio en la Figura 1, y tienen sustento en estudios previos desde el enfoque analítico (Ciccioli; Sgreccia, 2020) y sintético (Schaefer; Sgreccia, 2018). En el CCK se consideran tres indicadores, referidos al *tratamiento conceptual del contenido*, el *lenguaje matemático* que se utiliza, cómo se introducen términos y notaciones, y los *procedimientos matemáticos* que se llevan a cabo en el aula, como deducciones o institucionalizaciones. En el HCK se valora la *vinculación geometría sintética-analítica* y la toma de conciencia de la relación entre conceptos, el *encuadre histórico-epistemológico* que presenta las bases y fundamentos de la geometría, y la *alusión al trabajo matemático* con una mirada general. Por último, en el SCK, la *justificación de procedimientos*, la elección y relación de diferentes *representaciones* de un objeto matemático, el uso de *ejemplos* y la reflexión sobre el *lenguaje matemático* y los significados construidos.

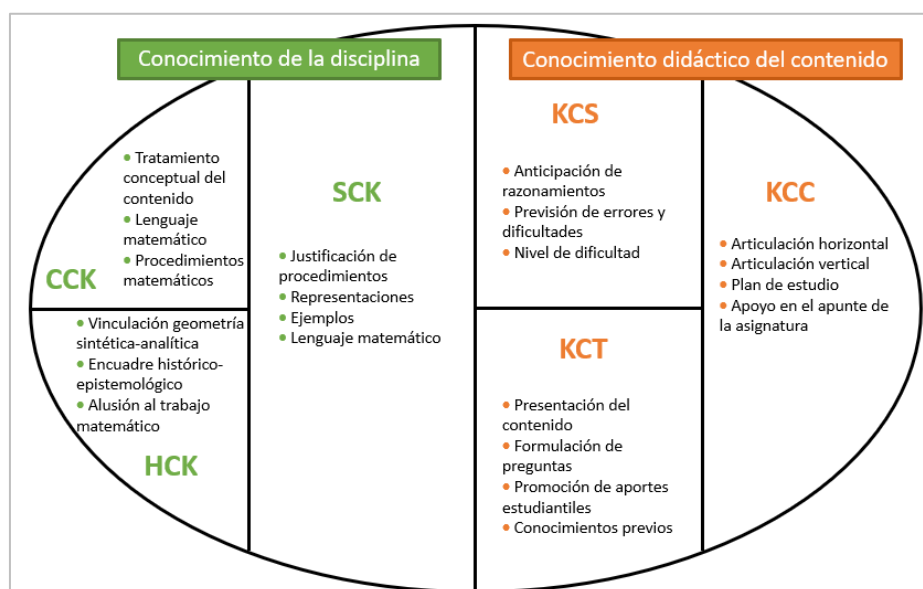


Figura 1 - Componentes de los dominios del MKT en el marco del presente estudio
Fuente: elaboración propia, con base en Ball, Thames y Phelps (2008)

Cabe destacar que, en este caso, *el contenido* lo constituyen las geometrías sintética y analítica del plano y las tareas matemáticas que se proponen en el aula de formación del PUM de la UNR, las cuales forman parte de los dispositivos que configuran el MKT de las geometrías de los futuros profesores en Matemática.

3 Metodología

La investigación que se plantea es de tipo *cualitativa* dado que busca comprender e interpretar un fenómeno -articulación de los enfoques sintético y analítico en la formación

inicial-, con *alcance descriptivo-interpretativo* pues se especifican características desde un entramado intencionado sobre el objeto de estudio -tareas matemáticas y sus implementaciones- (Sampieri; Collado; Lucio, 2014). El *objeto de estudio* es la articulación entre los enfoques sintético y analítico de la geometría en la formación de profesores en Matemática desde el nivel curricular del trabajo didáctico del aula (Terigi, 1999).

La propuesta consiste en un *estudio de caso* donde se analiza en profundidad una unidad - el PUM de la UNR -, mediante la que se abarca la complejidad de casos particulares para aproximarse al objeto de estudio de forma global (Stake, 1999). Se trabaja con una propuesta de enseñanza diseñada en el marco de la investigación y su respectiva implementación en el PUM de la UNR. Cabe destacar que en el plan de estudio actual de dicha carrera (Argentina, 2018) las geometrías son una de las tres ramas clásicas que constituyen el núcleo disciplinar, junto a análisis y álgebra. Estas ramas se encuentran con distintos niveles de profundidad a lo largo de los cuatro años de formación. Las geometrías se abordan en un nivel elemental en primer año (Álgebra y Geometría Analítica I y II) y en un nivel integrador en tercer año (Geometrías del Plano y Geometrías del Espacio).

Precisamente, Geometrías del Plano se constituye en la primera actividad curricular con formato de asignatura disciplinar que es exclusiva del Profesorado. Allí se sientan los fundamentos disciplinares de la geometría sintética, previendo profundizar sus limitaciones y potencialidades para resignificar el enfoque analítico estudiado en primer año. Es decir, este espacio espera integrar ambos enfoques para una mejor comprensión de las geometrías del plano en su conjunto, lo que construye una base sobre la cual se configura el MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008) de los futuros profesores. Esto proyecta un especial énfasis en esta rama de la Matemática para analizar los dominios de conocimiento de la disciplina a disposición de un profesor, que resignifiquen el contenido de la materia con el propósito de hacerlo asequible a otros en tareas de enseñanza (Gonzato; Godino; Neto, 2011; Ribeiro; Monteiro; Carrillo, 2010). Así mismo, si bien el modelo del MKT surge de la práctica y del análisis de situaciones de aula donde se desempeñan profesores en ejercicio, investigaciones anteriores han demostrado su utilidad para el estudio de ciertos momentos en la formación docente inicial (Ciccioli; Sgreccia, 2020; Climent; Carrillo, 2002; Gonzato; Godino; Neto, 2011).

En este marco, se recolectan datos de diferente naturaleza, acorde a una *triangulación metodológica* (Marradi; Archenti; Piovani, 2007), conformada en esta investigación por las técnicas de documentación de producciones escritas estudiantiles, análisis de contenido del material de estudio de la cátedra y observación no participante de clases de Geometrías del Plano. Aquí se conjuga el análisis documental de producciones estudiantiles con observaciones

de clases en las que se socializaron dichas producciones. En efecto, se analiza el contenido del trabajo de estudiantes con atención al enfoque empleado, así como a los conceptos desarrollados en la asignatura. La *matriz de procesamiento* la constituyen los dominios del conocimiento de la disciplina del MKT, junto con las modalidades propuestas de estudios anteriores mencionadas en la Figura 1.

Con base en el problema de Echeverría (2015), se propone a los docentes de la asignatura (D1 y D2) el siguiente Problema (denominado *A*; hubo también otro: *B*), con aclaraciones entre paréntesis para su implementación:

1. *Resuelva el problema: Hallar una circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(6,11)$ y $C(12,5)$. (La idea es no dar mayores indicaciones, para que surjan distintas resoluciones).*
2. *Comparta su resolución y clasifique todas las del curso según sus diferencias y similitudes. (Se espera que surjan al menos dos resoluciones: una exclusivamente analítica, que involucra un sistema de ecuaciones; otra que piensa primero una estrategia sintética y luego vuelve a la analítica. Ejemplo de estrategia sintética: mediante mediatrices; en este caso, ¿cuál sería el enunciado del problema sintético? ¿Cómo se puede escribir?).*
3. *En la clasificación anterior, decida con cuál o cuáles de los enfoques se está trabajando. Analice similitudes y diferencias, ventajas y desventajas de cada uno (Consigna propuesta a la cátedra, 2021).*

Con la consigna 1, se espera activar el CCK, dado que involucra la resolución de una tarea matemática, así como el uso adecuado de los términos y la notación. La consigna 2, al involucrar la comprensión de diferentes resoluciones a un mismo problema desde distintos enfoques, colabora en la formación del SCK. La consigna 3 requiere conectar conceptos matemáticos, comprender sus contextos, y detectar oportunidades matemáticas de cada enfoque, lo cual aporta a la activación del HCK.

