
ARTÍCULO

Cuando tengo que enseñar lo que aprendí: el caso del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales

When I have to teach what I have learned: the case of the concept of solution of a system of linear equations

Cristina Ochoviet*

 ORCID iD 0000-0001-9069-3469

Sebastián Parodi**

 ORCID iD 0000-0002-9663-3990

Resumen

En este trabajo se presenta el caso de una estudiante de profesorado de matemática que revela, a través de la escritura de una clase imaginaria en forma de guion, la comprensión que posee sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Se analiza la clase desde la óptica de los modos de pensamiento en álgebra lineal de Anna Sierpinska, y se aporta evidencia de las dificultades de la futura profesora en torno al conocimiento matemático que procura enseñar. Se reflexiona sobre el impacto que podría tener, en la enseñanza de la matemática, un profesor que no comprende cabalmente el tema que está enseñando, y se pone en diálogo esta reflexión con resultados de investigación que, todavía, no han sido tenidos en cuenta en la educación matemática en el nivel secundario.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones lineales. Conocimiento matemático para la enseñanza. Modos de pensamiento. Narrativa.

Abstract

This work presents the case of a mathematics student teacher who reveals, through the writing of an imaginary lesson in script form, her understanding of the concept of solution of a system of linear equations. The lesson is analyzed from the perspective of Anna Sierpinska's modes of thinking in linear algebra, and provides evidence of the difficulties of the prospective teacher regarding the mathematical knowledge that she seeks to teach. We reflect on the impact that a teacher who does not fully understand the topic being taught could have on mathematics teaching and this reflection is put into dialogue with research results that have not yet been taken into account in mathematics education in the secondary level.

Keywords: System of linear equations. Mathematical Knowledge for Teaching. Modes of thinking. Narrative.

* Doctora en Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN). Profesora de Didáctica de la Matemática del Consejo de Formación en Educación (CFE), Montevideo, Montevideo, Uruguay. E-mail: cristinaochoviet@gmail.com.

** Doctor en Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN). Docente encargado en la Universidad Tecnológica del Uruguay (UTEC), Montevideo, Montevideo, Uruguay. E-mail: sebastian.parodi@utec.edu.uy.

1 Introducción

Cuando un profesor enseña matemática moviliza distintos conocimientos y creencias cuya naturaleza ha sido extensamente investigada y continúa, hoy, siendo materia de estudio del campo de la Matemática Educativa (Ball; Thames; Phelps, 2008; Carrillo *et al.*, 2013; Rowland; Huckstep; Thwaites, 2005; Shulman, 1986). En este trabajo se hace foco en el conocimiento matemático que moviliza una estudiante de profesorado de matemática (EP), al elaborar una propuesta de enseñanza del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Los estudiantes de profesorado ingresan a la formación docente con un bagaje conceptual adquirido a través de su trayectoria educativa previa que abarca los estudios primarios y secundarios y no requiere, en Uruguay, de formación universitaria previa en matemática. Es en la propia formación docente que los futuros profesores profundizan en contenidos matemáticos avanzados, en la didáctica de la matemática y la práctica docente, así como en contenidos de las ciencias de la educación. Estos pilares formativos, que se desarrollan de manera paralela a lo largo de cuatro años, contribuyen al desarrollo de las competencias profesionales que serán requeridas para la enseñanza de los contenidos curriculares en el nivel medio.

El problema que ha sido identificado por la investigación es que el conocimiento matemático que el docente logra elaborar en la formación docente no siempre está alineado con el conocimiento matemático formal; sin embargo, es movilizado en los procesos de enseñanza. Ha sido documentado que las concepciones de los futuros profesores influyen determinantemente en su práctica docente (Chhabra; Baveja, 2012; Ryan; Williams, 2007). Esto implica que lo que se enseña en las aulas no corresponde, necesariamente, al conocimiento disciplinar canónico, sino a la síntesis personal que cada docente ha elaborado. Esta realidad justifica la pertinencia de estudiar la manera en la que los docentes en formación comprenden los objetos matemáticos y sus relaciones durante la formación inicial docente con el fin de atender sus necesidades y poder actuar de manera eficaz para incidir en la enseñanza.

En particular, en este trabajo nos enfocamos en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (cuadrados o no cuadrados) en la enseñanza media básica (14-15 años) y nos proponemos explorar los modos de pensamiento en álgebra lineal (Sierpinska, 2000) que una EP de segundo año moviliza al elaborar una narrativa sobre la

enseñanza de este tema.

2 Problemática

Las dificultades para comprender el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales y de un sistema de ecuaciones lineales han sido reportadas en todos los niveles educativos, desde la educación media básica a la universidad (Campos; Parraguez, 2019; Oktaç, 2018; Rodríguez *et al.*, 2022; entre otros). Uno de los hallazgos centrales es la concepción errónea que asocia la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con puntos de intersección que no pertenecen a todas las rectas del sistema o a puntos de intersección de las rectas del sistema con los ejes coordenados, en lugar de reconocerla como la intersección común a todas las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema.

Este fenómeno se observa en trabajos como el de Campos y Parraguez (2019), Eslava y Villegas (1998) y Alcocer (2007), donde los estudiantes, del nivel medio, medio superior y superior, respectivamente, interpretaban que un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas tenía tres soluciones si las rectas se intersecaban dos a dos formando un triángulo. Adicionalmente, Alcocer (2007) identificó que los estudiantes relacionaban el número de soluciones con el número de incógnitas, evidenciando una comprensión limitada del concepto. Otra dificultad recurrente es la incapacidad de concebir la ecuación lineal con dos variables como un objeto matemático que define un conjunto infinito de soluciones.

Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) mostraron que los estudiantes, al enfrentarse a una sola ecuación lineal con dos variables, no lograban interpretar las letras como variables en relación de dependencia, sino que las veían únicamente como incógnitas por determinar con la ayuda de otra ecuación. Solo uno de los participantes en su estudio logró aproximarse a esta idea mediante la noción de función lineal, mientras que el resto se limitó a generar soluciones únicas en el contexto de los sistemas de ecuaciones en los que se mantenía fija una ecuación.

