
ARTÍCULO

Propuesta de un modelo epistemológico para la enseñanza de la inferencia bayesiana

Proposal of an epistemological model for teaching Bayesian inference

Cristian G. Paredes-Cancino*

 ORCID iD 0000-0001-6321-3538

Gisela Montiel-Espinosa**

 ORCID iD 0000-0003-1670-9172

Resumen

La enseñanza escolar de la estadística bayesiana se caracteriza por promover un significado de la probabilidad subjetiva como algoritmo de cálculo. A propósito del desarrollo limitado de significados escolarmente, la historia de la matemática resulta una fuente de datos que provee elementos epistémicos que configuran nuevos significados sobre las nociones matemáticas. Por lo tanto, con el objetivo de caracterizar la actividad estocástica que subyace a problemas bayesianos y el contexto asociado en su génesis, se plantea un estudio de tipo documental a través del método de análisis cualitativo de contenido desde la perspectiva socioepistemológica. Los resultados muestran una organización de prácticas estocásticas direccionada por la estimación del ‘valor verdadero’ del parámetro desconocido, a partir del cual se construye un modelo epistemológico de referencia como propuesta para reorientar la intervención didáctica de la inferencia bayesiana.

Palabras clave: Génesis histórica. Inferencia. Prácticas estocásticas. Teorema de Bayes. Socioepistemología.

Abstract

The teaching of Bayesian statistics at school is characterized by promoting the meaning of subjective probability as a calculation algorithm. Regarding the limited development of meanings at school, the history of mathematics is a source of data that provides epistemic elements that configure new meanings about mathematical notions. Therefore, to characterize the stochastic activity that underlies Bayesian problems and the context associated with their genesis, a documentary study is proposed through qualitative content analysis from the socio-epistemological perspective. The results show an organization of stochastic practices directed by estimating the ‘true value’ of the unknown parameter, from which an epistemological reference model is built as a proposal to reorient the didactic intervention of Bayesian inference.

Keywords: Historical Genesis. Inference. Stochastic practices. Bayes Theorem. Socioepistemology.

* Estudiante del Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México. E-mail: cristian.paredes@cinvestav.mx

** Doctora en Ciencias en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional (IPN). Investigadora titular del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México. E-mail: gmontiele@cinvestav.mx

1 La investigación histórica en Matemática Educativa

La integración de la historia de las matemáticas en la matemática educativa se ha convertido en un área de investigación que ha entrado en un periodo de consolidación en la última década debido a los aportes sobre los fenómenos didácticos ligados al estudio de las matemáticas escolares (véase Chorlay; Clark; Tzanakis, 2022; Clark *et al.*, 2018; Furinghetti, 2020).

En la disciplina, se distinguen al menos dos direcciones de la investigación sobre la historia de las matemáticas: como una forma de conocimiento de las matemáticas y como recurso para la intervención didáctica. Dentro de estas, algunos temas de interés han sido: cuestiones teóricas sobre la relación entre la investigación histórica y la investigación didáctica; el diseño de material didáctico basado en fuentes históricas y sus resultados de implementación; los usos de la historia en el currículo, los libros de texto y la formación docente; la construcción de marcos conceptuales a partir de la historia; la historia y epistemología de las matemáticas como herramienta para un abordaje interdisciplinario; entre otros (Chorlay; Clark; Tzanakis, 2022).

Bajo este panorama, la consideración de elementos históricos debe verse como una forma de mejorar los procesos de instrucción matemática, permitiendo reflexionar sobre la actividad matemática y su naturaleza. Al respecto, Barbin, Guillemette y Tzanakis (2020) señalan que hay tres tipos de contribuciones asociadas con la investigación histórica, esto es, epistemológica, cultural y didáctica.

Por ejemplo, la historia de las matemáticas puede proporcionar formas de hacer matemáticas muy diferentes a las establecidas en el escenario escolar y así, transformar la enseñanza y profundizar la comprensión conceptual en los estudiantes (Barbin; Guillemette; Tzanakis, 2020); permite dar cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un concepto matemático en el marco de las condiciones socioculturales y, en consecuencia, reconocer la complejidad que rodea los conceptos, los aspectos que incidieron en su constitución y así trascender los procesos algorítmicos (Anaconda, 2003); ayuda a la construcción de modelos epistemológicos que orientan el diseño y análisis de actividades para la enseñanza (Jankvist, 2009).

2 La estadística bayesiana en la Educación Estadística

Diversos estudios en educación estadística han tomado la dimensión histórica-epistemológica como una fase de investigación hacia la búsqueda de formas de enseñanza que amplíen la actividad estocástica y los significados asociados en el escenario escolar. Esto obedece en parte al llamado de una transformación de su enseñanza, que sea reposicionada en el currículo escolar desde una visión algorítmica a una instrucción basada en el análisis detrás de los datos (Chaves Esquivel, 2016). Es decir, pensar la enseñanza y aprendizaje de la estocástica más allá de procedimientos y técnicas y verlas como herramientas que permiten al individuo comprender y actuar sobre su entorno.

Al respecto de la construcción de significados para las nociones estocásticas, Ainley y Pratt (2001) plantean que estos pueden emanar al menos de dos tipos de tareas: *tareas orientadas a cálculos*, en las cuales el objetivo es producir resultados a través de la aplicación de técnicas estadísticas a conjuntos de datos; y *tareas orientadas a conceptos*, en las cuales el objetivo es el análisis de los procesos estadísticos y el contexto de los datos. El primer tipo de tareas promueve significados generales ligados a formas de aprendizaje procedimental, mientras que, el segundo tipo de tareas promueve significados situados, propios del contenido de los datos y de los procesos empleados para producir tales resultados.

De las nociones estocásticas, una que se considera una idea fundamental y que en la última década se ha investigado ampliamente es la inferencia estadística. Acerca de su enseñanza, esta ha sido parcial, porque se ha priorizado la perspectiva clásica soslayando la mirada bayesiana (Borovcnik, 2012). Muestra de esto han sido los diversos estudios desarrollados en el marco de la inferencia informal, el cual se basa fuertemente en la perspectiva frecuentista (Borovcnik, 2019; Dijke-Droogers; Drijvers; Bakker, 2020; Nilsson, 2020).

En esta misma línea, Borovcnik (2012) y Vancsó, Borovcnik y Fejes-Tóth (2021) destacan la falta de trabajo e investigación sobre la relación entre probabilidad e inferencia y señalan que en algunos currículos las ideas bayesianas están excluidas. Y cuando son parte de los programas de estudio, autores como Carranza (2014) reportan que la actividad estocástica sobre la probabilidad bayesiana está focalizada en procedimientos y técnicas, es decir, se priorizan tareas orientadas a cálculos en las cuáles el vínculo con la inferencia es inexistente. Por tal razón, la inferencia bayesiana será considerada en el presente como pieza matemática en el objeto de estudio.

Siguiendo la ruta de la investigación histórica con énfasis en la estadística bayesiana, identificamos en la literatura, principalmente, estudios epistemológicos sobre la probabilidad dentro de la cual se hace alusión a la perspectiva subjetiva o bayesiana.

En esta línea, el estudio de Batanero, Henry y Parzysz (2005) se centra en analizar la

naturaleza de las diferentes interpretaciones de probabilidad a lo largo de la historia. Como resultados muestran el carácter multifacético de esta noción y su dualidad. En específico, de la probabilidad bayesiana destacan su carácter relativista o subjetivo y que la probabilidad, en este caso, mide el grado de incertidumbre específico de una persona.

Tomando como base el estudio anterior, Batanero (2005) caracteriza los distintos significados históricos de la probabilidad a partir de un modelo teórico desde el Enfoque Ontosemiótico. Como producto se describen los significados en términos del campo de problemas, los procedimientos, entre otros componentes. En el caso de las ideas bayesianas se destaca nuevamente el carácter subjetivo vinculado con la asignación personal de probabilidades.

Asimismo, Carranza (2009) lleva a cabo un estudio epistemológico sobre este concepto para comprender sus orígenes y evolución. Una de sus principales conclusiones concuerda con lo reportado, es decir, que la dualidad es una característica intrínseca a la probabilidad; además, afirma que esa dualidad permanece hasta nuestros días. Asociado a esto, el autor propone un conjunto de elementos característicos para examinar la presencia de una u otra interpretación en ejercicios en libros de texto o currículo. Uno de los elementos característicos es el tipo de razonamiento, sobre el enfoque bayesiano se menciona el razonamiento en el sentido inductivo y abductivo.

La investigación de Borovcnik y Kapadia (2014) presenta una perspectiva histórica y filosófica del siglo XXI sobre la probabilidad. Como contribución describen características de las tres posiciones filosóficas más importante. Con respecto de lo bayesiano se destaca, por ejemplo, las categorías de información de la que hace uso (información previa y datos empíricos) y su naturaleza subjetivista.

Por último, el trabajo de Paredes (2018) se centra en examinar la interpretación bayesiana en el siglo XVIII, en específico, caracteriza la forma y el papel que juega la regla de Bayes en el texto matemático de Thomas Bayes.