Como análisis previo, las investigadoras estudian tres posibles tipos de resoluciones. El primero de ellos, denominado Res1 (abreviatura de resolución de tipo 1) y con un enfoque totalmente analítico, se basa en la definición de circunferencia como conjunto de puntos que verifican la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ para algún centro (a, b) y radio $r > 0$. A partir de la misma, y considerando la pertenencia a la curva de los puntos dados, plantea un sistema de tres ecuaciones y su posterior resolución con herramientas algebraicas. El segundo tipo de resolución (Res2), totalmente sintético, parte de tres puntos cualesquiera no alineados y realiza una sucesión de pasos para la construcción con regla y compás de la circunferencia buscada. Utiliza las definiciones sintéticas de triángulo y mediatriz, además de propiedades referidas a la intersección de mediatrices en un triángulo, a la unicidad de circunferencia dados tres puntos, y a la equidistancia del circuncentro respecto a estos últimos. El resultado presentado, a diferencia de Res1, es la construcción de la circunferencia en sí misma. En cuanto al tercer tipo

de resolución (Res3), sintético-analítico, propone una estrategia desde la geometría sintética, para luego resolver desde la geometría analítica planteando ecuaciones de rectas, tanto aquellas que contienen a los puntos dados como así también las mediatrices. Esto implica la resolución de un sistema de ecuaciones para obtener el centro de la circunferencia, y también la definición de distancia para hallar el radio de la misma. El resultado presentado, al igual que en Res1, es la ecuación de la circunferencia.

Los *participantes* en esta parte del estudio son D1, D2 y las cinco estudiantes (E1 a E5), todas de género femenino, de Geometrías del Plano presentes al realizar la puesta en común del Problema A. Todos presentaron consentimiento de participación voluntaria.

4 Resultados

En el marco de Geometrías del Plano, D1 y D2 presentan la consigna 1 del Problema A para que las estudiantes lo resuelvan de modo individual en clase y lo entreguen vía plataforma; los otros dos apartados se trabajan oralmente durante la implementación. Las resoluciones admiten formatos variados: tres escriben en forma manual mientras que las otras dos con LaTeX; dos no realizan ningún dibujo, dos lo hacen y con coordenadas (una a mano, otra con GeoGebra) y una sin coordenadas.

En lo que sigue se van recorriendo extractos de la entrega de cada estudiante, junto a actos de habla al momento de la discusión de la resolución del problema en el grupo-clase, con identificación explícita desde la investigación de definiciones y propiedades (en color).

Con relación a E1, en el diálogo de la Figura 2 se observa que inicialmente supone la no linealidad de los tres puntos dados y, por definición, reconoce la posibilidad de construir un triángulo. En el párrafo siguiente expresa su estrategia y traduce la consigna a conceptos geométricos, como ser, circunferencia circunscripta. En cada paso comenta cuál será su estrategia (*Primero tengo que ver..., Observemos ahora...*) y busca probar efectivamente la no linealidad. Para ello, utiliza un axioma de la geometría sintética y pone en juego conocimientos de la geometría analítica, como las ecuaciones paramétricas de una recta y la definición de un punto perteneciente a una curva. Finalmente utiliza procedimientos algebraicos. Es decir, piensa una estrategia de resolución desde el enfoque sintético, incluso con un esquema, y lleva a cabo la resolución desde lo analítico, de forma similar a lo esperado en Res3. Posiblemente la presencia de coordenadas para los puntos en la consigna indujo a E1 a realizar cálculos y preferir el enfoque analítico, tal como señala Di Blasi Regner (2019), incluso cuando la técnica sintética pareciera ser óptima.

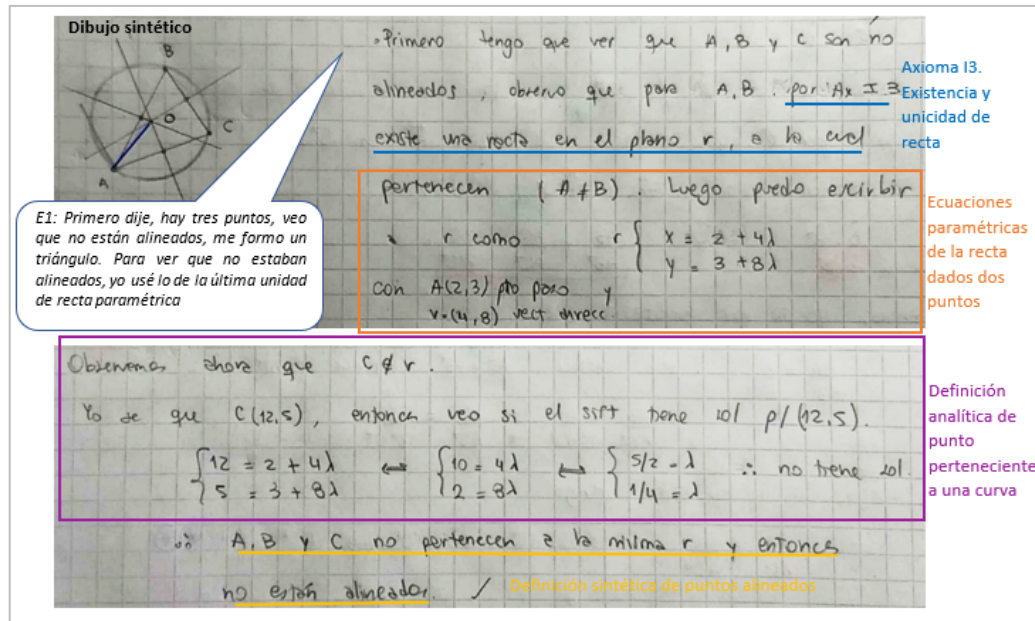


Figura 2 - Primera parte de la entrega de E1
Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

En la Figura 3 E1 continúa su resolución con resultados del enfoque sintético. En el diálogo de la puesta en común se observa que para E1 el centro y el radio de la circunferencia pedida ya fueron hallados, mientras que para D1 y D2 no: E1 piensa desde el enfoque sintético, mientras que D1 y D2 desde el analítico. Si bien Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) señalan que en estudios anteriores se evidencia el predominio del trabajo algebraico por parte del profesor, se supone en este caso que la razón por la cual D1 y D2 insisten con lo analítico es la misma que indica Di Blasi Regner (2019): por la forma en que el enunciado fue presentado.