La transición entre las representaciones analíticas y geométricas también emerge como un obstáculo significativo (Eslava; Villegas, 1998, Cutz; 2005). Cutz (2005), en particular, destacó que los estudiantes de ingeniería participantes de su investigación tenían dificultades para relacionar la solución algebraica con su interpretación geométrica, especialmente en sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. Esta desconexión se agudiza en casos de sistemas no cuadrados sin solución, donde los estudiantes, tanto del nivel medio como futuros profesores, suelen reducir las configuraciones posibles a escenarios como el de rectas paralelas únicamente (Ochoviet, 2009; Magallanes, 2019).

En esta línea, Ponciano, Segura y Ávila (2020) analizaron las dificultades de estudiantes de licenciatura en matemática sobre el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. Los investigadores concluyeron que los tres participantes presentaron dificultades para coordinar la representación algebraica de un sistema con la representación gráfica para interpretar geométricamente el conjunto solución. También evidenciaron dificultades para identificar si una ecuación dada corresponde a una recta o a un plano; esto es, no visualizan el conjunto solución de las ecuaciones dadas. Una situación similar fue identificada por Rodríguez *et al.* (2022) en una investigación desarrollada con estudiantes de Pedagogía en Matemática y estudiantes universitarios de Ingeniería. Los investigadores detectaron desarticulación entre los tres modos de pensamiento, en particular, cuando se abordan sistemas paramétricos. De los trabajos revisados se desprende que las dificultades para comprender la noción de sistema de ecuaciones lineales, solución y conjunto solución atraviesan la enseñanza media y superior, incluso en estudiantes de profesorado y de licenciatura en matemática e ingeniería que han estudiado, en particular, cursos de álgebra lineal de nivel universitario.

Frente a esta problemática, los autores consultados recomiendan la implementación de estrategias didácticas centradas en la diversificación de ejemplos y el fortalecimiento de la conexión entre representaciones. Campos y Parraguez (2019) recomiendan proponer tareas que articulen al menos dos modos de pensamiento pues situarse en un solo modo conduce a los estudiantes a cometer errores. Oktaç (2018) sugiere incorporar sistemas no convencionales, como por ejemplo los 3×2 , para ampliar la noción de solución más allá del caso 2×2 .

Asimismo, Cutz (2005) y Alcocer (2007) enfatizan la necesidad de proponer actividades que promuevan el tránsito entre lo analítico y lo geométrico, mientras que Alcocer (2007), en particular, advierte que la mera exposición a ejemplos aislados no es suficiente para corregir concepciones erróneas. Si bien se han realizado múltiples recomendaciones didácticas para atender en la enseñanza las dificultades identificadas (Ochoviet, 2009; Oktaç, 2018), parecería que aún no han sido debidamente atendidas desde el discurso matemático escolar imperante. Esto subraya la importancia de prestar atención a la enseñanza que implementan los EPs en sus primeras intervenciones de aula, dado que las dificultades de comprensión en torno a los objetos matemáticos podrían ser traspuestas a sus propuestas didácticas.

Este trabajo se propone como objetivo, pues, dar cuenta de la comprensión del conocimiento matemático de una EP, a través de una narrativa redactada por la estudiante. En otras palabras, se desea aportar evidencia de cómo una problemática que ha sido extensamente investigada, pero poco atendida a nivel de cambios efectivos en el discurso matemático escolar,

se revela en el momento en que una futura profesora debe pensar la enseñanza; esto podría comprometer seriamente el aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media. Las preguntas de investigación que se buscan responder son las siguientes: (1) ¿qué modos de pensamiento se ponen en juego en una clase imaginaria redactada por una EP de matemática cursando su primera práctica docente? y (2) ¿qué dificultades sobre la comprensión del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales no cuadrado quedan en evidencia?

La novedad de este trabajo radica en el tipo de material que se analiza para obtener información. Todos los estudios que se han reportado realizaron la indagación en función de la aplicación de cuestionarios o entrevistas en las que se propuso a los participantes la resolución de tareas matemáticas. En este trabajo, el material que se analiza es una narrativa de un escenario de enseñanza. Esta narrativa consistió en la escritura de una clase imaginaria (CI) (Chapman, 2008) con el formato de un guion (Zazkis; Marmur, 2018) en la que se abordaron aspectos relativos a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación media básica (14-15 años). Esto significa que el conocimiento matemático de la participante no es movilizado con el objetivo de resolver tareas matemáticas sino de enseñar matemática a través de la resolución de tareas. Esto plantea un contexto en el que puede explorarse si las dificultades antes reseñadas aparecen en acción ante la intencionalidad de enseñar.

3 Aspectos conceptuales: modos de pensamiento en álgebra lineal

Sierpinska (2000, p. 2) identifica tres modos de pensamiento en álgebra lineal que se corresponden con tres lenguajes que operan de manera interactiva: “el lenguaje 'visual geométrico', el lenguaje 'aritmético' de los vectores y las matrices como listas y tablas de números, y el lenguaje 'estructural' de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales”. La autora distingue, entonces, tres modos de pensamiento que denomina, respectivamente, sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Estos lenguajes fueron identificados por Sierpinska a través de un análisis de la historia de la matemática y de un estudio de los diferentes lenguajes que se utilizan en los desarrollos teóricos del campo del álgebra lineal. Si bien estos tres modos de pensamiento aparecieron de manera secuencial en la historia de la matemática, ninguno de ellos desplazó por completo a los otros, sino que se mantuvo la coexistencia de los tres. Sierpinska considera que estos tres modos de pensamiento “son igualmente útiles, cada uno en su contexto y con fines específicos, y especialmente cuando están en interacción” (2000, p. 27).

Según la autora, la distinción entre el modo sintético (SG) y los modos analíticos (AA

y AE) radica en que en el modo sintético los objetos son directamente presentados a la mente y esta trata de describirlos a partir de sus representaciones, mientras que en los modos analíticos los objetos matemáticos son dados de manera indirecta y son contruidos por medio de sus definiciones o propiedades. Sierpinska (2000, p. 28) lo ejemplifica de la siguiente manera:

Si alguien está pensando en las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas visualizando las posibles posiciones relativas de tres planos en el espacio, entonces está en el modo sintético-geométrico. Si uno piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz 3×4 , se encuentra en el modo analítico-aritmético. Pensar en términos de matrices singulares o no singulares sería un indicio de estar en el modo analítico-estructural.