Estos estudios tienen en común que se enfocan en mirar desde el escenario histórico las características y la naturaleza de las interpretaciones de la probabilidad, lo que los ha llevado a determinar marcos para entender las distintas miradas en un plano horizontal, con excepción del trabajo de Paredes (2018). Esto consideramos que puede provocar no contemplar otros elementos que son propios de la perspectiva bayesiana.

En relación con este panorama y al llamado de Batanero y Álvarez-Arroyo (2023) respecto al desarrollo de estudios epistemológicos sobre la probabilidad, nos interesamos en este tipo de trabajo como una ruta para encontrar elementos epistémicos que sustenten nuevas

formas de introducir esta noción en el escenario escolar. Para robustecer las investigaciones citadas nos centramos en la caracterización de la actividad estocástica que subyace a problemas relativos de estadística bayesiana en la génesis de esta noción. Ello con el objetivo de configurar un modelo epistemológico de referencia que fundamente un diseño de *tareas orientadas a conceptos* como instrumento de una investigación futura.

Por tanto, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es la actividad estocástica que promueven los problemas bayesianos y sus características, en la génesis de la estadística bayesiana?

3 Elementos teóricos-metodológicos

Hacia finales de la década de 1980, la investigación en educación matemática experimentó lo que Lerman llamó *el giro social*. Este fue caracterizado como “el surgimiento [...] de teorías que ven el significado, el pensamiento y el razonamiento como productos de la actividad social” (Lerman, 2000, p. 23). Esto significó considerar la naturaleza social del conocimiento, es decir, entender el conocimiento matemático como inseparable del contexto social en el que se produce.

En esta línea, algunas perspectivas sociales, en su forma de comprender y explicar la construcción de conocimiento de forma situada y sus significados –lo social–, han adoptado ciertas nociones y conceptos [de las ciencias sociales], uno de ellos ha sido la noción de *práctica*, la cual se ha usado para caracterizar la actividad matemática y su organización. Por ejemplo, las investigaciones de Dogruer y Akyuz (2020), dos Santos Verbisek y Bittar (2020), García-García *et al.* (2022), Polaki (2002), Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021), Triantafillou y Potari (2010) y Wijayanti y Winslów (2017), además de utilizar diferentes perspectivas teóricas basadas en prácticas, reconocen las prácticas matemáticas asociadas a contenidos matemáticos específicos en distintos escenarios como el escolar, el histórico y el lugar de trabajo.

3.1 Construcción social del conocimiento matemático

Respecto del paradigma social, en particular, la socioepistemología es una teoría que se interesa por estudiar la forma en la que las circunstancias sociales y culturales de la actividad humana enmarcan, regulan y constituyen la producción de conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, las prácticas matemáticas son la unidad a partir de la cual se

explica la actividad matemática como actividad humana. Las matemáticas entonces se conciben como algo que es producido por quienes participan en ellas en un contexto específico, por lo que es algo que los individuos *hacen*.

Así pues, la construcción de conocimiento matemático en la socioepistemología queda revelada en una *progresión pragmática de prácticas* también conocida como *modelo de anidación de prácticas*. Cantoral (2020, p. 791) describe los niveles de prácticas implicadas como: “la anidación de prácticas tiene tres elementos, *acciones*, *actividades* y *prácticas socialmente compartidas*; y están regulados por la *práctica de referencia* (una dimensión cultural) y la *práctica social* (una dimensión social)”.

Especialmente, la *práctica matemática* refiere a las formas organizadas de hacer y decir de las personas en torno a un saber matemático (culto, popular o técnico), que se estructura de acuerdo con el contexto donde están situadas y que a su vez da significado a lo que se hace y se dice. Por lo tanto, las *prácticas* se constituyen en una relación dialéctica entre la persona que actúa y el contexto que enmarca su actividad matemática (Lave, 1988).

A la luz de lo anterior, se considera dicha teoría como lente para desarrollar una problematización de la estadística bayesiana en su génesis histórica, esto es, desentrañar la naturaleza del conocimiento estocástico en términos de la actividad estocástica que la produce y el contexto que la constituye.

3.2 Análisis histórico-epistemológico desde la socioepistemología

Para abordar el aspecto epistémico que conlleva la pregunta de investigación, los estudios de corte Histórico–Epistemológico (HE) han sido un método esencial en la investigación socioepistemológica (véase Cruz-Márquez; Montiel-Espinosa, 2022; Espinoza Ramírez; Vergara Gómez; Valenzuela Zúñiga, 2018). Por esta razón, para el desarrollo del estudio se decidió por un análisis de corte HE con base en la propuesta de Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa (2022).

El esquema metodológico se conforma por cinco etapas y está fundamentado en el análisis cualitativo de contenido (Figura 1). El análisis documental se realiza mediante un acercamiento histórico-matemático a las matemáticas del pasado y su objetivo es la construcción de hipótesis epistemológicas, es decir, la configuración de modelos epistemológicos sobre el saber basados en prácticas matemáticas que integren tanto aspectos de la actividad matemática como del contexto.

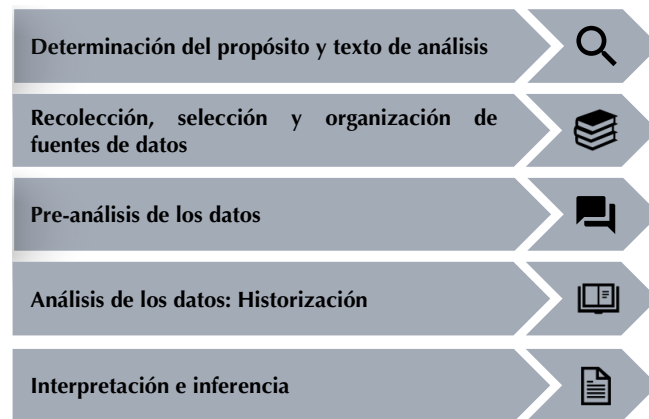


Figura 1 – Esquema metodológico para estudios de corte HE en socioepistemología
Fuente: Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa (2022)

Particularmente, la *historización* es el estudio histórico-crítico, más que cronológico, de la epistemología situada que describe la construcción y constitución del conocimiento matemático en su génesis, desarrollo o transversalidad (Cantoral; Montiel; Reyes-Gasperini, 2015). De ahí que el análisis de los datos se integre de dos subanálisis: uno contextual y otro textual. Estos a su vez se componen por elementos específicos que permiten caracterizar la actividad matemática que produce el conocimiento matemático y el contexto que la constituye (véase Cuadro 1).

Análisis contextual Historia crítica externa del saber a través de la caracterización del contexto de significación	Análisis textual Historia crítica interna del saber a través de la reconstrucción pragmática de la actividad matemática
Contexto cultural: Características sociales de grupos culturales que reflejan necesidades ideológicas, políticas, económicas que conforman una cosmovisión e influyen en la racionalidad del sujeto. Contexto situacional: Factores o circunstancias espacio temporales que inciden sobre el sujeto en relación con un saber matemático. Contexto de la situación específica: Elementos matemáticos y situacionales que determinan problemas dentro de las cuales el saber matemático emerge.	Práctica Socialmente Compartida: Organización de acciones y actividades que lleva a cabo el sujeto de forma iterada y deliberada, relativo al tratamiento de situaciones específicas que caracterizan una tarea matemática. Actividad: Coordinación de acciones intencionales del sujeto dirigidas a un propósito para atender a una situación específica en el marco de una tarea matemática. Acción: El hacer y/o decir del sujeto frente al objeto (lo que demanda una tarea matemática).

Cuadro 1 – Historización como historia crítica del saber
Fuente: elaboración propia

El *análisis contextual* reside en la caracterización del *contexto de significación* con la finalidad de develar las circunstancias socioculturales que constituyen y dan significado al conocimiento matemático. Dicho contexto se integra por tres dimensiones contextuales – *contexto de la situación específica*, *contexto situacional* y *contexto cultural*– que va desde aspectos específicos a generales que sitúan el texto y la matemática en juego en el tiempo y

lugar.

El *análisis textual* consiste en la *reconstrucción de la actividad matemática* en un texto histórico con el objetivo de identificar el hacer matemático que llevó a cabo quién lo escribió y caracterizar su dinámica. En relación con esto, se emplean los tres niveles inferiores del modelo socioepistemológico de anidación de prácticas –*acción, actividad y práctica socialmente compartida*–, los cuales describen dinámicas del *hacer matemático*. Para reconocer las acciones se pregunta al texto *¿qué hizo el sujeto?* y *¿cómo lo hizo?*; en el caso del nivel actividad se cuestiona *¿para qué lo hizo?*; y en el nivel de práctica socialmente compartida *¿por qué lo hizo?*

4 Producción de datos

4.1. Texto de análisis

Para desarrollar el estudio HE se eligió el texto *An Essay towards solving a Problem in The Doctrine of Chances* de Thomas Bayes, el cual se reconoce como el primer texto donde se establece una versión (para el caso binomial) del modelo actualmente conocido como teorema de Bayes y que muestra un tratamiento de la inferencia inductiva también nombrada *inferencia bayesiana*. De hecho, unos años más tarde, Laplace en su *Theorie Analytique des Probabilities* presenta de forma independiente al trabajo de Bayes una nueva versión del teorema, pero para modelos más generales que el binomial (Dale, 1999; Gómez Villegas, 2001; Hald, 2007).