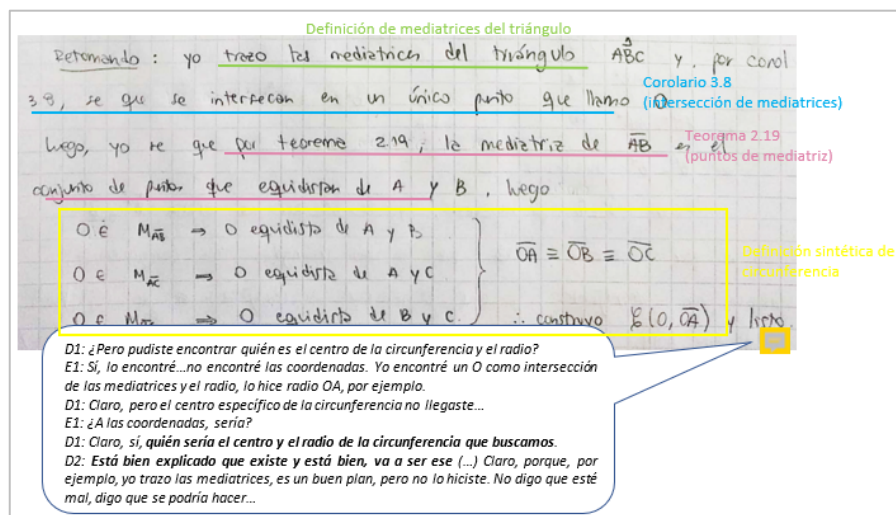
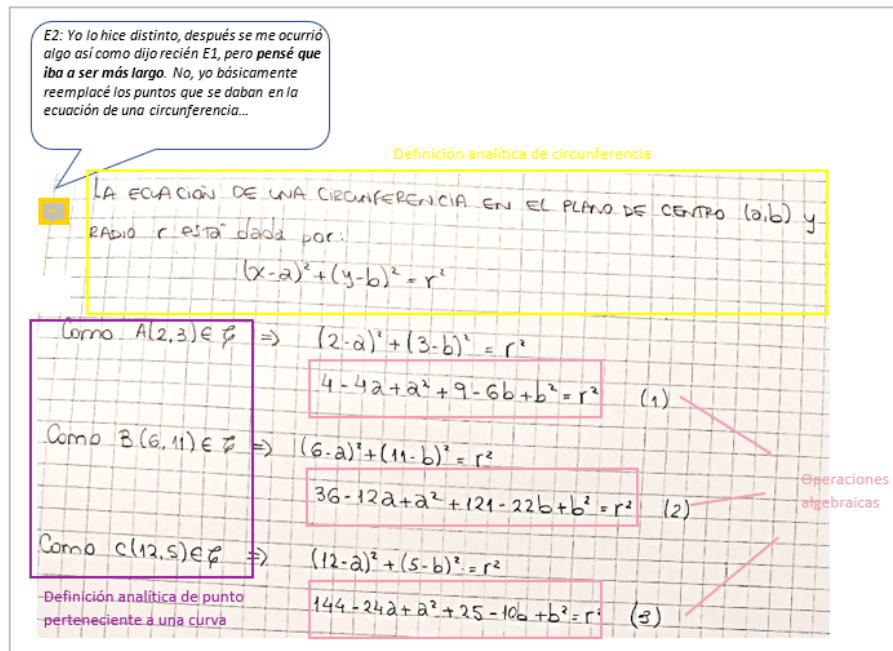


Figura 3 - Segunda parte de la entrega de E1
Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

En cuanto a E2, en la Figura 4 se observa que piensa la estrategia y la resolución totalmente desde la geometría analítica, muy similar a la Res1. Utiliza la definición de circunferencia y de punto perteneciente a una curva dentro de este enfoque, además de

propiedades algebraicas. Aborda el problema desde lo analítico, e incluso en la puesta en común cuando piensa una alternativa, posiblemente sintética, la descarta por *ser más larga*.



E2: Yo lo hice distinto, después se me ocurrió algo así como dijo recién E1, pero **pensé que iba a ser más largo**. No, yo básicamente reemplacé los puntos que se daban en la ecuación de una circunferencia...

Definición analítica de circunferencia

LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO DE CENTRO (a,b) y RADIO r ESTÁ DADA POR:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Como $A(2,3) \in \mathcal{C} \Rightarrow (2-a)^2 + (3-b)^2 = r^2$

$$4 - 4a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = r^2 \quad (1)$$

Como $B(6,11) \in \mathcal{C} \Rightarrow (6-a)^2 + (11-b)^2 = r^2$

$$36 - 12a + a^2 + 121 - 22b + b^2 = r^2 \quad (2)$$

Como $C(12,5) \in \mathcal{C} \Rightarrow (12-a)^2 + (5-b)^2 = r^2$

$$144 - 24a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = r^2 \quad (3)$$

Operaciones algebraicas

Definición analítica de punto perteneciente a una curva

Figura 4. Primera parte de la entrega de E2

Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

En este sentido, Gascón (2003) señala que los problemas de construcción mantienen relaciones que muchas veces se describen más eficazmente con técnicas analíticas, mientras que para Ancochea (2011) es la herramienta algebraica la que permite resolver varios problemas geométricos de una forma más sencilla. Cabe preguntarse, entonces, ¿qué tipos de problemas o situaciones se pueden estudiar de manera más simple con herramientas analíticas? ¿Cuáles con las sintéticas? ¿Qué es lo que determina que uno u otro enfoque conlleve una resolución más sencilla, simple o eficaz?

En la Figura 5 E2 continúa realizando operaciones algebraicas para resolver un sistema de ecuaciones. En este caso, se observa que arribar a un sistema de ecuaciones significa para E2 llegar a un contenido seguro o conocido, donde da por hecho cómo continuar y finalizar la resolución. En sus palabras, *Resolví el sistema que quedaba* le da a la estudiante cierto margen de tranquilidad o automatismo. A partir de su solución, presenta la circunferencia buscada por medio de su ecuación, desde el enfoque analítico. Al igual que con E1, en la puesta en común D1 hace hincapié en dar el centro y el radio a partir de sus coordenadas y de su valor, respectivamente, para que el ejercicio esté completo, esto es, que la circunferencia quede unívocamente identificada.

E2: ... y después resolví el sistema que quedaba con los tres puntos.

Resolución del sistema de ecuaciones

Si igualamos (1) y (2) tenemos:

$$4 - 4a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = 36 - 12a + a^2 + 121 - 22b + b^2$$

$$13 - 4a - 6b = 157 - 12a - 22b$$

$$0 = 144 - 8a - 16b$$

$$0 = 18 - a - 2b \Leftrightarrow a = -2b + 18 \quad (4)$$

Si igualamos (2) y (3) tenemos:

$$36 - 12a + a^2 + 121 - 22b + b^2 = 144 - 24a + a^2 + 25 - 10b + b^2$$

$$157 - 12a - 22b = 169 - 24a - 10b$$

$$0 = 12 - 12a + 12b$$

$$-10b + 10 = -12 \quad -5b = -17$$

$$0 = 1 - a + b \Leftrightarrow a = b + 1 \quad (5)$$

Resolución del sistema de ecuaciones

De (4) y (5) $-2b + 18 = b + 1$
 $-3b = -17 \Rightarrow b = \frac{17}{3} \Rightarrow a = \frac{17}{3} + 1 = \frac{20}{3}$

Reemplazando en (1) tenemos: $(2 - \frac{20}{3})^2 + (3 - \frac{17}{3})^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{196}{9} + \frac{64}{9} = r^2$
 $r^2 = \frac{260}{9}$

LA ECUACIÓN ES $(x - \frac{20}{3})^2 + (y - \frac{17}{3})^2 = \frac{260}{9}$

Definición analítica de circunferencia

D1: Bien, entonces ahí tenés las coordenadas del centro y el radio sería la raíz de 260 sobre 9.
 E2: Sí, bueno, no lo puse porque la ecuación era radio al cuadrado, entonces no lo despejé.