En este trabajo nos enfocamos en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (cuadrados o no cuadrados) en el nivel medio básico (14-15 años). Los modos de pensamiento que podría promover la EP a través de las preguntas que realiza, de las explicaciones que desarrolla o de las tareas que propone en la CI deberían adecuarse a los conocimientos y competencias del alumnado en ese nivel. Por ejemplo, la EP podría promover los modos de pensamiento SG o AA, al interpretar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones a través de las posiciones relativas de dos rectas en el plano o al resolverlo por algún método analítico (igualación, sustitución o reducción). En cambio, si frente al problema de indagar el número de soluciones de un sistema, la EP interviniera para orientar o sugerir un análisis de la proporcionalidad entre los coeficientes de las ecuaciones, se estaría aplicando una propiedad y promoviendo un modo de pensamiento AE. Como la elaboración de la CI contempla también las intervenciones de los estudiantes ficticios a lo largo de la clase, lo que estos estudiantes dicen o hacen nos permitirá entrever los modos de pensamiento que la EP les atribuye; esto es, la manera en que la EP entiende los modos de pensamiento de los estudiantes de enseñanza media básica.

4 Aspectos metodológicos

El estudio de las narrativas docentes se ha consolidado como un enfoque valioso para comprender los procesos de pensamiento pedagógico en la formación de profesores de matemática (Chapman, 2008). En esta investigación se adopta una perspectiva cualitativa mediante un estudio de caso único, centrado en el análisis de narrativas producidas por una EP. El trabajo se enmarca en la línea que concibe las narrativas no solo como instrumentos de recolección de datos, sino como espacios de construcción y reflexión sobre la práctica docente (Zazkis; Marmur, 2018). A continuación, se presenta el contexto particular de la participante y

se detalla la metodología empleada para la producción y análisis de sus narrativas docentes.

Participante y contexto

La formación inicial de profesores en Uruguay es una carrera de cuatro años de duración de nivel universitario. La participante de este estudio es una estudiante de segundo año que estaba cursando su primer curso de Didáctica de la Matemática/Práctica docente. En este curso su docente de Didáctica había trabajado la elaboración de guiones de clase como un recurso para la planeación de la enseñanza. Además, la estudiante cursaba Geometría y álgebra lineal, así como el primer curso de Cálculo, en forma paralela al curso de Didáctica.

Recolección de datos

Chapman (2008) propone el uso de narrativas con futuros profesores con el objetivo de promover procesos de reflexión personal que usualmente requieren indagar sobre la naturaleza de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. También las sugiere para construir o ampliar el conocimiento didáctico. Chapman (2008, p. 23) ha usado las narrativas como “objeto y como proceso de indagación”. En este trabajo se utilizan como objeto de indagación del pensamiento de una EP. Chapman (2008) identifica dos tipos de narrativas: historias sobre la enseñanza de la matemática e historias sobre la resolución de problemas. En este trabajo se consideró una historia sobre la enseñanza, específicamente, se solicitó la escritura de una CI: “Este es un equivalente narrativo de un plan de clase que permite imaginar la lección tal como la perciben o desean que realmente se despliegue” (Chapman, 2008, p. 24). Este plan de clase fue presentado por medio de un guion, esto es, “una tarea en la que los participantes escriben la interacción entre un profesor-personaje imaginario y un estudiante-personaje” (Zazkis; Marmur, 2018, p. 294). De acuerdo con estos autores, estos guiones constituyen una herramienta que permite la recolección de datos. El examen de estos guiones proporciona “imágenes de la enseñanza y conocimiento sobre el entendimiento de la matemática de los guionistas” (Zazkis; Marmur, 2018, p. 294).

Producción de la narrativa

A la EP se le entregó una respuesta de un estudiante de enseñanza media básica que fue tomada de una transcripción de una clase observada en Ochoviet (2009): *Porque no hay igualdad numérica*. A partir de ella, se propuso la siguiente consigna:

a. *Usted recibirá una respuesta real que fue dada en una clase por un estudiante de enseñanza media básica. Deberá responder cuál fue, en su opinión, la pregunta que formuló el o la docente y fundamentarlo.*

b. *Luego, con esa información, deberá desarrollar una clase imaginaria que responda a la pregunta: ¿Cómo siguió la clase? La clase será de unos 40 minutos de duración, y los*

últimos 5-8 minutos se dedicarán a una recapitulación de lo trabajado en la clase, jerarquizando las ideas importantes.

La EP contó con dos semanas para su elaboración y la narrativa que entregó es la que se analiza en este trabajo. La intención de la consigna fue la de favorecer el desarrollo de un pensamiento retrospectivo por parte de la EP, pues el dato que se proporciona es una respuesta de un estudiante a una pregunta que no se conoce. La EP debe elaborar esa pregunta intentando comprender a qué cuestión está respondiendo el estudiante. Esto implica un gran desafío pues la intervención eficaz del docente demanda la comprensión de lo que el alumno responde o pregunta (Ball; Thames; Phelps, 2008), al tiempo que sitúa a la participante en una escena hipotética de contingencia (Rowland; Huckstep; Thwaites, 2005). La propuesta no solicita en forma explícita la planificación de una lección sobre un tema dado y la respuesta que se entregó a la futura profesora podría haber sido orientada hacia distintos escenarios, fue la EP la que decidió orientar su elaboración al contexto de los sistemas de ecuaciones lineales. Se estima que lo eligió porque en la práctica docente que cursaba, su profesora de práctica estaba trabajando ese tema con sus alumnos.

Análisis de la narrativa

En la narrativa elaborada por la participante, en forma de guion, se hace foco en los momentos en que están implicados los modos de pensamiento en álgebra lineal; esto implica considerar todos los episodios en los que la EP moviliza conocimiento matemático para la enseñanza (Ball; Thames; Phelps, 2008) a los efectos de intervenir, preguntar, proponer o resolver tareas matemáticas.