En particular, la presente investigación toma la cuarta sección del texto de Bayes de 1763 –apéndice– como nuestro objeto de análisis puesto que ilustra la inferencia bayesiana a través del uso del teorema de Bayes en algunos problemas. De modo que dichos problemas nos permitirán reconstruir y caracterizar la actividad estocástica asociada a la inferencia bayesiana en términos de prácticas.

4.2 Fuente de datos

Para poder comprender y describir las esferas que conforman el contexto de significación de la inferencia bayesiana en su génesis y con base en ello reconstruir de forma situada la actividad estocástica asociada a los problemas bayesianos, se realizó una búsqueda de fuentes en las que se identificaron biografías, traducciones del texto, estudios históricos e interpretaciones del texto acordes a nuestro objetivo. Algunas de las fuentes de consulta

utilizadas pueden verse en el Cuadro 2.

Tipo de fuente	Fuente
Primaria	▪ Bayes, T. (1763). <i>An Essay towards Solving a Problem in The Doctrine of Chances</i>
Secundaria	▪ Bellhouse, D. R. (2004). <i>The Reverend Thomas Bayes, FRS: A Biography to Celebrate the Tercentenary of His Birth</i> ▪ Dale, A. (1999). <i>A history of inverse probability from Thomas Bayes to Karl Pearson</i> ▪ Hald, A. (1990). <i>A history of probability and statistics and their applications before 1750</i> ▪ Hald, A. (2007). <i>A history of parametric statistical inference from Bernoulli to Fisher, 1713–1935</i> ▪ Todhunter, I. (1865). <i>A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace</i>
Terciaria	▪ Daston, L. (1988). <i>Classical Probability in the Enlightenment</i> ▪ Gorroochurn, P. (2012). <i>Classic Problems of Probability</i> ▪ Hacking, I. (2006). <i>The emergence of probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference</i>

Cuadro 2 – Fuentes de consulta para la historización sobre la inferencia bayesiana
Fuente: elaboración propia

4.3 Acercamiento al texto de análisis

El pre-análisis consistió en un acercamiento al texto de Bayes (1763) a partir de las fuentes de consulta. Esta fase implicó una serie de pasos como la lectura minuciosa del texto acompañada de las interpretaciones realizadas sobre el documento, la identificación de nociones transversales y nodales para comprender el contenido matemático-estocástico del texto, la elección de posibles extractos o secciones de texto que ayudaran a responder la pregunta. En consecuencia, se reconoció la estructura del texto y su propósito, el tipo de lenguaje para referir a la probabilidad, las nociones estocásticas implicadas, entre otros.

Alguno de los aspectos que resultaron importantes para entender el contenido del texto fueron: 1) la concepción de Huygens sobre la esperanza o *expectatio* debido a la definición de probabilidad bajo esta filosofía; 2) la interpretación y presentación de la medida de probabilidad como una razón en un significado de apuestas.

5 Historización de la estadística bayesiana en su génesis

El análisis del texto de Bayes –historización– está permeado por dos análisis, uno contextual y otro textual. El primero nos permite situar los factores sociales, culturales y matemáticos que permean la constitución del texto y, el segundo, refiere a la caracterización de la actividad estocástica en términos de prácticas que subyacen de los problemas bayesianos.

5.1 Contexto de significación de la estadística bayesiana

El contexto de significación estará guiado por las siguientes preguntas: *¿qué sucesos característicos del siglo XVII-XVIII rodean el trabajo de Bayes de 1763?, ¿cuáles fueron las contribuciones pioneras en relación con la inferencia inductiva?, ¿qué características presentan los problemas bayesianos y qué actividad estocástica promueven?* De forma respectiva cada pregunta permite describir un nivel de la estratificación del contexto –cultural, situacional, de la situación específica–.

5.1.1 La estadística bayesiana en el siglo XVII-XVIII

El *contexto cultural* se enmarca por eventos o sucesos que de manera general conforman paradigmas y dan paso a fenómenos específicos. En este caso, se destacan algunos eventos socioculturales relativos a la génesis de la inferencia inductiva o bayesiana que abren camino al problema de la relación entre probabilidad e inducción y culmina en el surgimiento del método bayesiano.

La génesis de la inferencia bayesiana puede ubicarse en la Ilustración temprana, período que genera un movimiento hacia la comprensión del mundo –conocimiento humano– a través del pensamiento racional en lugar de las creencias religiosas. Algunos sucesos por destacar de esta etapa son: 1) las luchas religiosas entre miembros de la iglesia establecida en Inglaterra y los disidentes o inconformistas de la cual la familia de Bayes era partidaria (Bellhouse, 2004); 2) Newton como una de las principales figuras quién sienta las bases del método científico apoyado en la experimentación y la construcción de hipótesis; 3) el desarrollo de la doctrina filosófica del empirismo promovida por Locke y Hume; 4) la constitución del llamado problema de la inducción como un rechazo a la inferencia inductiva (Gutiérrez Cabria, 1982).

En relación con lo anterior, en los siglos XVII y XVIII, la influencia del pensamiento religioso se mantuvo en muchos científicos como Blaise Pascal, John Wilkins y John Arbuthnot quienes utilizaron las matemáticas para explicar las leyes del mundo natural como argumento de un orden divino. En este sentido, por ejemplo, la concepción inglesa de probabilidad estaba guiada por la filosofía de Newton, que interpretaba la estabilidad implicada en los teoremas límite como evidencia del designio divino (Hacking, 2006). Esta relación de la probabilidad con la divinidad también puede reconocerse en textos como *La lógica* y *La apuesta de Pascal*.

Por otra parte, encontrar formas de probar el razonamiento inductivo es un tema que

deviene desde Aristóteles, sin embargo, fue el filósofo Hume, quien planteó el problema de la inducción derivado de la incompatibilidad entre el principio del empirismo (todas las teorías científicas –conocimiento general– debieran obtenerse a partir de la observación y el experimento) y la invalidez de la inducción (las conclusiones obtenidas a partir de las observaciones mediante inducción no tienen validez lógica) (Gutiérrez Cabria, 1982). Dicho problema se caracteriza por la idea de que no se puede utilizar la experiencia pasada para predecir el futuro o, en otras palabras, el problema de determinar la causa o hipótesis a partir de las observaciones (Glass; Hall, 2008; Hacking, 2006).

Aunque la resolución del problema de la inducción tomó distintas orientaciones filosóficas, la incorporación del concepto de probabilidad permitió determinar la *verdad probable* contra la ausencia de garantizar la certeza de la conclusión; este proceso derivó en el surgimiento de la inferencia inductiva. Este asunto se describirá en el contexto situacional a través de los primeros acercamientos al problema de la inducción desde una mirada probabilística.

5.1.2 El problema de la inferencia estadística binomial

El *contexto situacional* se conforma por las raíces del problema filosófico de la probabilidad inductiva a través de algunos probabilistas del siglo XVII y XVIII, a saber, Jakob Bernoulli, Abraham de Moivre y Thomas Bayes (Hald, 2007; Landro; González, 2012). Su atención fue el desarrollo de métodos que permitieran realizar inferencias a partir de las observaciones; en el caso de los primeros dos por intentar inferir probabilidades a partir de las frecuencias y, el tercero, por construir un primer método (Rivadulla, 1996).

De acuerdo con Stigler (1986), a finales del siglo XVII, las probabilidades se usaban para analizar juegos de azar y se centraban fuertemente en los cálculos *a priori*. Esto refiere a la resolución de problemas tipo: dada una urna que contiene r bolas rojas y s bolas negras, se calcula que la probabilidad de que salga una bola roja es $r/(r + s)$; sin embargo, no se había abordado la cuestión *a posteriori* de determinar r y s a partir de las observaciones de los resultados del juego.

Aunque en la época en que se publicó el trabajo de Bernoulli, el problema de la inducción aún no se había planteado como un problema central de la filosofía (Hacking, 2006), resulta un primer acercamiento para tratar el esquema inverso. En la cuarta parte del *Ars Conjectandi*, Bernoulli expone el razonamiento de que la frecuencia relativa de un evento determinada a partir de observaciones tomadas bajo las mismas circunstancias se vuelve cada

vez más estable con el número creciente de observaciones. Si el modelo que se ajusta a las observaciones es una distribución binomial, se cuestiona si la frecuencia relativa de este modelo tiene las mismas propiedades que la frecuencia relativa empírica? Esto Bernoulli lo demuestra y deriva en lo que se conoce como la *Ley de los grandes números* para variables binomiales (Stigler, 1986; Hald, 1990).

Como ejemplo de esta ley, en el *Ars Conjectandi* se menciona que para una urna que contiene 30 fichas de un tipo y 20 de otra (desconocido para el observador), se necesitarían como mínimo 25550 observaciones del juego para asegurar que $p(29/50 \leq X/25550 \leq 31/50) > 1000/1001$ (Figura 2). En otras palabras, se infiere que, si se toman $n(\theta, \varepsilon, t)$ número de observaciones, será más de t veces más probable que la relación entre el número de éxitos observados y el número de todas las observaciones ($Y_n = X_n/n$) caiga en el intervalo $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ que afuera de este (Gorroochurn, 2012); con ello se puede afirmar que Y_n tiende en probabilidad a θ y así determinar la proporción desconocida de fichas (véase Bernoulli, 1713/2006).