Figura 5 - Segunda parte de la entrega de E2
Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

Respecto a E3, en la Figura 6 se puede observar que realiza un esquema donde utiliza el sistema de coordenadas solamente para ubicar los puntos. Resuelve el problema desde el enfoque sintético, con propiedades de las mediatrices, de forma similar a Res2. No prueba explícitamente la no linealidad de los puntos que permite construir el triángulo, aunque posiblemente lo vea directamente en el dibujo realizado. Previo al trazado de las mediatrices, busca los puntos medios de dos lados del triángulo, lo cual no es necesario (pareciera que *mediatrices* se asocia automáticamente a *hallar puntos medios*), pero esto no es mencionado en la puesta en común ni es retroalimentado por compañeras o docentes.

Al respecto D1 hace hincapié en la necesidad de hallar una ecuación de la circunferencia para que el problema esté completo. Esto último se supone por la preferencia por las herramientas analíticas debido a la manera en que se presentó el enunciado (Di Blasi Regner, 2019). Puntualmente, frente a esto, E3 considera más genérica a la geometría sintética.

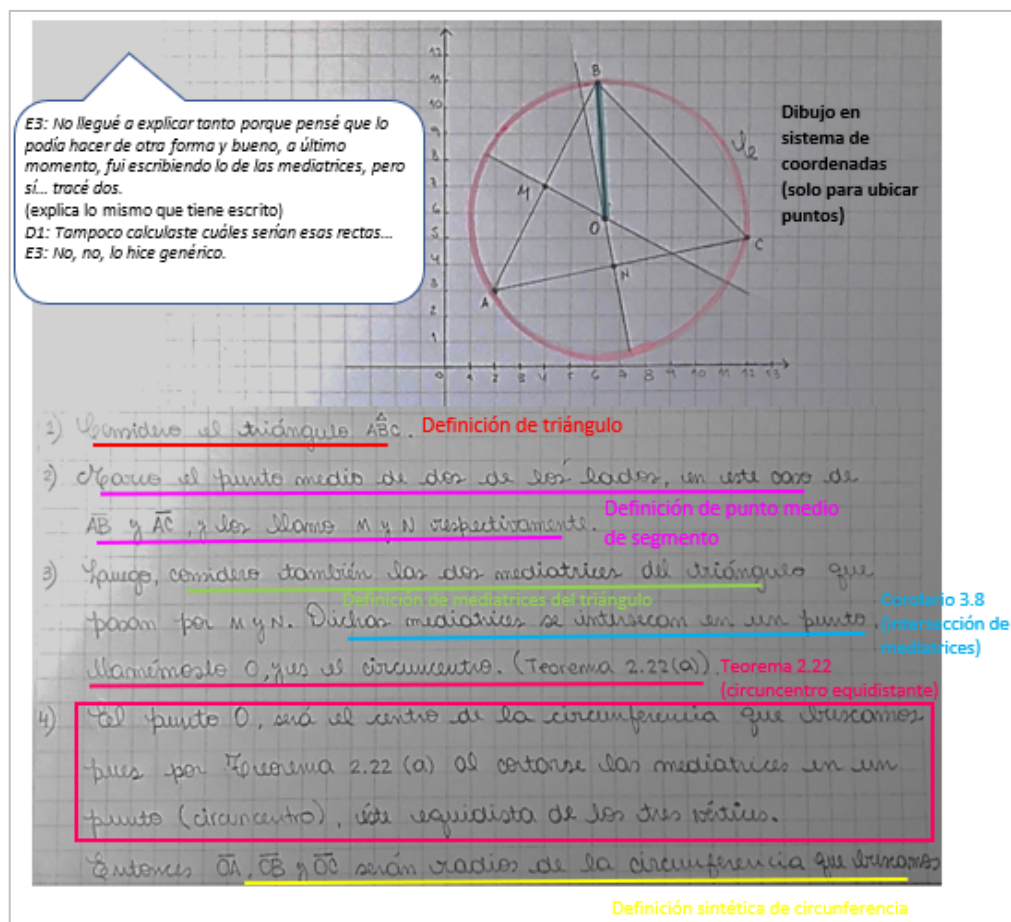


Figura 6 - Entrega de E3
Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

Por su parte, en la Figura 7 E4 piensa la estrategia de forma gráfica, lo cual lleva a trabajar con el enfoque sintético. Sin embargo, analiza cómo escribir su resolución de manera algebraica, posiblemente influenciada por estar los puntos representados mediante coordenadas en la consigna, aspecto resaltado también por Di Blasi Regner (2019) en su estudio. A diferencia de las compañeras, E4 utiliza GeoGebra para la resolución, lo cual le permite abordar el problema desde los dos enfoques, con provecho del potencial del software. Asimismo, a tal exploración la concibe como *trampa* en el sentido de corrimiento del marco formal habitual. En relación con esto último, Hitt (2003) señala que el uso de *software* en el aula puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto. Sin embargo, Morales (2020) afirma que los estudiantes se apropian de las TIC desde distintos lugares que reconfiguran los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En cuanto a los registros de representación, normalmente se apoyan en el algebraico, en el cual confían plenamente (Gatica; Ares, 2012). Esta expresión da cuenta también de un camino a andar en cuanto a la apropiación tecnológica tanto para sí misma como para sus potenciales tareas de enseñanza (Mishra; Koehler, 2006).

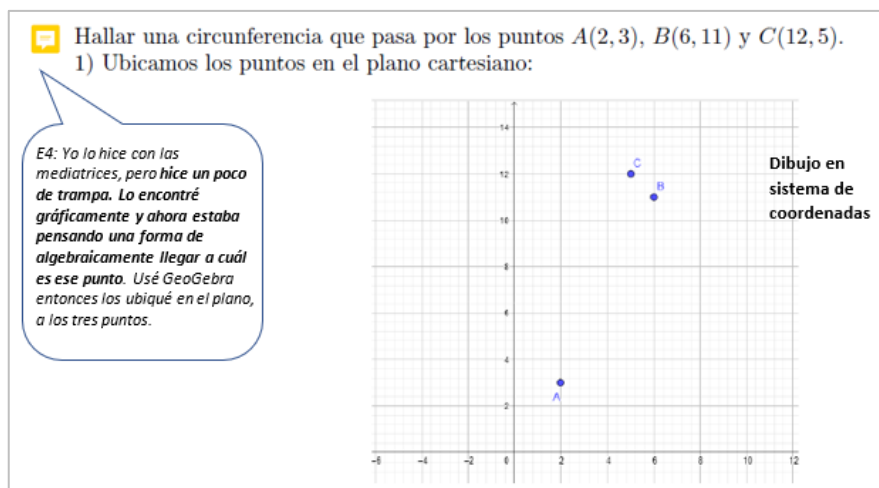


Figura 7 - Primera parte de la entrega de E4

Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

Como se muestra en la Figura 8, E4 comienza analizando la no linealidad de los puntos dados para luego asegurar la posibilidad de construir un triángulo y, para esto, se basa en el sistema de coordenadas al igual que E3, solo que en este caso es explícito. Menciona la construcción del circuncentro del triángulo y, si bien no explicita cómo lo realiza si no que solo aclara *con regla y compás*, en el dibujo se observan trazadas dos mediatrices (de modo de hacerlo operativo mediante el *software*). En la puesta en común connota como *lindo* al lugar en que quedó el punto, posiblemente en alusión a que las coordenadas son números enteros.

