ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

Raciocínio Matemático em Contextos Algébricos e Geométricos: uma análise com alunos medalhistas de 9º ano

Mathematical Reasoning in Algebraic and Geometric Contexts: an analysis with grade 9 medalist students

Adilson de **Campos**[*]

ORCID iD 0000-0002-9896-1293

João Pedro da **Ponte**[**]

ORCID iD 0000-0001-6203-7616

Resumo

O objetivo deste artigo é compreender os processos de raciocínio de alunos de 9º ano empregados durante a realização de duas tarefas: uma de cunho aritmético/algébrico e outra de geometria plana. A metodologia utilizada é qualitativa, inscrita em um paradigma interpretativo com recurso à análise documental de seis produções escritas de quatro alunos: alunos medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e na Olimpíada Regional de Matemática (ORM) do Estado de Santa Catarina. A análise das resoluções dos alunos foi realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) processos e tipos de raciocínio e (ii) representações. O resultados apontam para uma grande potencialidade do recurso à Álgebra (com o domínio da linguagem algébrica) na realização das justificações dos alunos. Tal uso parece ter permitido aos alunos diversificar os seus registros semióticos de representação e também a coordenação destes registros. Ademais, e de um modo distinto do relatado na literatura, os alunos conseguiram realizar as suas justificações sem a necessidade de serem questionados pelo professor. Tal questão parece estar associada ao fato destes alunos serem medalhistas em Olimpíadas de Matemática, certame em que a construção de uma justificação matematicamente correta assume um papel central.

Palavras-chave: Raciocínio Matemático. Representações. Álgebra. Geometria.

Abstract

The purpose of this article is to understand the reasoning processes of grade 9 students employed in solving two tasks: one of an arithmetic/algebraic nature and another of flat geometry. The methodology used is qualitative, inscribed in an interpretive paradigm using document analysis of six written productions by four students: medalist students at the Brazilian Mathematics Olympiad in Public Schools (OBMEP) and at the Regional Mathematics Olympiad (ORM) in the State of Santa Catarina. The analysis of the students' solutions was carried out according to the following categories: (i) processes and types of reasoning and (ii) representations. The results point to a great potential of the use of Algebra (with mastery of algebraic language) in the realization of the students' justifications. Such use seems to have allowed students to diversify their semiotic representation records and to coordinate them. Furthermore, and in a different way from what is reported in the literature, the students were able to carry out their justifications without the need to be questioned by the teacher. This question seems to be associated with the fact that these students are medalists in Mathematics Olympiads, events in which the

[*] Doutor em Educação (Didática da Matemática) pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE, ULisboa). Professor do Departamento Acadêmico de Linguagem, Tecnologia, Educação e Ciência do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC), Campus Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: adilson.campos@ifsc.edu.br.

[**] Doutor em Educação pela University of Georgia (UGA). Professor catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-ULisboa), Lisboa, Portugal. E-mail: jpponte@ie.ulisboa.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

construction of a plausible justification assumes a central role.

Keywords: Mathematical Reasoning. Representations. Algebra. Geometry.

1 Introdução

O raciocínio matemático é essencial no ensino da Matemática e um dos fundamentos basilares para o seu entendimento em profundidade (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Tal visão traz consigo importantes implicações no que respeita à forma como se compreende o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, reforçando a ideia de que, para compreender um conceito matemático não basta conhecer a sua definição, requerendo também "perceber o modo como o conceito se relaciona com outros conceitos e como pode ser usado" (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012, p. 81).

Um ensino baseado no raciocínio *pode* preparar os alunos para a cidadania, para o mundo do trabalho e também para a continuidade dos estudos (NCTM, 2009), contribuindo, assim, para o desenvolvimento da sua proficiência matemática, dado que "os alunos que genuinamente dão sentido às ideias matemáticas podem aplicá-las na resolução de problemas e em situações não familiares e podem usá-las como base para a aprendizagem futura" (BATTISTA, 2017, p. 1).

Desse modo, desenvolver as capacidades de raciocínio dos alunos constitui um importante objetivo para o ensino da Matemática (BATTISTA, 2017; NCTM, 2009). Para atender este objetivo torna-se imperioso empreender esforços no sentido de procurar conhecer, em profundidade, os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos nos diversos níveis de escolaridade. Nesse ínterim, um público especial, *mas pouco estudado* (especialmente no âmbito do raciocínio matemático) são os alunos premiados em Olimpíadas de Matemática. *Reconhecendo que medalhistas possuem conhecimentos e habilidades especiais (que podem ser diferentes dos demais alunos), estes podem ser considerados bons informantes.* Assim, estudos conduzidos com este público podem trazer contributos importantes para se compreender, de um modo mais aprofundado, os processos de raciocínio matemáticos empregados.