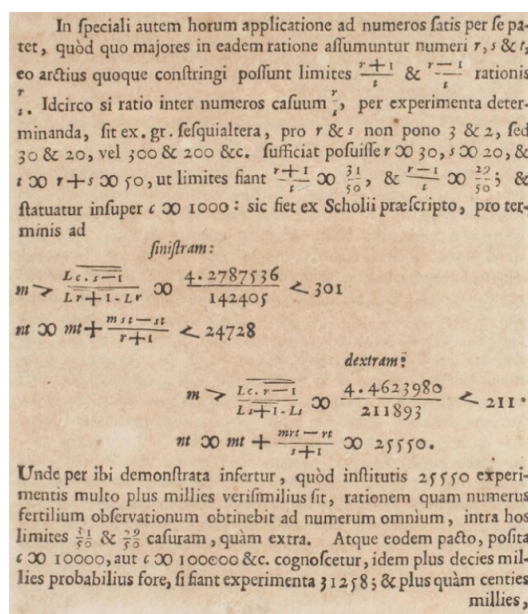


Figura 2 – Ejemplo de la ley de los grandes números de Bernoulli
Fuente: Bernoulli (1713, p. 238)

A partir de este razonamiento, Bernoulli intentó hacer una formulación inversa del teorema de la siguiente forma: si se observa que la frecuencia relativa “converge a un valor determinado θ ”, entonces este valor definirá la *ley* que gobierna a dicho evento (Landro; González, 2012). No obstante, el planteamiento resultaba circular, lo que no permitió construir un aparato matemático riguroso para una teoría de la inferencia inductiva. Otro aspecto que resultó una limitación fue el tamaño de la muestra, puesto que para la época el número de observaciones era demasiado grande.

Una segunda aproximación a la resolución del problema se sitúa en el texto *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a + b)^n$ in Seriem expansi* cuyo contenido luego aparece en *Miscellanea Analytica* y en la edición de 1738 de *The Doctrine of Chances*. Continuando el trabajo de Bernoulli sobre la ley de los grandes números, de Moivre obtiene una nueva aproximación a la distribución binomial que permite reducir el número de observaciones requeridas para poder afirmar que la frecuencia relativa $Y_n = X_n/n$ está contenida en un intervalo dado alrededor del verdadero valor de θ con un cierto grado de confiabilidad.

El resultado de la aproximación de la distribución binomial por la normal es producto de un problema de juego planteado por Alexander Cuming años anteriores (Figura 3) y en la cual de Moivre demuestra que el valor de la expectativa buscada es $2n\theta(1 - \theta) \binom{n}{n\theta} \theta^{n\theta} (1 - \theta)^{n(1-\theta)}$.

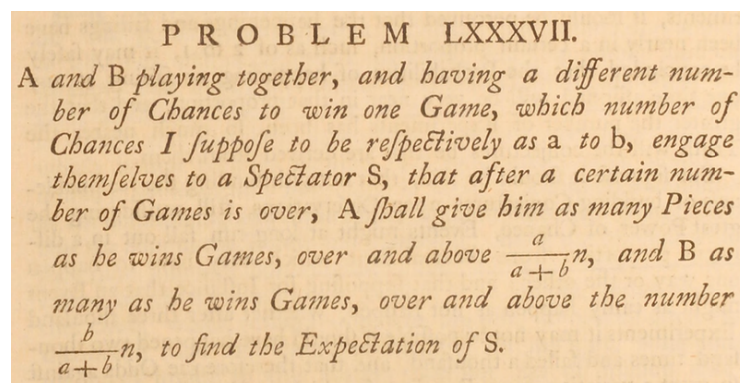


Figura 3 – Problema 87 del texto de de Moivre
Fuente: de Moivre (1738, p. 233)

Una reinterpretación de este resultado en términos de ganancia media por ensayo lleva a de Moivre a entenderla como una medida de la dispersión de la variable aleatoria Y_n alrededor del valor verdadero de θ , es decir, permitió determinar la probabilidad de que la variable Y_n asuma valores comprendidos en un intervalo dado (véase Diaconis; Zabell, 1991). Por lo tanto, considerando esta interpretación y las características de la distribución asociada, de Moivre sostiene que Y_n converge en probabilidad a θ y así puede hacer afirmaciones sobre el valor de la probabilidad (Hald, 2007).

Pese a que de Moivre tampoco logró formular un método para determinar un intervalo de confiabilidad para θ en función de n y Y_n , una de sus contribuciones fue lograr una cuantificación más precisa del aumento de la confiabilidad ante un incremento de las observaciones.

Una tercera mirada sobre el tema procede del *An Essay towards Solving a Problem in The Doctrine of Chances*, en el cual Bayes propone una solución al problema de la inversión

de la probabilidad. Esta surge del interés por determinar la probabilidad de un suceso desconocido a partir del conocimiento del número de éxitos y fracasos en n observaciones del suceso. Lo anterior se transformó en el problema que se presenta en la Figura 4.

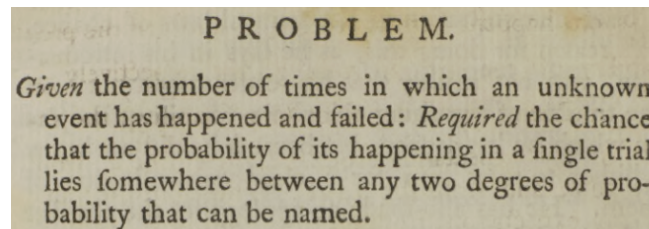


Figura 4 – Problema bayesiano en el texto de Bayes
Fuente: Bayes (1763, p. 376)

Para resolver esto, Bayes propone un mecanismo de juego que simula un modelo binomial y mediante argumentos geométricos, construye una regla, para medir la certeza de las conclusiones a las que se puede llegar para cualquier decisión. Esta fue la primera solución al problema para el caso de un modelo binomial, posteriores trabajos como los de Laplace, Jeffreys y de Finetti proporcionaron una generalización del método considerando otras distribuciones y haciendo uso de esta más allá de los juegos de azar.

De acuerdo con Landro y González (2012), el fracaso de Bernoulli y de Moivre en el problema de inversión de probabilidad se debe fundamentalmente a la imposibilidad de tratar a θ como una variable aleatoria en el marco de la filosofía newtoniana; θ solo podía ser concebida como una constante y la frecuencia relativa como variable aleatoria. A continuación, en el contexto de la situación específica se profundiza en la naturaleza del problema bayesiano y su solución.

5.1.3 La inversión de la probabilidad en el texto de Bayes

El *contexto de la situación específica* se define por los componentes específicos del texto objeto de análisis que permiten describir la naturaleza y características de los problemas bayesianos.

De acuerdo con Stigler (2013), el trabajo póstumo de Bayes pretendió ser una herramienta defensiva en el siglo XVIII para combatir las afirmaciones de Hume desde una perspectiva de la probabilidad. Asimismo, dada la filosofía que permeaba en la época, el trabajo de Bayes también planteó implicaciones teológicas.

En específico, *An Essay towards Solving a Problem in The Doctrine of Chances* es el texto en el cual se reconoce la primera solución al problema de la inversión de la probabilidad. Esta consta de cuatro partes: 1) Introducción o carta preliminar en la cual se encuentra el

planteamiento del problema y el propósito del texto; 2) Primera sección que presenta teoría base, es decir, definiciones y proposiciones específicas; 3) Segunda sección en la que se construye el método solución al problema planteado; 4) Apéndice en el cual se ilustran tres aplicaciones del método en situaciones específicas. Hay que destacar que la publicación del *Essay* fue debido a Richard Price y algunas partes del texto fueron incorporaciones de él.

En la carta preliminar, el problema por resolver se expone explícitamente (Figura 4) y este puede reinterpretarse como: si se sabe que en n pruebas un suceso se ha observado p veces, ¿qué se puede decir de la probabilidad del suceso? Además, se enfatiza que la necesidad de resolver el problema es la de construir un método para tener un fundamento matemático que sustente nuestros razonamientos relativos a los hechos pasados que verosíblemente pueden volver a ocurrir; y que cuanto mayor sea el número de observaciones que se tenga para apoyar una conclusión, mayor razón habrá para aceptar esta.

La solución de Bayes se ubica en la sección dos del *Essay*, esta se desarrolla a través de un modelo físico que consta de una mesa plana y cuadrada, sobre la que se lanzan bolas sin apuntar y la medida de probabilidad está en relación con las propiedades geométricas del modelo (Figura 5). El modelo asociado con el postulado doble es una analogía en un contexto geométrico de un experimento de Bernoulli; y la consideración de que el punto donde la primera bola ha de detenerse está uniformemente distribuido en el cuadrado $ABCD$, esto sugiere asumir uniformidad sobre los valores que puede tomar la variable aleatoria θ , que representa la probabilidad del evento o suceso desconocido.