Luego, construye desde el enfoque sintético una circunferencia dado su centro y su radio. No presenta la ecuación de la circunferencia, como sí lo hace E2, pero brinda las coordenadas del centro e indica cómo hallar la medida del radio. Estas coordenadas pareciera que las determina a partir de lo proporcionado por el software. De todos modos, la estrategia para buscar el radio es más bien sintética. Da una idea conceptual del asunto sin tanto detenimiento procedimental; salvo en el caso de las mediatrices, que necesitó trazar para plasmar gráficamente la circunferencia buscada.

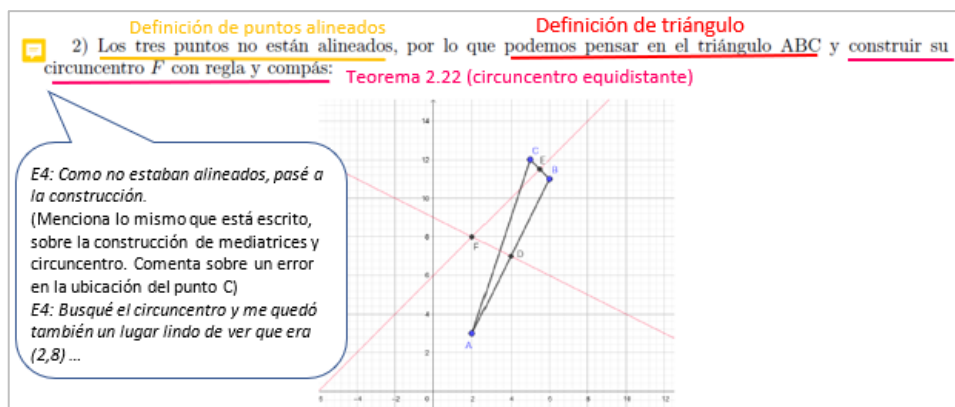


Figura 8 - Segunda parte de la entrega de E4

Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

A partir de lo que se advierte en la Figura 9, E4 continúa con su estrategia para hallar el radio y representa la distancia desde el punto de vista analítico con el planteo de la ecuación de la circunferencia. Es decir, comienza de forma similar a Res2 y finaliza con una respuesta, como en Res1 o Res3. Aun así, lo propuesto por E4 no es como la Res3 (sintético-analítica), porque la resolución en sí está planteada desde el enfoque sintético y solo la respuesta se brinda en modo analítico, con mediación del *software*.

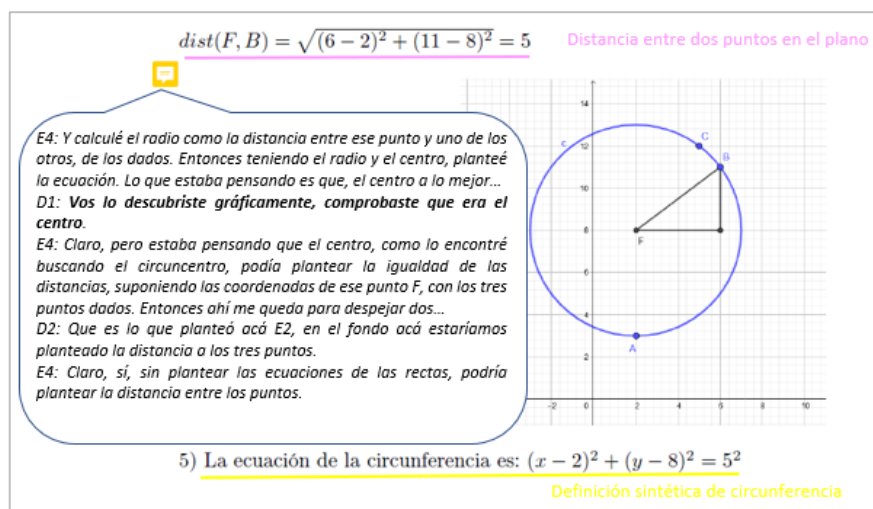


Figura 9 - Tercera parte de la entrega de E4
Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

En la puesta en común que se procura condensar en la Figura 9, D1 resalta que en realidad encontró el centro gráficamente y que lo algebraico la ayudó a comprobar que efectivamente lo era. Esto muestra el complemento entre los enfoques sintético y analítico, donde se establece una conexión entre ellos, lo cual permite comprenderlos mejor (Iparraguirre; Guerra, 2014). En efecto, E4 piensa otra manera de resolverlo, como igualdad de distancias entre puntos, D2 la compara con la resolución de E2 e interpreta el sistema de ecuaciones de su entrega desde esta idea geométrica. Es decir, se mira lo analítico desde lo sintético.

Por último, de acuerdo a lo que se ilustra en la Figura 10, E5 plantea al inicio que los puntos no están alineados, pero no explica cómo obtiene esto. Resuelve el problema desde el enfoque sintético (Res2): traza las mediatrices del triángulo construido y explicita los resultados utilizados. Además, después de escuchar las resoluciones de sus compañeras, concluye que si no hay ecuación no hay circunferencia. Precisamente, en la puesta en común, manifiesta que “no llegó a una circunferencia”; es decir, asocia el objeto geométrico únicamente con su ecuación, más allá de haber resuelto el problema desde la geometría sintética. Esto demuestra una escasa comprensión de la complementariedad de los enfoques, acorde a Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016).

E5: Yo lo hice igual que E3 y E1, no llegué a una circunferencia. Solo tracé la que pasa por los puntos... igual que E3 y E1.

Resolución: Sean A , B y C los puntos dados en el enunciado de la actividad.

Definición de puntos alineados Definición de triángulo
 Como A , B y C son puntos no alineados, podemos trazar el triángulo $\triangle ABC$.

Definición de mediatrices del triángulo
 Luego, trazamos las mediatrices de dicho triángulo, las cuales se intersecan en un único punto (probado en la práctica). Lo llamamos P .

Construcción C1 Corolario 3.8 (intersección de mediatrices)
 Ahora, trazamos la circunferencia de radio P que pasa por el punto A . La llamamos C .

Así, por construcción, $A \in C$. Además, sabemos que P equidista de todos los vértices por teorema 2.22 (a). Esto quiere decir que $PA \equiv PB$, $PB \equiv PC$ y $PA \equiv PC$.

Teorema 2.22 (circuncentro equidistante)
 Luego, por definición de circunferencia, $B \in C$ y $C \in C$.

Definición sintética de circunferencia

Figura 10 - Entrega de E5

Fuente: elaboración propia, con base en producción estudiantil (2021)

5 Discusión de resultados

En las resoluciones compartidas (Figuras 2 a 10) es posible detectar la activación de los distintos dominios del conocimiento de la disciplina. El CCK es el que sobresale, dado que todas las estudiantes realizan un *tratamiento conceptual del contenido*, por ejemplo, al utilizar definiciones, axiomas, propiedades, entre otros. Sin embargo, no todas lo hacen de la misma manera. Como se puede observar, la resolución de E2 es la única totalmente analítica y similar a Res1. En los casos de E1, E3 y E5 podría interpretarse que utilizaron este modelo solo para corroborar que los puntos no están alineados. Es así que, fuera de la prueba de no linealidad, E1, E3 y E5 resolvieron el problema de forma sintética. Las tres presentaciones utilizaron la definición de mediatrices de un triángulo, un corolario referido a la intersección de estas mediatrices y, por último, la definición sintética de circunferencia. Sin embargo, hay ligeras diferencias en la justificación relativa en cuanto a que el punto hallado es el centro de la circunferencia. Para ello, E1 utiliza un teorema sobre propiedades de los puntos de la mediatriz (Figura 3), mientras que E3 y E5 aplican un teorema sobre el circuncentro (Figuras 6 y 10) y E3 también se basa en la definición de punto medio de un segmento, lo cual se considera que no es necesario. Además, todas las estudiantes, mientras resuelven, realizan una *explicación de los procedimientos y estrategias* (*primero tengo que ver..., observemos ahora... etc.*).