5 Resultados y discusión

Como ya se mencionó, la respuesta que se entregó a la participante fue: *Porque no hay igualdad numérica*. A partir de esto, la EP formula una pregunta posible que, desde su punto de vista, podría haber sido realizada por el docente en la CI que ella desarrolla: *¿Por qué el par $(4, -7/5)$ no es solución de la segunda ecuación?* Fundamenta su opción de la siguiente manera:

Creo que esta respuesta se puede haber dado en un contexto dentro del tema sistemas de ecuaciones. Una posible opción es que los alumnos hayan resuelto incorrectamente el sistema y el par ordenado no verifique una de las ecuaciones, por lo que, al sustituir estos valores en una de las ecuaciones, no haya igualdad numérica (Respuesta de la EP a la parte (a) de la consigna, 2023).

La EP fundamenta la pregunta que propone en un modo de pensamiento AA pues interpreta la solución como un par ordenado de números y en un trabajo aritmético para

comprobar que el par no es solución de una ecuación. La respuesta es asociable a una situación en la que se debate acerca de una solución de una ecuación (ya sea en una o dos variables, lineal o cuadrática porque es lo que se estudia en la enseñanza media básica en Uruguay). En el desarrollo de la CI la EP explica que imagina la clase comenzando por la siguiente tarea:

En una clase de noveno grado, se les pidió a los estudiantes que resolvieran en R el siguiente sistema:

$$2x + 5y = 1$$

$$-x + y = 3$$

Agustín lo resolvió de la siguiente manera:

$$2x + 5y = 1$$

$$2(4) + 5y = 1$$

$$8 + 5y = 1$$

$$5y = -7$$

$$y = (-7)/5 \quad \{(4, -7/5)\}$$

Paula lo resolvió de la siguiente manera:

$$-x + y = 3$$

$$y = 3 + x$$

$$2x + 5y = 1$$

$$2x + 5(3 + x) = 1$$

$$7x = 16$$

$$x = 16/7$$

$$y = 37/7 \quad \{(17/7, 37/7)\}$$

¿Estás de acuerdo con la resolución de los alumnos? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

En caso que no sea correcta la solución, resuélvela (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

La tarea que propone la EP también se presenta en un modo de pensamiento AA: se da un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y las resoluciones ofrecidas por dos alumnos hipotéticos refieren a manipulaciones aritméticas. Si bien la EP podría haber considerado la misma idea, pero en el contexto de una sola ecuación con dos variables, opta por trabajar con un sistema de ecuaciones, haciendo referencia a la *segunda* ecuación. Esto podría deberse a que en la práctica docente que cursa la EP se está trabajando con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas o porque la EP prefiere ese contexto para darle sentido al concepto solución, esto sería consistente con Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) cuando plantean la dificultad de los estudiantes que participaron de su estudio para darle sentido al objeto ecuación lineal. En el caso en que se les presentaba una sola ecuación y se les pedían soluciones para ella, los estudiantes se veían llevados a agregar una segunda ecuación y buscar solución para el sistema.

El desarrollo de la CI continúa así:

Profesora (P): ¿Por qué el par (4,-7/5) no es solución de la segunda ecuación?

Kiara: Porque no hay igualdad numérica.

P: Axel, ¿te animas a decir con tus palabras lo que dijo Kiara?

Axel: Es que no entendí, profe.

P: Kiara, ¿podrías decirlo de vuelta para que todos podamos entender?

Kiara: Eh, bueno, para mí el par (4,-7/5) no sirve porque si sustituimos estos valores en la segunda ecuación, no hay igualdad numérica, o sea, no verifica la igualdad.

Sebastián: Ta, pero verifica la primera.

P: ¿Qué piensa el resto? ¿Fiorella?

Fiorella: Pasa que para que sea solución del sistema tiene que verificar las dos ecuaciones, pero como no verifica la segunda no nos sirve.

P: ¿Entonces en que se equivocó Agustín?

Fiamma: En que usó solo una ecuación. Esa “solución” que halló no verifica la otra (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

Las respuestas de los estudiantes ficticios, imaginadas por la EP, evidencian un modo de pensamiento AA en el que para determinar si el par es o no solución, deben sustituirse los valores de las incógnitas y observar si se obtiene o no una igualdad numérica, y también hay indicios de un pensamiento AE en el caso de la respuesta de Fiorella cuando alude a un conocimiento de tipo teórico al afirmar que una solución del sistema *tiene que verificar las dos ecuaciones*.

La CI continúa con el análisis de la resolución de Paula.

Profesora (P): Bueno seguimos, ¿qué pensaron de Paula?

(Alejandro levanta la mano)

P: Dale, Alejandro.

Alejandro: A nosotros nos parece que la idea está bien, pero erró en las cuentas.

P: Micaela, ¿estás de acuerdo con lo que dijo Alejandro?

Micaela: Sí, nosotras pensamos lo mismo, el error estuvo en el penúltimo paso.

P: ¿Por qué?

Tiago: Porque tendría que haber restado 15 de los dos lados, pero en un lado restó y en el otro sumó.

(...)

P: Ustedes decían que la idea de Paula está bien, ¿por qué?

Candela: Porque usó uno de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

P: ¿Cuál se usó?

Maximiliano: El de sustitución (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

En el diálogo propuesto por la EP se evidencian dos asuntos a destacar, los alumnos imaginarios advierten el error al despejar la incógnita y en el razonamiento de Paula y, además, que hay una idea correcta que está detrás de ese razonamiento que es el haber aplicado uno de los métodos estudiados, en este caso el de sustitución, para resolver un sistema. La aplicación de un método conocido forma parte de la argumentación que valida el razonamiento seguido por Paula; evidencia un modo de pensamiento AA pues implica la manipulación de ecuaciones y, por lo tanto, la interpretación de los símbolos como ecuaciones.

Más adelante en el guion, la profesora les pregunta a los alumnos de qué otra manera se podría haber resuelto el sistema y los alumnos responden: método de igualación, método de reducción y método gráfico. La profesora propone aplicar este último y pregunta a los alumnos qué se requiere para graficar la recta asociada a cada una de las ecuaciones. Una alumna

responde que se necesitan dos puntos y la profesora pregunta qué puntos pertenecen a la recta para relacionar solución con par ordenado que verifica la ecuación. En este caso aparece una articulación flexible entre los modos de pensamiento AA y SG.