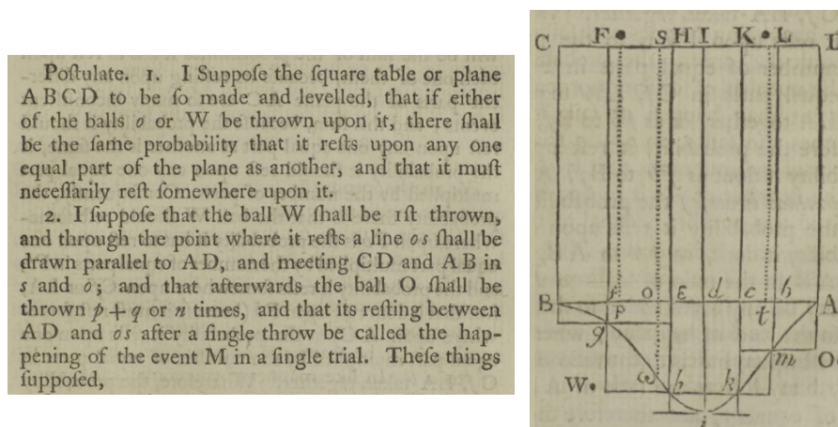


Figura 5 – Construcción geométrica asociado al postulado I
Fuente: Bayes (1763, p. 385)

Luego del postulado siguen una serie de proposiciones en las que se establecen procesos preliminares a la solución del problema, la solución y una generalización. En la proposición 8 se determina la probabilidad conjunta de las variables θ y $Y_n = \frac{x}{n}$, y en el corolario consecuente se obtiene la distribución marginal de Y_n ; la proposición 9 contiene la regla para determinar la

probabilidad buscada al problema; la proposición 10 plantea una generalización del resultado a partir de una analogía entre el mecanismo físico y el comportamiento que manifiestan para el observador ciertos fenómenos de la naturaleza y 3 reglas para aproximar el área bajo la curva de la distribución (Landro; González, 2012).

De acuerdo con el experimento y la construcción geométrica, Bayes está interesado en estimar cierta área del cuadrado unitario $ABCD$ (Figura 5) –denominado evento M –, y medir en términos probabilísticos sobre la veracidad de dicha estimación conjeturada sobre el área. Esto queda manifestado en la proposición 9, que en notación actual representa una razón de dos áreas (véase Dale, 1999):

$$P\left(\frac{Ab}{AB} < \theta < \frac{Af}{AB} \mid Y_n = x\right) = \frac{\int_b^f \binom{n}{\theta} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} d\theta}{\int_A^B \binom{n}{\theta} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} d\theta}$$

En cuanto a esta interpretación, hay que acentuar que los problemas históricos que se identifican sobre la inferencia bayesiana desde las etapas preliminares hasta el surgimiento de la primera solución tienen que ver con la estimación. De hecho, la estimación se conecta con la inferencia inductiva puesto que el problema consiste en establecer una conjetura sobre un valor aproximado de un parámetro –probabilidad o proporción desconocida–, a partir de los resultados observados del experimento en la muestra.

En conclusión, el método construido en el texto de Bayes permitió “determinar ‘en qué grado’ las observaciones confirman una conjetura dada y así medir ‘la fuerza del razonamiento analógico o inductivo’” (Daston, 1988, p. 256, destacado en el original), es decir, determinar la probabilidad de tener razón. Además, dos aspectos que dieron paso al tránsito de probabilidades directas a probabilidades inversas fue la consideración del parámetro θ como una variable aleatoria y suponer equiprobabilidad para todos sus valores posibles, reflejado en una distribución uniforme sobre la probabilidad a priori; sin embargo, el método expuesto por Bayes se limitó solo al caso de la distribución binomial.

5.2 Actividad estocástica asociada a la estadística bayesiana

El análisis de la actividad estocástica se realizó a partir de la producción escrita de los problemas en el texto de Bayes (1763) desde el cual se reconstruyeron las formas de hacer y/o decir –acciones– del sujeto. Cabe señalar que se decidió centrar la atención en la última sección del texto matemático, ya que muestra el uso del método construido por Bayes –proposición 10 y versión del teorema de Bayes– en tres situaciones específicas. A modo de ejemplo, se ilustra el análisis retomando la aplicación o problema III.

Derivado de la familiarización con la estructura discursiva de los problemas y el contexto que enmarca cada una, se identificaron secciones o bloques de escritura que comparten afinidades a los cuales se les denominó *Caso* (Figura 6). Además, dependiendo del rol que tienen los casos, el análisis se organizó por momentos. Para el problema III, al análisis de la actividad estocástica se realizó en tres momentos: 1) Análisis de *un caso* (por ejemplo, caso I); 2) Análisis *entre casos* (por ejemplo, del caso I al caso II); 3) Análisis global de *todos los casos* (del caso I al caso VI).



Figura 6 – Aplicación III en el texto de Bayes (1763, pp. 411-418)

Fuente: Paredes-Cancino (2024)

Para el análisis textual, el primer paso fue destacar ciertos fragmentos de texto mediante un etiquetado de números en corchete y su interpretación en notas al pie como parte de la reconstrucción de la actividad estocástica; el segundo paso, fue la identificación de prácticas estocásticas a través de preguntas analíticas. Para reconocer las acciones se plantean las preguntas *¿qué y cómo lo hizo?* y a fin de caracterizar la actividad se emplea la interrogante *¿para qué lo hizo?* La práctica socialmente compartida se postula (*¿por qué lo hizo?*) como el resultado de la reconstrucción pragmática –acciones y actividades– y la descripción del contexto de significación. La Figura 7 es un ejemplo de la primera parte del análisis correspondiente al momento uno del problema III.

MOMENTO 1

[Imaginemos una persona presente en el sorteo de una lotería, que no sabe nada del esquema que se emplea ni de la proporción entre el número de blancos y el de premios en ella] [18]. Supongamos, además, [que está obligado a inferir ésta a partir del número de blancos que escucha en comparación con el número de premios; y nos preguntamos a qué conclusiones podemos llegar razonablemente en tales circunstancias] [19].

CASO I

Supongamos, primero, que escucha que [se han extraído diez blancos y un premio] [20], y nos preguntamos qué probabilidad tendrá de acertar [si conjetura que la proporción entre blancos y premios está comprendida entre las proporciones de 9 a 1 y de 11 a 1] [21].

[Tomando aquí $X = \frac{11}{12}$, $x = \frac{9}{10}$, $p = 10$, $q = 1$, $n = 11$, $E = 11$, la probabilidad requerida, según la primera regla] [22], es $[(n + 1)E]$ multiplicado por la diferencia entre

$$\left\{ \frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} \right\} y \left\{ \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} \right\}$$

$$= 12 \cdot 11 \cdot \left\{ \left[\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{11}}{11} \right] - \left[\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{12}}{12} \right] - \left[\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{11} \right] + \left[\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{12}}{12} \right] \right\}$$

$$= 0.07699 \text{ etc} [23].$$

Habría, por tanto, [unas apuestas de alrededor de 923 a 76, o casi 12 a 1, en contra de que haya acertado] [24]. Si hubiese conjeturado solo, en general, que hay menos de 9 blancos por premio, habría habido una probabilidad de que estuviese en lo cierto de 0.6589 o unas apuestas de 65 a 34.

[18] Este problema en comparación con los dos previos difiere en cuanto a la naturaleza de las observaciones, puesto que contempla resultados de éxito y fracaso del suceso (extracción de un boleto en el sorteo). En la aplicación III, el parámetro desconocido es la proporción entre boletos en blanco y boletos con premio o la probabilidad de extraer un boleto en blanco. Como se ha destacado en cada problema, de inicio hay una suposición de equiprobabilidad sobre los valores que puede tomar el parámetro, en este caso, equivalente a la postulación de una distribución uniforme para la probabilidad de extraer un boleto en blanco.

[19] Esta pregunta puede traducirse como determinar el grado de aprobación o certeza de una conjetura sobre la probabilidad del suceso M en relación con las observaciones y el supuesto inicial de equiprobabilidad sobre el parámetro. De modo que con la medida de probabilidad más probable se estime la proporción desconocida de los boletos en blanco y con premio.

[20] La información refiere a datos observados en relación con el suceso de interés. Estos pueden interpretarse en términos de éxito y fracaso y deben provenir de la realización del experimento –sacar un boleto del sorteo de lotería– un número determinado de veces. La organización de los resultados posibilita el conocimiento de la frecuencia de aparición de un resultado éxito o fracaso y con ello, generar el modelo binomial $y = x^{10}(1-x)^1$ que lo modela.

[21] Se establece una conjetura, en tanto, el sujeto en cuestión postula un intervalo de valores donde considera que es probable que se encuentre el verdadero valor de la probabilidad de extraer un boleto en blanco del sorteo. Esta información se tiene en cuenta al momento de cuantificar la incertidumbre sobre el parámetro desconocido.

[22] La distinta información permite construir el modelo a posteriori considerando la proposición 10, la cual en término actuales puede

ser representado como $\frac{\int_{\frac{9}{10}}^{\frac{11}{12}} \frac{11}{10} x^{10}(1-x)^1 dx}{\int_{\frac{9}{10}}^{\frac{11}{12}} x^{10}(1-x)^1 dx} = 132 \int_{\frac{9}{10}}^{\frac{11}{12}} x^{10}(1-x)^1 dx$ producto de los modelos sobre la conjetura (distribución uniforme) y el basado en datos (distribución binomial).