En las resoluciones se observa el uso de notación geométrica, lo cual activa la modalidad de *lenguaje matemático*. En cuanto a esta última, también realizan cierta vinculación entre los conceptos y su representación gráfica, como E3 en la Figura 6 al proponer la ubicación de los puntos en el sistema de coordenadas para pensar el resto de la resolución, o E4 en la Figura 7

al plantear su estrategia completamente desde lo gráfico.

Por otra parte, la mayoría de las propiedades y definiciones mencionadas por las estudiantes en sus entregas, son utilizadas de forma implícita. Este podría ser un punto a revisar, dado que el hecho de explicitar lo utilizado en cada paso fortalece los conocimientos de las estudiantes, específicamente en vinculación con el SCK (*justificación de afirmaciones y procedimientos*). Algunos estudios previos como el de Guirette y Zubieta (2010) y Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) detectan, en diferentes contextos y tareas presentadas a futuros profesores o profesores en ejercicio, estas debilidades al momento de argumentar y explicar a otros, más allá de plantear una resolución correcta. En particular, Gonzato, Godino y Neto (2011) indican que este conocimiento puede ser útil al momento de reconocer y corregir los errores de los estudiantes y de proponer variantes en las tareas.

E4 se trata de un caso particular porque utiliza el sistema de coordenadas para verificar la no linealidad como E1, E3 y E5, pero también para hallar la coordenada del punto obtenido de forma sintética. En la puesta en común, descubre otras maneras de resolver el problema desde el modelo analítico, y compara diferencias y similitudes con las otras entregas, en parte promovido por los docentes. Esto moviliza, en cierto sentido, el dominio SCK (*justificación de procedimientos*), al reflexionar sobre el contenido y evaluar distintas maneras de abordarlo, ya sea por parte de los docentes o de los propios estudiantes. En efecto, se evidencia un ida y vuelta entre sintético y analítico en distintos momentos de su resolución (Figuras 7 a 9), que denota una completitud en la comprensión de la estudiante hacia la configuración de su MKT.

En cuanto a la activación del SCK, también se produce un momento de análisis e interpretación de enunciados, con distintas alternativas, y cómo eso puede influir en el modo de resolverlos, con referencia a las modalidades *representaciones* y *lenguaje matemático*, como se observa en el diálogo que sigue.

A41-E4: Claro, porque era encontrar la ecuación de la circunferencia. Si fuera construirla nomás, era otra cosa.

A42-D2: Ah, buena observación. Si ponemos la palabra “hallar la circunferencia” sin decir qué, podría ser más amplia la respuesta, tenés razón. Igual ya que los puntos estén dados en el modelo del par de números reales a mí ya eso me da la idea de que tengo que trabajar ahí. Esperá, ¿cómo decía? Porque acá copiaron dos enunciados distintos (mientras mira las entregas de E1 y E2).

A43-D1: Claro, el enunciado era “Hallar una circunferencia que pasa por...”.

A44-D2: Ah, entonces no estaba. La palabra “ecuación” la puso E2 y la leyó E4. No estaba.

[...]

A47-E2: Claro, yo por ver los puntos así con coordenadas (Diálogo entre docentes y estudiantes, 2021).

Esta última discusión tiene lugar en la puesta en común con D1 y D2, cuando las estudiantes presentan sus resoluciones. Por ejemplo, E1 asegura haber hallado el centro y radio

de la circunferencia, pero D1 y D2 insisten que no (Figura 3); con las presentaciones de E2 y E3, D1 aclara la necesidad de darle coordenadas al centro y el valor del radio para que la circunferencia quede unívocamente identificada (Figura 5); E5, luego de escuchar estas devoluciones, concluye que si no hay ecuación no hay circunferencia (Figura 10). Todo esto puede estar asociado con realizar un *tratamiento conceptual del contenido* (CCK) sin considerar las *distintas representaciones* (SCK). Se transmite la idea de que con el enfoque sintético no se encuentra explícitamente el centro de la circunferencia, sino que solo se prueba que existe y se detalla cómo hallarlo (A32-D2; A40-D1):

A32-D2: *Quedarnos con solo lo sintético, me asegura la existencia de este punto O, me asegura la existencia de la circunferencia, pero no es que puedo decir “es esa, acá está”. Cómo lo describís a ese conjunto, existe, es un conjunto de puntos, todo bien, pero el modelo analítico es más... a mí me parece que es más contundente, ¿no?*

[...]

A39-E4: *Lo que no sé si entendí bien los enfoques sintético y analítico. Pero HAY que ir al analítico en algún momento para llegar específicamente al centro y al radio, ¿no?*

A40-D1: *Eh, sí, por lo menos sí... por lo que veo, en este caso, siempre necesitás ir a usar algo analítico para llegar estrictamente* (Diálogo entre docentes y estudiantes, 2021).

Pareciera, así, que los docentes y estudiantes consideran que el enfoque analítico le da completitud a la resolución que, en caso de no contemplarlo, resultaría insuficiente. Es decir, en términos de *contundencia*, como se remarca en A32-D2, desde el enfoque sintético la resolución quedaría incompleta. Sin embargo, esto no siempre es así. Por ejemplo, Álvarez (2014) plantea el problema de determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada y que contienen a un punto O, y lo resuelve de manera completa centrándose en el enfoque sintético, sin necesidad de utilizar el analítico. Previamente, realiza la resolución analítica, pero a partir de un enunciado que pide hacerlo de esta manera. Esta vacancia detectada en la activación del SCK es un espacio fértil para realizar *vinculaciones entre la geometría sintética y la analítica*, y aportar al HCK, dado que implica un constatare ida y vuelta entre la representación de los conceptos desde cada uno de los enfoques.

En la resolución de E4, se advierte que utilizar GeoGebra la habilita a abordar el problema desde los dos enfoques. Se basa en ambos enfoques de forma alternada durante la resolución, donde va interpretando uno a partir del otro. D1 sostiene que halló la solución gráficamente y lo algebraico colaboró en su comprobación (Figura 9). Se observa, entonces, que el uso del software puede ser una buena herramienta y oportunidad para realizar la *vinculación entre la geometría sintética y analítica* (HCK).

En cuanto a las diferentes resoluciones y enfoques, también se discuten los *beneficios* de uno u otro. En más de una oportunidad, los docentes resaltan la rapidez de la construcción como una de las ventajas del enfoque analítico. E2 traduce este beneficio en *corto* (A6-E2),

donde pareciera que lo hace en el sentido de *contundente* o *fuerte*, dando indicios de debilidad en el otro enfoque, tal como se observa en el siguiente extracto correspondiente a la discusión posterior a la puesta en común.

AF5-1-E2: Yo lo hice distinto, después se me ocurrió algo así como dijo recién E1, pero pensé que iba a ser más largo (refiriéndose a lo sintético).

[...]

A5-D2: Pero... ¿vos decís que buscando la ecuación de las mediatrices podríamos...? ¿Qué beneficio tendríamos a tu versión?

A6-E2: Ah, no, no sé. Decía otra forma, nada más. No sé si es más rápido o no. Capaz que es más largo.

A7-D1: Sí, sí, claro, en este caso particular creo que... No sé, parece que esta forma es la más rápida (se refiere a la de E2). No sé qué les parece (Diálogo entre docentes y estudiantes, 2021).