Profesora (P): ¿Cómo podemos hacer para trazar las rectas asociadas a las ecuaciones? ¿Qué precisamos para trazar una recta?

Micaela: Dos puntos.

P: ¿Qué puntos van a pertenecer a la recta asociada a la primera ecuación?

Lucio: El $(-2,1)$.

P: Camila, ¿estás de acuerdo con lo que dijo Lucio?

Camila: Sí, habíamos visto que los puntos que pertenecen a la recta son las soluciones de la ecuación, y si sustituimos la x por menos dos y la y por uno, verifica (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

La CI continúa con la búsqueda de las coordenadas de dos puntos de cada una de las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema, siempre relacionando par ordenado que verifica la ecuación con punto perteneciente a la recta, hasta que se realiza la representación gráfica de las rectas en la pizarra.

Profesora (P): Ahora que tenemos las rectas asociadas a las ecuaciones, ¿qué hacemos?

Ana Clara: Como se cortan en un punto el sistema tiene una sola solución.

P: Ahí va, como las rectas son secantes el sistema tiene una única solución, ¿se acuerdan como se llaman los sistemas que tienen una única solución?

Alejandro: Sistema compatible determinado, profe.

P: Bien. ¿Alguien quisiera agregar algo más?

Eliana: Yo profe, que si no tienen solución se llaman incompatibles y si tienen infinitas soluciones se llaman compatibles indeterminados.

P: Exacto, en el caso del sistema incompatible, ¿cómo son las rectas asociadas a esas ecuaciones del sistema?

Mateo: No se tocan nunca.

P: Cuando las rectas no se tocan decimos que son paralelas no coincidentes, pero sí, es esa la idea. ¿Y cuándo el sistema es indeterminado?

Kiara: Es porque son la misma recta.

P: Claro, en ese caso decimos que las rectas son paralelas coincidentes. Volviendo a la actividad, el punto intersección de las dos rectas, ¿qué coordenadas debería tener?

Rafael: $(-2,1)$.

P: ¿Por qué?

Julieta: Porque donde se juntan las rectas es la solución de la ecuación y nos había dado $(-2,1)$.

P: Si se fijan se cortan más o menos en el punto de coordenadas $(-2,1)$. Más o menos porque las rectas están hechas a mano en el pizarrón. Estamos observando que, tanto por un método algebraico como por el gráfico, la solución es la misma (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

En este fragmento se observa que la profesora se expresa evidenciando un modo de pensamiento SG cuando alude a la configuración rectas secantes como representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con solución única; incluso su intervención puede interpretarse como una ayuda a que la estudiante Ana Clara no sitúe la atención en el punto de corte de las dos rectas sino en la posición relativa de las dos rectas en el plano. No obstante, en las expresiones de los alumnos ficticios aparecen ideas habituales asociadas al concepto de

solución como el de rectas que *se cortan en un punto o donde se juntan las rectas*, muy cercanas a la interpretación de solución como punto de corte de dos rectas (Ochoviet, 2009; Oktaç, 2018). La profesora también evidencia un modo de pensamiento AE cuando refiere a la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales dependiendo de la cantidad de soluciones. A su vez, favorece interacciones entre los modos AE y SE cuando busca conectar el tipo de sistema con la configuración gráfica de las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema, y entre los modos SG y AA cuando pregunta por las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas. La profesora evidencia y, a su vez, potencia en los estudiantes de la CI algunas de las dificultades reportadas en los antecedentes. Esto es, alimenta la idea de solución como punto de corte de dos rectas, contrariamente a lo sugerido, por ejemplo, por Oktaç (2018).

Una vez que en la CI se termina de discutir la cuestión inicial anteriormente reportada, la EP incluye una segunda actividad para dar cierre a la clase:

Profesora (P): Bueno, ahora les voy a dar una actividad cortita para que hagan con el compañero de al lado. Tienen 6 minutos.

Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- a. ¿Puede tener una única solución?*
- b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?*
- c. ¿Y exactamente tres?*
- d. ¿Puede tener infinitas soluciones?*
- e. ¿Y ninguna? (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).*

Esta tarea pertenece al cuestionario propuesto en Ochoviet (2009) y fue incluida en el libro de texto *Matemática 3* de Ochoviet y Olave (2009), es de esta última fuente que la EP la tomó. A continuación, se presenta la puesta en común que sigue a la tarea, según se consigna en la CI.

Profesora (P): Bueno, vamos a corregir la actividad, tenemos un sistema de tres ecuaciones y nos preguntan si ese sistema puede tener una única solución. ¿Qué pensaron?

Valentina: Nosotras pensamos que si cada ecuación tiene una recta vamos a tener tres rectas.

P: Bueno, tiene que ver con eso. Vamos a tratar de que todos te entendamos, a cada ecuación lineal con dos incógnitas se le puede asociar una recta, sí, ¿entonces qué?

Valentina: Entonces, como hay tres ecuaciones, a cada una le corresponde una recta.

P: Okey, ¿entonces?

Valentina: Entonces, si las tres rectas pasan por un punto, tendría una única solución.

P: ¿Qué tendría una única solución?

Mateo: El sistema (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

Claramente, el caso de solución única es asociado a tres rectas concurrentes. La interpretación se da en el modo de pensamiento SG. La discusión podría haber terminado en el diálogo anterior dado que, con proponer un caso, era suficiente para dar por contestada la pregunta (a) de la tarea. La EP sugiere continuar con la discusión, de la siguiente manera:

Profesora (P): Fiorela, ¿estás de acuerdo con lo que dicen los compañeros?

Fiorela: Sí, sería como en la actividad anterior que teníamos dos rectas secantes y el punto de

intersección era la solución. Ahora tenemos tres rectas.

P: Estas tres rectas, ¿cómo son entre ellas? ¿Alguien quiere pasar a trazarlas al pizarrón?

Axel: Yo paso.

(Axel pasa y dibuja tres rectas secantes y distintas)

P: ¿Qué dice el resto?

(Alumnos asienten con la cabeza)

(Profesora dibuja dos rectas secantes)

P: ¿Y si les dijera que estas dos rectas están asociadas a tres ecuaciones? Discútanlo un minuto con el compañero.