Este artigo tem como objetivo compreender os processos de raciocínio de alunos de 9º ano do Ensino Fundamental durante a realização de duas tarefas[1], uma de cunho aritmético/algébrico e outra de geometria plana (áreas). Os alunos em questão são alunos de

[1] As duas tarefas foram retiradas do material de apoio da 12ª edição do PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

escolas públicas catarinenses premiados em Olimpíadas de Matemática, nomeadamente na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e na Olimpíada Regional de Matemática (ORM) do Estado de Santa Catarina.

2 Raciocínio matemático

2.1 Do que estamos falando?

Antes de mais nada convém nos perguntar: o que entendemos, afinal, por raciocínio matemático? Como podemos caracterizá-lo? As respostas a estas questões não são simples, uma vez que, mesmo "dentro da comunidade de pesquisa em Educação Matemática, o discurso sobre o raciocínio matemático não é monolítico" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 2). Ademais, em muitas situações acaba-se por assumir, tacitamente, que todos possuem uma noção do que é o raciocínio matemático, não necessitando, assim, de uma definição mais precisa. Para Henriques (2012), a dificuldade em definir o raciocínio reside no fato do termo ter sido usado por investigadores com "uma variedade de significados que estão associados a práticas e abordagens teóricas distintas" (HENRIQUES, 2012, p. 140).

Neste estudo, o raciocínio matemático é encarado de um ponto de vista essencialmente cognitivo, tal como perspectivado por muitos autores (BATTISTA, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2012; OLIVEIRA, 2008). Oliveira (2008) compreende o raciocínio como sendo um conjunto de "processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (OLIVEIRA, 2008, p. 3). Lannin, Ellis e Elliot (2011) seguem uma linha similar e concebem o raciocínio como sendo um processo evolutivo de desenvolvimento e avaliação de argumentos que se dá através de conjectura, generalização e investigação do porquê. Numa perspectiva concordante, o raciocínio matemático é aqui tratado como sendo "um processo de manipular e analisar objetos, representações, diagramas, símbolos ou declarações para tirar conclusões com base em evidências ou suposições" (BATTISTA, 2017, p. 1).

2.2 Processos e tipos de raciocínio

Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram três processos fundamentais de raciocínio: *conjecturar, generalizar e justificar*, definindo-os do seguinte modo: (i) *conjecturar* "envolve

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 57); (ii) *generalizar* "envolve identificar semelhanças entre casos e estender o raciocínio para além do intervalo que o originou" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 61); e (iii) "uma *justificativa matemática* é um argumento lógico baseado em ideias compreendidas" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 61), não sendo um argumento baseado na autoridade, na percepção, no senso comum ou em exemplos particulares. Mata-Pereira e Ponte (2012, p. 82), por seu turno, referem que "os processos de raciocínio incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a realização de justificações".

Ainda dentro dos processos de raciocínio, Radford (2008) enfatiza o papel relevante desempenhado pela generalização de padrões. Para Radford (2008, p. 83), "sem poder fazer generalizações, seríamos reduzidos a viver em um mundo de meros detalhes a, b, c ...". O autor defende que a generalização de padrões algébricos envolve três etapas: (i) compreensão do que denominou de "comunalidade"[2]; (ii) generalização desta comunalidade para todos os termos da sequência em consideração; e (iii) formação de uma regra ou esquema que permita determinar qualquer termo da sequência de modo direto.

> Generalizar um padrão algebricamente depende da capacidade de apreender uma semelhança observada em alguns casos particulares (digamos p_1, p_2, p_3, ..., p_k); estendendo ou generalizando esta comunalidade para todos os termos subsequentes (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+1}, ...), e sendo capaz de usar a comunalidade para fornecer uma expressão direta de qualquer termo da sequência" (RADFORD, 2008, p. 84).