[23] Cuantificación del área bajo la curva para una región de valores específico, es decir, el intervalo conjeturado. Para ello se recurre a la regla 1 que permite aproximar el área debajo de $y = x^{10}(1-x)^1$ entre $\frac{9}{10}$ y $\frac{11}{12}$.

[24] La interpretación de la probabilidad en términos de apuestas o *odds* refiere a la relación de la probabilidad de que el evento ocurra y la probabilidad de que el evento no ocurra. En este caso, que las apuestas estén 923 a 76, o casi 12 a 1, alude en otros términos que la probabilidad condicional sea $\frac{76}{923+76} = \frac{76}{999} = 0.076$.

Figura 7 – Ejemplo de análisis del Momento 1 del problema III

Fuente: Paredes-Cancino (2024, pp. 21-22)

En cuanto a la identificación y organización de prácticas, la Figura 8 presenta las *acciones* del sujeto como una secuencia temporal procedente de la producción escrita del problema. A partir de estas se definió la práctica de nivel *actividad de medir la incertidumbre sobre el parámetro desconocido e interpretar la medida*, la cual representa parte de la dinámica de lo que hizo el sujeto –acciones– en el marco del problema.

Actividad				
¿Para qué lo hizo?	Medir la incertidumbre sobre la proporción entre boletos en blanco y con premio e interpretar dicha medida [19] [24]			
Acciones				
¿Qué hizo?	1. Estableció una conjetura sobre la composición de los boletos o la probabilidad de extraer un boleto en blanco	2. Construyó un modelo estadístico del tipo $y = x^p(1 - x)^q$ con referencia en datos	3. Generó un modelo de probabilidad a posteriori	4. Determinó el área bajo la curva del modelo a posteriori
¿Cómo lo hizo?	Proponiendo que la variable aleatoria probabilidad del suceso se distribuye uniformemente [18]	Recolectando una muestra de once datos sobre la situación del sorteo y organizando las observaciones [20]	Utilizando la proposición 10 que combina el modelo de la conjetura y el de los datos [21] [22]	Empleando la regla 1 de la proposición 10 para un intervalo específico [21] [23]

Figura 8 – Organización de prácticas estocásticas asociadas al Momento 1
Fuente: Paredes-Cancino (2024, p. 23)

En suma, derivado del análisis de los tres problemas (véase Paredes-Cancino, 2024) se identificaron diferentes *acciones* cuyas dinámicas en función de las circunstancias de cada problema permitieron caracterizar tres *actividades* (Figura 9).

☐ Actividad 1: Medir la incertidumbre sobre el parámetro desconocido e interpretar dicha medida. - Acción 1: <i>Estableció una distribución de probabilidad inicial</i> sobre la proporción de los boletos o la probabilidad de extraer un boleto en blanco. - Acción 2: <i>Construyó un modelo estadístico</i> $y = x^p(1-x)^q$ que se ajuste a los datos observados. - Acción 3: <i>Generó un modelo de probabilidad a posteriori</i>. - Acción 4: <i>Determinó el área</i> bajo la curva del modelo a posteriori para un intervalo específico.
☐ Actividad 2: Actualizar la medida de la incertidumbre sobre el parámetro e interpretar dicha medida. - Acción 5: <i>Recolectó una nueva muestra de datos</i>. - Acción 6: <i>Midió la probabilidad</i> $P(a < x < b p, q)$ para un intervalo específico.
☐ Actividad 3: Identificar un patrón o tendencia en el comportamiento de las medidas de probabilidad. - Acción 7: <i>Comparó medidas de probabilidad condicional</i>. - Acción 8: <i>Analizó la serie de medidas de probabilidad condicional</i>.

Figura 9 – Prácticas identificadas en los problemas bayesianos
Fuente: Paredes-Cancino (2024, pp. 33-34)

6 Resultados

La historización se realizó a través de dos fases: un análisis contextual y otro textual. A su vez, el primer análisis se llevó a cabo con una descripción estratificada del contexto de significación asociada a la inferencia bayesiana en su génesis y con ello se reconocieron elementos sociales y culturales que permearon su emergencia. El segundo análisis, se centró en caracterizar la actividad estocástica, lo que permitió identificar una organización pragmática de

prácticas estocásticas vinculadas con el conocimiento bayesiano.

6.1 Contexto de significación

Respecto del contexto de producción del conocimiento bayesiano en su génesis, se ubica el *contexto cultural* en el siglo XVII en una época de deterioro de las creencias religiosas como criterio en la construcción de conocimiento hacia el uso de la razón. En este entorno, de forma particular, se destaca el *problema de la inducción* de Hume como el desencadenante que da lugar a una teoría de la inferencia inductiva aplicable a “sucesiones de eventos para los que la consideración de la experiencia adquirida a partir de su observación repetida se transformaba en formas de expectativa acerca de su comportamiento futuro” (Landro; González, 2012, p. 46).

Los intentos de cuantificación respecto de la teorización de la inferencia inductiva pasaron por el progreso de la naturaleza de los problemas de probabilidad: análisis de situaciones simétricas, luego situaciones asimétricas y de probabilidad conocida y, finalizando, en *situaciones de probabilidad desconocida*; la mayoría de estos problemas encuadrados en *juegos de azar* que, posteriormente, se estudiaron en otros escenarios. El desarrollo de la probabilidad y el tránsito por diferentes tipos de problemas dejó ver la relevancia de la renovación del método de análisis probabilístico, lo cual derivó en la creación de un nuevo paradigma: *el análisis de la inversión de la probabilidad*; dicho análisis era un tránsito de razonar a partir de las causas a los efectos a razonar a partir *de los efectos a las causas* (Daston, 1988; Gorroochurn, 2012), es decir, una inversión de los análisis de probabilidad de Bernoulli y de Moivre. Lo anterior constituye el *contexto situacional*.

Por último, el *contexto de la situación específica* se caracteriza por los *problemas bayesianos* en el texto de Bayes que dieron origen al método solución del problema de la inversión de la probabilidad. Los problemas bayesianos identificados son de *estimación de parámetro desconocido* –probabilidad o proporción–. El objetivo principal de Bayes fue construir una herramienta matemática que permitiera partir de ciertas observaciones para el *estudio de la probabilidad del suceso* y para ello se necesitaba de una conjetura sobre la probabilidad desconocida o probabilidad de las causas como punto de partida. En particular, la consideración de θ como *variable aleatoria* y el *supuesto de equiprobabilidad* relacionado con la postulación de θ con una distribución de probabilidades *a priori* conocida, a saber, una distribución uniforme, fueron parte de los elementos que permitieron el éxito del acercamiento de Bayes para el caso de la distribución binomial.

Derivado del análisis contextual postulamos la siguiente hipótesis: *tareas en el contexto*

de estimación de un parámetro desconocido pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar y utilizar nociones intuitivas de inferencia bayesiana.

6.2 Actividad estocástica

En relación con el contexto de significación que enmarca la inferencia bayesiana y, en particular, del contexto de la situación específica –estimación de parámetro–, es que la actividad estocástica se centra en determinar en qué grado la observación confirma una conjetura dada sobre una proporción desconocida o probabilidad (parámetro), es decir, ¿cuál es la probabilidad de que nuestra conjetura sea veraz? Y con ello, determinar lo más probable al respecto del verdadero valor de θ .

Lo anterior se ve de manifiesto en la dinámica de prácticas estocásticas que implican los problemas bayesianos en situaciones binomiales (Figura 9), desde postular una distribución uniforme como modelo *a priori* sobre el parámetro desconocido hasta establecer una generalización probabilística sobre el suceso de interés, mediante el análisis de muestras de distintos tamaños y la revisión del modelo de probabilidad *a posteriori* para reconocer una tendencia.

Por lo tanto, esta dinámica de *acciones y actividades* propias de tareas en el contexto de la estimación en situaciones binomiales proponemos nombrarla la *práctica socialmente compartida de realizar inferencias bayesianas sobre el parámetro desconocido*, en particular, sobre una proporción.

En suma, producto del análisis contextual y en complemento con el análisis textual, ampliamos nuestra hipótesis: *tareas en el contexto de estimación de un parámetro desconocido pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar y utilizar nociones intuitivas de inferencia bayesiana. Además, estas tareas precisan que hagan transitar a los estudiantes por tres momentos con el fin de estimar el “valor verdadero” de la proporción desconocida: 1) Generar un modelo de probabilidad a posteriori sobre el suceso mediante dos fuentes de información (modelo personal sobre la incertidumbre de un suceso y modelo estadístico sobre las observaciones del suceso); 2) Actualizar el modelo de probabilidad a posterior a partir de la consideración de nueva evidencia, por ejemplo, mediante nuevas muestras de datos; 3) Buscar un patrón en las medidas de probabilidad del suceso desconocido en el modelo de probabilidad a posterior para establecer una generalización.*

Esta hipótesis epistemológica sobre la inferencia bayesiana, en términos de la perspectiva teórica, se traduce en el modelo epistemológico del Cuadro 3, el cual muestra la

dinámica y evolución de la actividad estocástica.