(Pasado el minuto)

P: ¿Qué se les ocurrió?

Kiara: ¿Puede ser que dos sean equivalentes? Porque habíamos visto que las ecuaciones equivalentes tienen la misma recta.

P: Es verdad, las ecuaciones equivalentes tienen asociada la misma recta.

Tiago: Entonces si son tres ecuaciones, pero dos rectas, ¿hay dos ecuaciones que van a ser equivalentes?

P: Luca, ¿qué piensas de lo que dijo el compañero?

Luca: Está bien.

P: Bueno, sí, lo que dice Tiago es cierto. Entonces, un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede tener una única solución. ¿Puede tener dos soluciones? (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

En este fragmento subrayamos el modo en que la alumna ficticia Fiorela se expresa: *el punto de intersección era la solución*. La profesora no interviene si bien anteriormente había situado su atención en la configuración gráfica, haciendo referencia a rectas secantes. Obsérvese que luego de que el alumno ficticio Axel dibuja las tres rectas concurrentes y que los alumnos asienten con la cabeza, dando a entender que todos están de acuerdo con esa representación gráfica para el caso único, la profesora dibuja dos rectas secantes y les pregunta a los alumnos si podrían estar asociadas a las tres ecuaciones. Si bien se concluye correctamente que dos de las ecuaciones podrían ser equivalentes, parecería que la profesora necesita visitar este caso de dos rectas secantes para concluir que, en efecto, un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una única solución, obsérvese que es luego de este ejemplo que la profesora concluye:

Entonces, un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede tener una única solución (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

Esta conclusión no fue subrayada luego de dibujar las tres rectas concurrentes. Aunque es muy importante analizar las distintas posiciones relativas de tres rectas en el plano que conducen a un sistema con solución única, parecería evidenciarse la necesidad de la profesora de mostrar la configuración gráfica dos rectas secantes para responder la pregunta (a). Esto sería consistente con lo que la EP le hace decir a la alumna Fiorela y con el momento de la clase en el que se concluye que puede existir solución única, que es recién después de dibujar en el pizarrón dos rectas secantes. Esto revela una fuerte tendencia a modelizar el caso de solución

única con esa representación y podría alimentar las dificultades reportadas en Oktaç (2018).

La CI continúa para responder las partes (b) y (c) de la tarea.

Camila: No porque las rectas sólo se cruzan una vez.

Profesora (P): A ver, ¿cómo es eso?

Camila: Claro, la solución del sistema es la intersección de las rectas, y las rectas no pueden cruzarse más de una vez.

P: Intersecarse más de una vez.

Camila: Eso.

P: Bien, entonces no pueden tener dos soluciones. ¿Y tres?

Mateo: No por lo mismo, si no se intersecan dos tampoco se van a intersecar tres (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

La profesora corrige la intervención de la estudiante ficticia Camila, señalando que se dice *intersecan* y no que *se cruzan*. El modo de pensamiento tanto de la profesora como de los alumnos es el SG. La profesora no solicita dibujos y tampoco hace énfasis en la palabra *únicamente* que está presente en el enunciado de la tarea, pregunta si puede tener dos o tener tres soluciones, que indudablemente no es lo mismo que únicamente dos o únicamente tres. La CI avanza hacia las partes (d) y (e) de la tarea.

Profesora (P): ¿Puede tener infinitas soluciones?

Fiamma: Bueno ahí tendría que ser solo una recta, entonces tendrían que ser todas paralelas coincidentes, ¿no? para que sea una única recta asociada.

P: ¿Qué piensa el resto?

E: Sí, profe.

P: Y, ¿podrá no tener ninguna solución?

Rafael: ¿Si ninguna se toca?

P: ¿Vos decís si no tienen puntos en común?

Rafael: Sí, si son paralelas.

P: Sí, si son paralelas entonces no tienen ningún punto en común y no tendría solución. O sea que para que el sistema no tenga solución ¿cómo tienen que ser las rectas?

Martina: Paralelas no coincidentes.

P: Bien (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

El caso de infinitas soluciones es discutido correctamente. Se lo asocia en modo SG con el caso de tres rectas coincidentes. Aparece luego la discusión de la última parte, en la que se pregunta si el sistema puede no tener solución, el alumno ficticio Rafael sugiere el caso de rectas paralelas, tras lo que la profesora confirma que en ese caso no habría solución, el problema es que la profesora instala esa configuración gráfica como condición necesaria: *O sea que para que el sistema no tenga solución ¿cómo tienen que ser las rectas?*, cuando las rectas podrían tener otras configuraciones posibles como las siguientes (Figura 1):

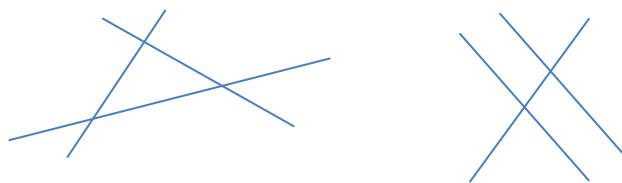


Figura 1 – Otras configuraciones asociadas a un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas con solución vacía
Fuente: elaboración propia (2024)

Esto evidencia que la configuración gráfica que prevalece para un sistema de ecuaciones lineales sin solución es la de rectas paralelas, que es la única posible para el caso de los sistemas 2×2 , aun cuando la EP está cursando el segundo año de la formación inicial de profesores de matemática y, en particular, el curso Geometría y Álgebra lineal de ese año de la carrera. Esto es consistente con lo reportado por Ochoviet (2009) y con lo que señala Oktaç (2018) cuando sugiere, específicamente, que en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales se requiere prestar particular atención a las configuraciones asociadas a sistemas sin solución para que los estudiantes no consoliden el caso de rectas paralelas como única configuración gráfica posible para ese tipo de sistemas. También se evidencia la dificultad de la EP para establecer todas las posiciones relativas de tres rectas en el plano, consistente con lo reportado por Eslava y Villegas (1998).