Al respecto, Ancochea (2011) también menciona que la herramienta algebraica permite muchas veces resolver problemas geométricos de una forma más sencilla. Es decir, las técnicas sintéticas podrían resultar útiles para diseñar la estrategia de resolución, como lo realizaron E1 y E4, pero algunas relaciones se describirían más eficazmente con técnicas analíticas (Gascón, 2003), como consideran alumnas y docentes en cuanto a la entrega de E2 (A7-D1).

Al comparar los enfoques, se observa que los docentes adhieren a la idea de que el enfoque analítico es más contundente, exacto y estricto (A8-D2; A33-D1; A40-D1):

A8-D2: Claro, al desarrollo, esta es más corta o más contundente, no sé cómo decirlo. Totalmente algebraicamente. Así que totalmente analítica.

[...]

A33-D1: Sí... no sé qué les parece a ustedes. ¿Qué dicen? Porque claro, el analítico parece que nos da exactamente el punto.

[...]

A40-D1: Eh, sí, por lo menos sí... por lo que veo, en este caso, siempre necesitás ir a usar algo analítico para llegar estrictamente (Diálogo entre docentes y estudiantes, 2021).

Todas estas discusiones producidas entre docentes y estudiantes sobre las ventajas, la contundencia, la exactitud y la debilidad de los enfoques, es otro modo de activar el HCK al realizar *vinculaciones entre las geometrías sintética y analítica*. Comparar o confrontar ambos enfoques contribuye a su complementariedad (Gascón, 2002, 2003) al mostrar algunas técnicas como más convenientes que otras (Álvarez, 2014).

6 Conclusiones

En relación al objetivo y a la pregunta de investigación planteados en este estudio, se observa que, en la implementación de la propuesta a la cátedra, se han activado los tres dominios del conocimiento de la disciplina, en el marco del MKT. Por ejemplo, en la activación del CCK, las estudiantes evidencian su conocimiento referido a conceptos y procedimientos propios de

cada geometría, como así también a su notación.

Con el SCK, se detecta la complementariedad de los enfoques al relacionar diferentes representaciones de un mismo concepto. Por ejemplo, E4 en la Figura 9, encuentra el centro de la circunferencia de forma sintética y luego comprueba esto desde lo algebraico (analítico). Sin embargo, en otro caso, E5 (Figura 10) demuestra una escasa comprensión de esta complementariedad al asociar la circunferencia a una única representación (ecuación). Trabajar en la activación de esta modalidad del SCK podría constituir un espacio fértil para aportar a la vinculación entre los enfoques.

Por otra parte, si bien durante las resoluciones las estudiantes posiblemente no hayan sido conscientes del enfoque geométrico utilizado, la puesta en común con los docentes y sus compañeras les permitió reflexionar sobre los distintos puntos de vista desde los que se abordó el problema y las diferencias entre ellos, acorde a las recomendaciones que brindan Guirette y Zubieta (2010), así como Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010). Es decir, la activación del HCK mediante las vinculaciones entre las geometrías sintética y analítica permite confrontar los enfoques, buscar ventajas y desventajas de cada uno, y caracterizarlos, lo cual colabora en el estudio de la complementariedad de los mismos.

Si bien se ha logrado detectar modalidades más *potentes* dentro de cada dominio, en el sentido que al ser activadas promovieron el análisis de la complementariedad de las geometrías sintética y analítica, aún resta estudiar qué aspectos podrían motivar la continuidad de las mismas. Resulta entonces la pregunta de si esta tarea propicia dicho trabajo, y en tal caso y de manera similar a como surge con el análisis de E2 (Figura 4), qué tipos de problemas o situaciones se pueden estudiar de manera más simple con herramientas analíticas o sintéticas que promuevan la necesidad del paso de unas a otras.

Así mismo, fue posible reconocer algunas situaciones que podrían constituir una oportunidad para profundizar en la formación de los diferentes dominios del MKT de las futuras profesoras, como ser la síntesis que realiza D1 de lo propuesto y la comparación de las resoluciones, siendo interesante que lo realicen las estudiantes, a partir de preguntas disparadoras que podrían ofrecer los docentes. Estos comentarios, preguntas y respuestas que se realizan dentro de la clase, constituyen un momento fértil para la configuración del conocimiento de la disciplina del futuro docente, para sí mismo y para enseñarlo a otros.

Este tipo de análisis, realizado en la clase de Geometrías del Plano y profundizado en esta investigación, consiste en una posibilidad para llevar a cabo en las asignaturas disciplinares del PUM, no solamente en espacios curriculares referidos a la práctica docente o a la didáctica específica. En efecto, mediante este “desmenuzamiento” de las resoluciones y los enunciados,

puestas en diálogo con los dominios de Ball, Thames y Phelps (2008), se propende a robustecer el MKT de los futuros profesores en Matemática, así como también a hacer frente a la habitual escasa formación en geometría mencionada por varios autores (Santos; Teles, 2021; Crescenti, 2009; Zakaryan; Sosa, 2021). Así mismo, se contribuye a suplir la vacancia de estudios referidos al conocimiento de la disciplina de los profesores, tal como mencionan Gonzato, Godino y Neto (2011).

Se concluye que la actividad propuesta a la asignatura Geometrías del Plano, como así también su implementación con la respectiva puesta en común y discusión entre docentes y estudiantes, posibilitó una aproximación hacia conocer el modo en que se trabaja la complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica del plano en el PUM de la UNR. Ello promueve y sustenta reflexiones en clave del MKT que ayudan a sustentar innovaciones desde la investigación educativa para fortalecer la formación docente en Matemática.

Contribuciones de autoría

Todos los autores contribuyeron sustancialmente a la concepción y planificación del estudio; en la obtención, análisis e interpretación de datos; en redacción y revisión crítica; y aprobó la versión final para ser publicada.

Disponibilidad de datos

Los datos generados o analizados durante este estudio se incluyen en este artículo publicado.

Referencias

ARGENTINA. Consejo Interuniversitario Nacional. **Estándares para la Acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática**. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, 2013.

ARGENTINA. Consejo Superior. **Plan de Estudios del Profesorado en Matemática**. Rosario: Universidad Nacional de Rosario, 2018.

ÁLVAREZ, M. **Relación entre geometría sintética y analítica y TIC's: análisis matemáticos-didáctico de una actividad**. Memoria (Especialización en Didáctica de las Ciencias) - Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2014. Disponible en: <http://repositorio.ungs.edu.ar/handle/UNGS/175>. Acceso en: 1 oct. 2023.

ANCOCHEA, B. Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en la secundaria. En: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; OLARRÍA, A. R.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (eds.). **Un panorama de la TAD: Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica, 2011. p. 533-551.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Los Ángeles, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dic. 2008. DOI: 10.1177/0022487108324554. Disponible en: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0022487108324554>. Acceso en: 10 mar. 2009.

BARRANTES, M.; LÓPEZ, M.; FERNÁNDEZ, M.A. Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. **PNA**, Granada, v. 9, n. 2, p. 107-127, ene. 2015. DOI: 10.30827/pna.v9i2.6105. Disponible en: <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6105>. Acceso en: 13 jul. 2015.

BONILLA, D.; PARRAGUEZ, M. La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En: FLORES, R. (ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2013. p. 617-624 (Vol. 26). Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/4094/>. Acceso en: 8 oct. 2023.