Acción	Actividad	Práctica Socialmente Compartida
1. Establece una distribución de probabilidad <i>a priori</i> sobre el parámetro desconocido θ 2. Construye un modelo estadístico binomial que se ajuste a los datos del muestreo 3. Genera el modelo de distribución de probabilidad <i>a posteriori</i> 4. Determina el área bajo la curva del modelo <i>a posteriori</i> en un intervalo específico ($a < \theta < b$)	Medir la incertidumbre sobre el parámetro desconocido e interpretar dicha medida	Estimar el “valor verdadero” del parámetro desconocido θ
1. Recolecta distintas muestras de datos 2. Mide la probabilidad $P(a < \theta < b \mid p, q)$ para un intervalo específico en distintas muestras	Actualizar la medida de la incertidumbre sobre el parámetro e interpretar dicha medida.	
1. Compara dos medidas de probabilidad $P(a < \theta < b \mid p, q)$ 2. Analiza la serie de medidas de probabilidad $P(a < \theta < b \mid p, q)$	Identificar un patrón o tendencia en el comportamiento de las medidas de probabilidad condicional	

Cuadro 3 – Modelo epistemológico sobre problemas bayesianos en el contexto de la estimación
 Fuente: elaboración propia

7 Conclusiones

Este trabajo busca contribuir desde la línea de historia y epistemología de las matemáticas a la didáctica de la educación estadística, en particular, sobre la estadística bayesiana. Al respecto de la pregunta de investigación, se identificó que la actividad estocástica que movilizan los problemas en la génesis de la inferencia bayesiana está enmarcada en un contexto de estimación de parámetros desconocidos, en específico, una proporción en situaciones binomiales. Además, uno de los aspectos clave de la naturaleza de estos problemas es la consideración del parámetro θ como una variable aleatoria y la postulación de una distribución de probabilidad *a priori* sobre esta, la cual permea en las formas de hacer estocástico del individuo.

El análisis y caracterización de la actividad estocástica de los problemas bayesianos derivó en un modelo epistemológico fundamentado en prácticas estocásticas (Cuadro 3), cuyo emergente social es la *práctica socialmente compartida* de realizar inferencias sobre una proporción desconocida o la estimación del verdadero valor del parámetro. Ésta involucra prácticas del nivel *acción* como el establecimiento de conjeturas sobre el parámetro, la

recolección de muestras de datos, la construcción de un modelo de datos, entre otros; que se organizan en tres *actividades*, a saber, medir la incertidumbre sobre el parámetro, actualizar la medida de probabilidad de la conjetura en relación con la muestra e identificar un patrón en el comportamiento de las medidas de probabilidad.

Cabe destacar que la práctica estocástica de *postular un modelo de distribución inicial sobre el parámetro* es uno de los elementos epistémicos característico de la inferencia bayesiana y que la diferencia de la perspectiva clásica. Esta práctica, en otros términos, reconocemos es aludida en los estudios de corte histórico de Batanero (2005), Borovcnik y Kapadia (2014) y Carranza (2009). A diferencia de estas investigaciones, el presente estudio da cuenta de cómo esta práctica y otras identificadas son parte de las dinámicas de hacer y su organización –acción, actividad y práctica socialmente compartida– en el marco de la actividad estocástica de los problemas bayesianos de estimación en situaciones binomiales. También, el presente consideramos que puntualiza en la naturaleza del contexto de los problemas en la génesis de la inferencia bayesiana; de este modo, la *estimación* puede ser un buen punto de partida para la enseñanza escolar de esta noción.

En correspondencia con el paradigma de la inferencia estadística informal y las características que sustentan el tipo de razonamiento inferencial (Makar; Rubin, 2009; Zieffler *et al.*, 2008), desde la mirada bayesiana planteamos que el razonamiento conlleva que la característica de usar datos como evidencia sea complementada con una nueva característica, esto es, la postulación de un modelo a priori de distribución de probabilidad sobre el parámetro que represente el estado de conocimiento del sujeto sobre la situación.

El modelo basado en prácticas es un referente para enriquecer la enseñanza de la inferencia tomando en cuenta ideas sustentadas en la epistemología, asimismo, puntualiza en las acciones por promover en los individuos en el marco de la actividad estocástica; en consecuencia, el modelo propuesto ayuda a desarrollar una forma de pensar y actuar más allá de los datos desde una perspectiva bayesiana. De igual modo, este modelo va en consonancia con la propuesta de Eichler y Vogel (2014), así podría considerarse dentro de una perspectiva de modelación de la probabilidad.

Finalmente, dada la naturaleza de las prácticas y la actividad estocástica, se considera que se tienen las características *ad hoc* para la construcción de *tareas orientadas a conceptos*, que promuevan un significado de la probabilidad bayesiana como grado de creencia (Rivadulla, 1995). Con ello ampliar el tipo de tareas y significados que predominan en el escenario escolar (véase Carranza, 2014; Paredes-Cancino y Montiel-Espinosa, en revisión).

Teniendo en cuenta este panorama y como prospectiva del estudio, resulta importante

poner a prueba el modelo epistemológico de referencia a partir de la construcción de tareas y su implementación para robustecerlo con base en la evidencia empírica.

Referencias

- AINLEY, J.; PRATT, D. Introducing a special issue on constructing meanings from data. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 45, n. 1, p. 1-8, mar. 2001. Disponible en: <https://doi.org/10.1023/A:1013882709661>. Acceso en: 18 ago. 2023.
- ANACONA, M. La historia de las matemáticas en la educación matemática. **Revista EMA**, Bogotá, v. 8, n. 1, p. 30-46, mar. 2003. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1516/1/94_Anacona2003La_RevEMA.pdf. Acceso en: 15 mar. 2022.
- BARBIN, É.; GUILLEMETTE, D.; TZANAKIS, C. History of Mathematics and Education. In: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. 2. ed. Cham: Springer, 2020. p. 333-342. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69. Acceso en: 15 abr. 2023.
- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 3, p. 247-263, nov. 2005. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302>. Acceso en: 9 feb. 2020.
- BATANERO, C.; ÁLVAREZ-ARROYO, R. Teaching and learning of probability. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 56, [s.n.], p. 1-14, ago. 2023. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5>. Acceso en: 6 nov. 2023.
- BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The Nature of Chance and Probability. In: JONES, G. A. (ed.). **Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning**. Boston: Springer, 2005. p. 15-37. Disponible en: https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2. Acceso en: 12 feb. 2023.
- BAYES, T. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. **Royal Society**, London, v. 53, [s.n.], p. 370-418, 1763. Disponible en: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1763.0053>. Acceso en: 20 may. 2016.
- BELLHOUSE, D. R. The Reverend Thomas Bayes, FRS: A Biography to Celebrate the Tercentenary of His Birth. **Statistical Science**, Durham, v. 19, n. 1, p. 3-43, feb. 2004. Disponible en: <https://doi.org/10.1214/088342304000000189>. Acceso en: 12 ago. 2023.
- BERNOULLI, J. **Ars Conjectandi**. Basilea: Impensis Thurnisiorum, 1713. Disponible en: <https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/en/item/rb00028894>. Acceso en: 12 ago. 2023.
- BERNOULLI, J. **The art of conjecturing**. Translated by Dudley Sylla, E. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2006.
- BOROVCHNIK, M. Multiple Perspectives on the Concept of Conditional Probability. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.v.], n. 2, p. 5-27, nov. 2012. Disponible en: <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32>. Acceso en: 4 jun. 2023.
- BOROVCHNIK, M. Informal and “Informal” Inference. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 433-460, abr. 2019. Disponible en: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p433-460>. Acceso en: 6 feb. 2023.
- BOROVCHNIK, M.; KAPADIA, R. A historical and philosophical perspective on probability. In:

CHERNOFF, E.; SRIRAMAN, B. (eds.). **Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2014. p. 7-34. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2. Acceso en: 2 jun. 2023.

CANTORAL, R. Socioepistemology in Mathematics Education. In: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer, 2020. p. 790-797. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100041. Acceso en: 5 ene. 2022.

CANTORAL, R.; MONTIEL, G.; REYES-GASPERINI, D. Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, [s.v.], n. 8, p. 9-28, 2015. Disponible en: <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123>. Acceso en: 24 feb. 2023.

CARRANZA, P. **La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique**. Une expérience en classe de BTS, 2009. 483. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) - Université Paris-Diderot, Paris VII, 2009. Disponible en: <https://theses.hal.science/tel-00458320>. Acceso en: 15 oct. 2021.

CARRANZA, P. Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en Francia. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 3, p. 1071-1087, dic. 2014. Disponible en: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21597>. Acceso en: 15 oct. 2021.

CHAVES ESQUIVEL, E. La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, v. 11, n. 15, p. 21-31, may. 2016. Disponible en: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23880>. Acceso en: 4 feb. 2023.

CHORLAY, R.; CLARK, K. M.; TZANAKIS, C. History of Mathematics in Mathematics Education: Recent developments in the field. **ZDM Mathematics Education**, Berlín, v. 54, n. 7. 1407-1420, nov. 2022. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>. Acceso en: 10 dic. 2022.