A continuación, se presenta más evidencia de las configuraciones gráficas que la EP propone asociar a cada tipo de conjunto solución. Luego del último diálogo citado, la CI plantea un momento de recapitulación de la primera cuestión discutida en la clase y luego una reflexión sobre la segunda tarea:

Profesora (P): En la segunda actividad teníamos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas y vimos que ese sistema podía tener una única solución, tener infinitas soluciones o no tener solución. Si las rectas asociadas a las ecuaciones lineales son secantes en un punto, estamos en el primer caso; si las rectas asociadas a las ecuaciones son paralelas coincidentes, tenemos infinitas soluciones y, si las rectas asociadas a las ecuaciones son paralelas no coincidentes, el sistema no tiene solución (Fragmento de la CI elaborada por la EP, 2023).

Esta evidencia refuerza la afirmación realizada anteriormente de que la única configuración gráfica que tiene la EP asociada a sistema sin solución es la de un conjunto de rectas paralelas y esta idea, en un contexto de sistemas 3×2 , la lleva a cometer un error. Esta idea, matemáticamente incorrecta, es institucionalizada en la CI como conclusión de la clase. La siguiente viñeta modela el fenómeno observado (Figura 2).

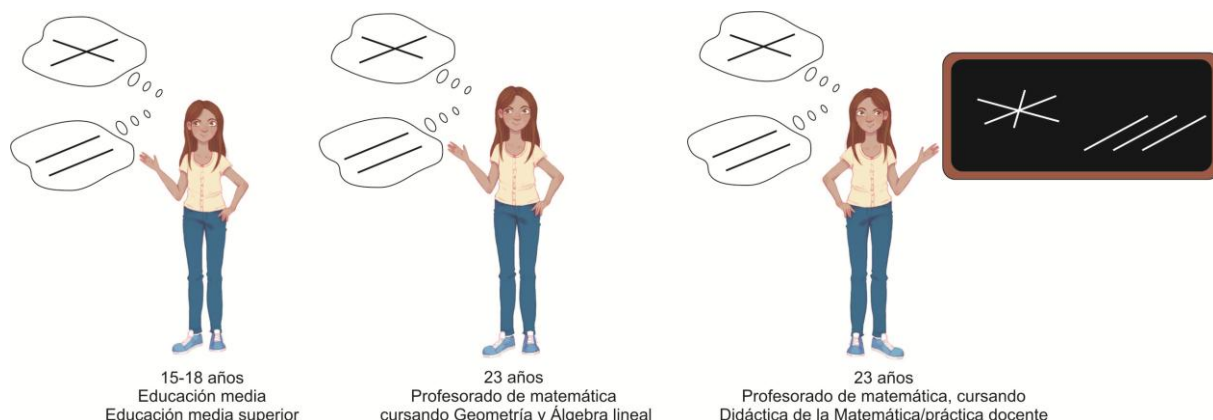


Figura 2 – Lo que se aprende se transfiere a la enseñanza
Fuente: elaboración propia (2024)

6 Conclusiones

En este trabajo nos propusimos responder qué modos de pensamiento se ponen en juego en una CI redactada por una EP cursando su primera práctica docente y qué dificultades quedan en evidencia. La CI se desarrolla inicialmente en un modo de pensamiento AA debido a que a la EP se le propuso formular una posible pregunta del docente a una respuesta que estaba dada en ese modo: *Porque no hay igualdad numérica*. Así, la EP propone como posible pregunta por parte del docente *¿Por qué $(4, -7/5)$ no es solución de la segunda ecuación?* Luego indica en qué contexto se da esa pregunta, que es el de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y elabora la discusión en torno a la tarea que se está resolviendo y que dio lugar a esa pregunta. Una vez culminada la puesta en común, propone una segunda tarea que puede ser respondida utilizando distintos modos de pensamiento y sitúa la reflexión en las características del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales: tiene un solo elemento, tiene infinitos o ninguno.

En el desarrollo de la CI, se establecen conexiones entre los modos AA y SG, por ejemplo, cuando la profesora pregunta por las representaciones gráficas asociadas a sistemas con distinto tipo de conjunto solución. También se evidencia el modo AE en las intervenciones de la profesora que aluden a aspectos teóricos, por ejemplo, cuando explica la clasificación de los sistemas según la cantidad de elementos de su conjunto solución o cuando se está trabajando en un modo de pensamiento AA y una alumna ficticia dice que una solución del sistema tiene que verificar las dos ecuaciones del sistema, recurriendo a la definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones.

Si bien una posible pregunta para la respuesta *Porque no hay igualdad numérica* podría haber sido formulada en el contexto de una ecuación lineal con una sola variable o una sola

ecuación lineal con dos, la EP opta por hacer referencia a una *segunda ecuación*, marcando con la palabra *segunda*, la existencia de un sistema de al menos dos ecuaciones. Esto puede deberse a que en la práctica docente que cursaba la EP se estaba trabajando con este tema o, también, a la necesidad personal de trabajarlo en ese contexto debido a la dificultad de concebir una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones. Esto es consistente con los hallazgos de Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) cuando reportan que un estudiante interpretó la ecuación lineal como una función lineal, a partir de la cual pudo construir soluciones otorgándole valores a una de las variables.

Este mismo procedimiento es el que propone la EP en la primera tarea, en la que a la x se le asigna el valor 4 (sin explicar por qué se consideró ese número) y para ese valor se obtiene, por sustitución, el valor correspondiente de y . Dicho de otro modo, no es que el sistema se resolvió incorrectamente y se arribó a un par ordenado que no es solución del sistema, sino que se asigna un valor cualquiera a la x , en este caso 4, y se obtiene el valor de y , lo que evidentemente, no arrojará un par solución del sistema debido a que ese 4 parece haber sido seleccionado en forma aleatoria. Aunque la profesora de la CI explicita que la configuración gráfica para un sistema de dos ecuaciones con solución única es la de rectas secantes y luego, en el caso de tres ecuaciones, se mencionan tres rectas que tienen el mismo punto en común, se observa una tendencia a asociar solución de un sistema con punto de corte y con la configuración de dos rectas secantes. Esto se hace patente cuando, al trabajar en un sistema con tres ecuaciones, la profesora de la CI dibuja en el pizarrón dos rectas secantes, pregunta si sería posible esa representación gráfica, se arriba correctamente a que dos de las ecuaciones del sistema podrían ser equivalentes y, recién después de esto, la profesora institucionaliza que un sistema con tres ecuaciones puede tener solución única. En otras palabras, parecería tener que visualizar dos rectas secantes para poder arribar a esa conclusión cuando lo podría haber afirmado tempranamente cuando se habla de tres rectas con un único punto en común.