CICCIOLI, V.; SGRECCIA, N. Conocimiento matemático para la enseñanza de geometría analítica en futuros profesores. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, Tandil, v. 15, n. 1, p. 1-20, jul. 2020. DOI: 10.54343/reiec.v15i1.265. Disponible en: <https://reiec.unicen.edu.ar/reiec/article/view/265>. Acceso en: 3 sep. 2020.

CERIZOLA, N.; MARTÍNEZ, R.; MINÍ, M. Desarrollo del pensamiento geométrico en el futuro profesor de matemática. **Revista de Educación Matemática**, Córdoba, v. 21, n. 1, p. 3-22, ago. 2006. DOI: 10.33044/revem.10490. Disponible en: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10490>. Acceso en: 6 oct. 2023.

CLIMENT, N.; CARILLO, J. Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria. **MA**, Bogotá, v. 7, n. 2, p. 171-205, jul. 2002. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/1534/>. Acceso en: 21 feb. 2024.

CRESCENTI, E. P. A formação do professor de matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, jan. 2009. DOI: 10.5212/PraxEduc.v.3i1081094. Disponible en: <https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/345>. Acceso en: 12 abr. 2012.

DI BLASI REGNER, M. A. **Articulación entre los enfoques sintético y analítico en cónicas a nivel superior en entornos de geometría dinámica**. Tesis (Doctorado en Enseñanza de las Ciencias) - Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, 2019. Disponible en: https://repositoriosdigitales.mincyt.gob.ar/vufind/Record/RIDUNICEN_93d3f885abdb95c674656ace1b7a474b. Acceso en: 30 sep. 2023.

ECHEVERRÍA, J. A. A. **Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria**. Tesis (Magíster en Enseñanza de las Matemáticas) - Pontificia Universidad Católica del Perú, San Miguel, 2014. Disponible en: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/6756>. Acceso en: 7 oct. 2023.

FERNÁNDEZ, G.; GYSIN, L. Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática. **Revista de Educación Matemática**, Córdoba, [s.v.], n. especial, p. 1-10, dic. 2010. DOI: 10.33044/revem.10232. Disponible en: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10232>. Acceso en: 5 oct. 2023.

FERRARIS, C.; MONTORO, V. Una propuesta centrada en lo procedimental para el tratamiento de la geometría euclídea en la formación de profesores. **Revista de Educación Matemática**, Córdoba, v. 19, n. 1, p. 20-32, abr. 2004. DOI: 10.33044/revem.10833. Disponible en: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10833>. Acceso en: 9 oct. 2023.

GASCÓN, J. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **Suma**, Barcelona, v. 39, [s.n.], p. 13-25, feb. 2002. Disponible en: <https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-39.html>. Acceso en: 8 oct. 2023.

GASCÓN, J. Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. **Suma**, Barcelona, v. 44, [s.n.], p. 25-34, feb. 2003. Disponible en: <https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-44.html>. Acceso en: 8 oct. 2023.

GATICA, S.; ARES, O. La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. **Edmetec**, Córdoba, v. 1, n. 2, jul. 2012. DOI: 10.21071/edmetec.v1i2.2853. Disponible en: <https://journals.uco.es/edmetec/article/view/2853>. Acceso en: 10 nov. 2020.

GONZATO, M.; GODINO, J. D.; NETO, T. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 23, n. 3, p. 5-37, dic. 2011. DOI: 10.24844/EM2303.01. Disponible en: <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/vol23-3/>. Acceso en: 9 oct. 2023.

GUIRETTE, R.; ZUBIETA, G. Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemática. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 22, n. 2, p. 93-121, ago. 2010. Disponible en: <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/vol22-2/>. Acceso en: 5 oct. 2023.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; MONTOYA-DELGADILLO, E. El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el Liceo. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 45-66, abr. 2016. DOI: 10.1590/1980-4415v30n54a03. Disponible en: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/LTZP87bpNSnJyhGg4yrhyVS/?lang=es>. Acceso en: 2 feb. 2018.

IPARRAGUIRRE, C. G.; GUERRA, F. G. Conexiones entre la geometría sintética y la geometría analítica: un estudio en el contexto de la Educación Básica en el Perú. En: JURADO, U. M. (ed.). **Reflexiones y propuestas en Educación Matemática**. San Martín de Porres: Moshera, 2014. p. 55-70.

HITT, F. Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 10, n. 2, p. 213-223, dic. 2003. Disponible en: <https://www.emis.de/journals/BAMV/vol10.html>. Acceso en: 9 oct. 2023.

JONES, K. Critical issues in the design of the geometry curriculum. En: BARTON, B. (ed.), **Readings Mathematics Education**. Auckland: University of Auckland, 2000. p. 75-90.

MARRADI, A.; ARCHENTI, N.; PIOVANI, J. I. **Metodología de las ciencias sociales**. Buenos Aires: Emecé Editores, 2007.

MÉNDEZ, N. Propuesta de capacitación para la enseñanza de la geometría. **Revista de Educación Matemática**, Córdoba, [s.v.], n. especial, p. 1-10, dic. 2010. DOI: 10.33044/revem.10226. Disponible en: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10226>. Acceso en: 4 oct. 2023.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, Nueva York, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, jun. 2006. DOI: 10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x. Disponible en: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>. Acceso en: 17 oct. 2016.

MORALES, M. C. Apropiação cultural: uma perspectiva para analisar la incorporación de tic en la práctica docente. **Sinergias educativas**, Madrid, v. 5, n. 4, p. 71-84, oct./dic. 2020. DOI: 10.37954/se.v5i4.155. Disponible en: <https://sinergiaseducativas.mx/index.php/revista/article/view/155>. Acceso en: 3 may. 2022.

RIBEIRO, C. M.; MONTEIRO, R.; CARRILLO, J. ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 22, n. 2, p. 123-138, ago. 2010. Disponible en: <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/vol22-2/>; acceso el 5 oct. 2023, a las 20h01.

SAMPIERI, R.; COLLADO, C.; LUCIO, P. **Metodología de la investigación**. Ciudad de México: Mc Graw Hill, 2014.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. de M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: uma visão do estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 79-111, abr. 2021. DOI: 10.23925/1983-3156.2021v23i1p79-111. Disponible en: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/47093>. Acceso en: 2 jun. 2023.

SCHAEFER, L.; SGRECCIA, N. Enseñanza de la geometría sintética a futuros profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario. **REDIMAT**, Barcelona, v. 7, n. 2, p. 134-161, jun. 2018. DOI: 10.17583/redimat.2018.2559. Disponible en: <https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2559>. Acceso en: 6 jul. 2018.

SHULMAN, L. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, Massachusetts, v. 57, n. 1, p. 1-22, feb. 1987. DOI: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411. Disponible en: <https://meridian.allenpress.com/her/article-abstract/57/1/1/31319/Knowledge-and-Teaching-Foundations-of-the-New?redirectedFrom=fulltext>. Acceso en: 21 feb. 2009.

STAKE, R. **Investigación con estudios de caso**. 2 ed. Madrid: Morata, 1999.

TERIGI, F. **Curriculum**: Itinerarios para aprehender un territorio. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana, 1999.

ZAKARYAN, D.; SOSA, L. Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 33, n. 1, p. 71-97, abr. 2021. DOI: 10.24844/EM3301.03. Disponible en: <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2022/11/24/vol33-1-3/>. Acceso en: 22 ago. 2022.

Submetido em: 12 de Outubro de 2023.
Aprovado em: 09 de Dezembro de 2024.

Editor-chefe responsável: Prof. Dr. Roger Miarka
Editor associado responsável: Prof. Dr. Vicenç Font