CLARK, K. M.; KJELDSEN, T. H.; SCHORCHT, S.; TZANAKIS, C. Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. In: CLARK, K.; KJELDSEN, T.; SCHORCHT, S.; TZANAKIS, C. (eds.). **Mathematics, Education and History**. Towards a Harmonious Partnership. Cham: Springer, 2018. p. 1-23. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_1. Acceso en: 10 dic. 2022.

CRUZ-MÁRQUEZ, G.; MONTIEL-ESPINOSA, G. Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 4, p. 81-108, jul. 2022. Disponible en: <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911>. Acceso en: 10 nov. 2022.

DALE, A. **A history of inverse probability**. From Thomas Bayes to Karl Pearson. 2. ed. New York: Springer, 1999. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8652-8>. Acceso en: 12 jul. 2022.

DASTON, L. **Classical Probability in the Enlightenment**. Princeton: Princeton University Press, 1988.

DIACONIS, P.; ZABELL, S. Closed Form Summation for Classical Distributions: Variations on theme of de Moivre. **Statistical Science**, Durham, v. 6, n. 3, p. 284-302, ago. 1991. Disponible en: <https://doi.org/10.1214/ss/1177011699>. Acceso en: 10 dic. 2022.

DIJKE-DROOGERS, M.; DRIJVERS, P.; BAKKER, A. Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible. **Mathematical Thinking and Learning**, Philadelphia, v. 22, n. 2, p. 116-138, 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025>. Acceso en: 10

dic. 2022.

DOGRUER, S. S.; AKYUZ, D. Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 18, n. 8, p. 1485-1505, dic. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x>. Acceso en: 7 jun. 2022.

EICHLER, A.; VOGEL, M. Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In: CHERNOFF, E.; SRIRAMAN, B. (eds.). **Probabilistic Thinking**. Presenting Plural Perspectives. Dordrecht: Springer, 2014. p. 75-99. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_4. Acceso en: 14 may. 2021.

ESPINOZA RAMÍREZ, L.; VERGARA GÓMEZ, A.; VALENZUELA ZUÑIGA, D. Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. **Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 21, n. 3, p. 247-274, nov. 2018. Disponible en: <https://doi.org/10.12802/relime.18.2131>. Acceso en: 14 may. 2021.

FURINGHETTI, F. Rethinking history and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Reino Unido, v. 51, n. 6, p. 967-994, 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>. Acceso en: 14 may. 2021.

GARCÍA-GARCÍA, J. I.; FERNÁNDEZ CORONADO, N. A.; ARREDONDO, E.; IMILPÁN RIVERA, I. A. The Binomial Distribution: Historical Origin and Evolution of Its Problem Situations. **Mathematics**, Basilea, v. 10, n. 15, 2680, jul. 2022. Disponible en: <https://doi.org/10.3390/math10152680>. Acceso en: 10 dic. 2022.

GLASS, D. J.; HALL, N. A brief history of the hypothesis. **Cell**, Cambridge, v. 134, n. 3, p. 378-381, ago. 2008. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.cell.2008.07.033>. Acceso en: 10 dic. 2022.

GÓMEZ VILLEGAS, M. A. El "Ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar". **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales**, Madrid, v. 95, n. 1-2, p. 81-85, 2001. Disponible en: <https://www.mat.ucm.es/~villegas/PDF/ArticulosobreBayesMAGV.pdf>. Acceso en: 15 jul. 2022.

GORROOCHURN, P. **Classic Problems of Probability**. Hoboken: Wiley, 2012.

GUTIÉRREZ CABRIA, S. Inferencia estadística e inducción. **Estadística Española**, Madrid, [s.v.], n. 94, p. 53-66, 1982.

HACKING, I. **The emergence of probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

HALD, A. **A history of probability and statistics and their applications before 1750**. Hoboken: Wiley-Interscience, 1990.

HALD, A. **A history of parametric statistical inference from Bernoulli to Fisher, 1713–1935**. New York: Springer, 2007. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-46409-1>. Acceso en: 5 sept. 2022.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 71, [s.n.], p. 235-261, ene. 2009. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>. Acceso en: 14 may. 2021.

LANDRO, A.; GONZÁLEZ, M. L. Acerca del “Essay toward solving a problem in the doctrine of chances”. In: Jornadas Nacionales y Latinoamericanas Actuariales, 8., 2012, Buenos Aires. **Actas ...**

Buenos Aires: Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión, 2012. p. 45-70. http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Casparri_Jornadas-nacionales-latinoamericanas-actuariales-13-2012.pdf

LAVE, J. **Cognition in practice**. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. In: BOALER, J. (ed.). **Multiple perspectives on mathematics teaching and learning**. Westport: Ablex Publishing, 2000. p. 19-44.

MAKAR, K.; RUBIN, A. A framework for thinking about informal statistical inference. **Statistics Education Research Journal**, La Haya, v. 8, n. 1, p. 82-105, may. 2009. Disponible en: <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>. Acceso en: 17 jun. 2022.

MOIVRE, A. de **The Doctrine of Chances**. 2. ed. Londres: H. Woodfall, 1738. Disponible en: https://catalog.lindahall.org/discovery/delivery/01LINDAHALL_INST:LHL/1287366660005961. Acceso en: 20 may. 2016.

NILSSON, P. Students' informal hypothesis testing in a probability context with concrete random generators. **Statistics Education Research Journal**, La Haya, v. 19, n. 3, p. 53-73, dic. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.52041/serj.v19i3.56>. Acceso en: 17 jun. 2022.

PEREDES-CANCINO, C. G.; MONTIEL-ESPINOSA, G. Características y prácticas estocásticas asociadas a tareas bayesianas en libros de texto del bachillerato en México [en revisión].

PEREDES-CANCINO, C. G. Caracterización de la actividad estocástica en el texto de Bayes (1763) [Datos] [Data set]. **Zenodo**, 2024. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10456449>. Acceso en: 3 ene. 2024.

PEREDES, C. **El problema de la inversión de la probabilidad**. Génesis histórica y problematización del Teorema de Bayes, 2018. 162. Tesis (Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa) - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, 2018.

POLAKI, M. V. Using Instruction to Identify Mathematical Practices Associated with Basotho Elementary Students' Growth in Probabilistic Thinking. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, Philadelphia, v. 2, [s.n.], p. 357-370, 2002. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/14926150209556526>. Acceso en: 7 jun. 2022.

RIVADULLA, A. Historia y epistemología de los cambios de significado de probabilidad. **Agora - Papeles de Filosofía**, Santiago de Compostela, v. 14, n. 1, p. 53-75, 1995.

RIVADULLA, A. Bayesian induction and statistical inference. In: MUNÉVAR, G. (ed.). **Spanish Studies in the Philosophy of Science**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 103-121.

SANTOS VERBISCK, J. T. do; BITTAR, M. The teaching proposal of Probability in a Brazilian Elementary School textbook collection. **RIPEM - Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática**, Brasília, v. 10, n. 3, p. 27-44, sept. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.37001/riperm.v10i3.2109>. Acceso en: 7 jun. 2022.

STIGLER, S. M. **The history of statistics**: The measurement of uncertainty before 1900. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

STIGLER, S. M. The True Title of Bayes's Essay. **Statistical Science**, Durham, v. 28, n. 3, p. 283-288, ago. 2013. Disponible en: <https://doi.org/10.1214/13-STS438>. Acceso en: 20 may. 2016.

TORRES-CORRALES, D.; MONTIEL-ESPINOSA, G. Resignificación de la razón trigonométrica en

estudiantes de primer año de Ingeniería. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 33, n. 3, p. 202-232, dic. 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.24844/em3303.08>. Acceso en: 26 jun. 2022.

TRIANTAFILLOU, C.; POTARI, D. Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 74, n. 3, p. 275-294, abr. 2010. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9237-6>. Acceso en: 7 jun. 2022.

VANCSÓ, O.; BOROCNIK, M.; FEJES-TÓTH, P. A complex concept about statistical inference and a planned school experiment based on it. *In*: ISI World Statistics Congress, 63., 2021, La Haya. **Proceedings ...** La Haya: International Statistical Institute, 2021. p. 596-601. <https://www.isi-web.org/sites/default/files/import/pdf/154-day3-ips078-a-complex-concept-about-statis.pdf>

VARGAS-ZAMBRANO, L. C.; MONTIEL-ESPINOSA, G. Los cortes del cono en la geometría griega: una caracterización de usos y significados más allá de la anécdota. **HISTEMAT - Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 8, [s.n.], p. 1-23, sep. 2022. Disponible en: <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/514>. Acceso en: 15 ene. 2023.

WIJAYANTI, D.; WINSLØW, C. Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, v. 6, n. 3, p. 307-330, oct. 2017. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2078>. Acceso en: 7 jun. 2022.

ZIEFFLER, A.; GARFIELD, J.; DELMAS, R.; READING, C. A framework to support research on informal inferential reasoning. **Statistics Education Research Journal**, La Haya, v. 7, n. 2, p. 40-58, nov. 2008. Disponible en: <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469>. Acceso en: 7 jun. 2022.

Submetido em 17 de Dezembro de 2023.
Aprovado em 27 de Fevereiro de 2024.