Adicionalmente, en la CI elaborada por la EP se asocia sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución, únicamente con la configuración gráfica de tres rectas paralelas, y se institucionaliza este caso como la única opción, eludiendo otros dos casos posibles. Esta problemática es consistente con lo reportado por Ochoviet (2009) y Oktaç (2018) en donde se reporta la persistencia del modelo rectas paralelas como única representación gráfica de sistema de ecuaciones lineales sin solución. Esta situación se atribuye a la fuerte influencia del modelo introducido al abordar los sistemas 2×2 , que suele ser el primer acercamiento al estudio de sistemas lineales en la educación media y media superior, lo que genera un impacto negativo en el aprendizaje del álgebra lineal. Se evidencia también que la

profesora no maneja la totalidad de las posiciones relativas de tres rectas en el plano (Eslava; Villegas, 1998), o bien las conoce, pero las asocia con otro tipo de conjunto solución. Asimismo, se institucionaliza el caso de tres rectas paralelas como único caso posible para un sistema de tres ecuaciones sin solución.

Del trabajo presentado se desprende que las concepciones iniciales construidas sobre la base de los sistemas 2×2 son difícilmente ampliables aún cuando los estudiantes cursen álgebra lineal en el nivel superior, en consonancia con lo detectado por Rodríguez *et al.* (2022) y por Magallanes (2019). A través de la CI elaborada por la EP pudimos apreciar la manera en que comprende los objetos matemáticos y sus relaciones en una situación de enseñanza al imaginar el rol de profesor (Zazkis; Marmur, 2018).

Esto plantea un grave dilema dado que ya no solo estamos hablando de dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal sino de que estas dificultades se transforman en conocimientos matemáticamente incorrectos que aparecen como materia de enseñanza en el aula de la educación media básica, haciendo que la espiral de dificultades se acreciente. Esto es, a las dificultades reportadas por la literatura en torno al aprendizaje del concepto de sistema, solución de un sistema y conjunto solución en la clase de álgebra lineal, se agregan las implicancias de esos aprendizajes en la enseñanza. Es hora de que los profesores que enseñan álgebra lineal en cualquier nivel educativo tomen en cuenta los aportes de la investigación para reformular, con urgencia, el discurso matemático escolar.

Contribuciones de autoría

Todos los autores contribuyeron sustancialmente a la concepción y planificación del estudio; a la obtención, análisis e interpretación de los datos; a la redacción y revisión crítica del manuscrito; y aprobaron la versión final que será publicada.

Disponibilidad de datos

Los datos generados o analizados durante este estudio están incluidos en este artículo publicado.

Referencias

ALCOCER, I. **Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico**. 2007. 110 f. Tesis (Maestría en Matemática Educativa) – Cinvestav,

Instituto Politécnico Nacional, México, 2007.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008.

CAMPOS, S.; PARRAGUEZ, M. Comprensión de sistemas de ecuaciones lineales: un estudio de caso en el contexto escolar en Chile. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 347-368, dez. 2019.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS L.; MUÑOZ-CATALÁN, M. Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Antalya. **Proceedings...** Ancara: Middle East Technical University, 2013. p. 2985-2994. Disponible en: http://cerme8.metu.edu/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acceso en: 8 feb. 2026.

CHAPMAN, O. Narratives in mathematics education. *In*: TIROSH, D.; WOOD, T. (ed.). **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education**. Boston: Sense Publishers, 2008. p. 15-38.

CHHABRA, M.; BAVEJA, B. Exploring Minds: Alternative Conceptions in Science. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, Amsterdam, v. 55, p. 1069-1078, out. 2012.

CUTZ, B. **Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución**. 2005. 150 f. Tesis (Maestría en Matemática Educativa) – Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional, México, 2005.

ESLAVA, M.; VILLEGAS, M. **Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano**. 1998. 70 f. Tesina (Diplomado) – Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México, 1998.

MAGALLANES, R. **Aportes para conectar la matemática que se enseña en la formación de profesores de matemática con la matemática que los futuros profesores deberán enseñar en la educación media**. 2019. 58 f. Tesina (Diplomado) – Administración Nacional de Educación Pública, Universidad de la República, Uruguay, 2019.

OCHOVIET, C. **Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas**. 2009. 290 f. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa) – CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México, 2009.

OCHOVIET, C.; OLAVE, M. **Matemática 3**. Montevideo: Santillana, 2009.

OKTAÇ, A. Conceptions about system of linear equations and solution. *In*: STEWART, S.; ANDREWS, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (ed.), **Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra, ICME-13 Monographs**. Cham: Springer, 2018. p. 71-101.

PANIZZA, M.; SADOVSKY, P.; SESSA, C. La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 17, n. 3, p. 453-461, nov. 1999.

PONCIANO, E.; SEGURA, L.; ÁVILA, J. Conjunto solución de sistemas de ecuaciones. Un estudio en estudiantes de la licenciatura en matemáticas. **Investigación científica**, Zacatecas, v. 2, n. 14, p. 80-86, jun./dez. 2020.

RODRÍGUEZ, M. *et al.* Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: un estudio de casos. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 34, n. 3, p. 163-193, dez. 2022.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Amsterdam, v. 3, n. 8, p. 255-281, jun. 2005.

RYAN, J.; WILLIAMS, J. **Children's Mathematics 4-15. Learning From Errors and Misconceptions**. Berkshire: Open University Press, 2007.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: DORIER, J. (ed.), **On the Teaching of Linear Algebra**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 209-246.

ZAZKIS, R.; MARMUR, O. Scripting tasks as a springboard for extending prospective teachers' example spaces: A case of generating functions. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, Toronto, v. 18, n. 4, p. 291-312, dez. 2018.

Enviado el: 07 de abril de 2024.

Aprobado el: 22 de octubre de 2025.

Editor jefe responsable: Prof. Dr. Roger Miarka

Editora asociado responsable: Prof. Dr. Vicenç Font