Stylianides (2009), por seu turno, em um estudo que examinou as oportunidades criadas nos livros didáticos para que os alunos se envolvessem em raciocínio e prova, identifica os seguintes processos de raciocínio: (i) identificar padrões; (ii) fazer conjecturas e (iii) fornecer prova. O autor identifica os objetivos específicos associados a cada um destes processos. Na visão do autor, os padrões desempenham um papel importante na Matemática, nomeadamente o de criarem oportunidades para o aluno desenvolver conjecturas. E estas, pelo seu lado, têm o papel de levar ao desenvolvimento da prova. Finalmente, o autor identifica quatro propósitos associados à prova: (i) explicação (quando a prova fornece *insights* sobre o porquê de uma afirmação ser verdadeira); (ii) verificação (quando estabelece a veracidade de uma afirmação); (iii) falsificação (quando comprova a falsidade de uma determinada afirmação); e (iv) geração de novos conhecimentos (quando é dada contribuição para o desenvolvimento de novos resultados – entendidos como produtos adicionados à base de conhecimento de uma

[2] O termo "comunalidade" utilizado pelo autor pode ser entendido como a compreensão de uma semelhança observada em alguns casos particulares, ou seja, aquilo que é comum.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

comunidade).

Quanto aos tipos de raciocínio propriamente ditos, Aliseda (2003), ao referir os estudos de Peirce (1931-1935), identifica três tipos básicos: (i) raciocínio dedutivo; (ii) raciocínio indutivo; e (iii) raciocínio abdutivo. Para Aliseda (2003, p. 25), “enquanto o raciocínio indutivo é para fazer previsões, o raciocínio dedutivo é para verificar essas previsões; e o raciocínio abdutivo é para construir hipóteses para fenômenos intrigantes”. A autora, seguindo uma perspectiva lógica, refere que o raciocínio dedutivo tem sido o paradigma do raciocínio matemático:

> O raciocínio matemático pode ser identificado com a inferência dedutiva clássica. Dois aspectos caracterizam este tipo de raciocínio: a sua certeza e a sua monotonicidade. A primeira delas é exemplificada pelo fato de que a relação entre premissas e conclusão é necessária; uma conclusão tirada de um conjunto de premissas, necessariamente decorre delas. O segundo aspecto afirma que as conclusões alcançadas por meio do raciocínio dedutivo são irrefutáveis (ALISEDA, 2003, p. 25).

Oliveira (2008, p. 4), pelo seu lado, indicando que a demonstração possui um papel central no raciocínio “tipicamente” matemático, também refere que “as intuições e a construção de significado matemático são anteriores à sua organização dedutiva”:

> A análise de casos particulares, o estudo de analogias, o trabalho experimental, o pensamento vago (incluindo ideias pré-lógicas), o estabelecimento de conjecturas, as tentativas, os *insights* e a incerteza, muita incerteza, tipificam a atividade do matemático, no período que antecede a organização dedutiva do conhecimento (OLIVEIRA, 2008, p. 4).

Para Oliveira (2008), o raciocínio indutivo possui uma natureza mais heurística e desenvolve-se do particular para o geral e, embora não conduzindo à conclusões necessárias, desempenha um papel importante na criação de conhecimento novo. Quanto ao raciocínio abdutivo, Aliseda (2003, p. 30) define-o como sendo “um processo de raciocínio invocado para explicar uma observação intrigante”. Para clarificar o que compreende por “observação intrigante”, a autora exemplifica o caso de uma médica que, ao observar um sintoma em um paciente, “faz hipóteses sobre suas possíveis causas, com base em seu conhecimento das relações causais entre doenças e sintomas. Este é um cenário prático” (ALISEDA, 2003, p. 30). Entretanto, a autora também refere que a abdução também pode ocorrer em contextos científicos mais teóricos. Em suma, na visão de Aliseda (2003, p. 30), “abdução é pensar da evidência à explicação, um tipo de raciocínio característico de muitas situações diferentes com informações incompletas”.

Seguindo uma linha similar, Rivera e Becker (2009) afirmam que o raciocínio abdutivo envolve a formação de uma hipótese sobre o fenômeno em questão. Para formar essa hipótese, segundo os autores, “verificamos e testamos a hipótese conjeturada várias vezes para ver se faz

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

sentido” (RIVERA; BECKER, 2009, p. 217) e, ao generalizar um padrão, por exemplo, é preciso prestar atenção em como a abdução e a indução podem ser usadas de modo conjunto no sentido de “construir e justificar uma generalização algébrica completa e válida” (RIVERA; BECKER, 2009, p. 217). Os autores também enfatizam a atividade de padronização, concebendo-a como uma atividade que permite ao aluno construir e justificar uma generalização. Na visão dos autores, a generalização de padrões envolve uma sinergia de abdução, indução e prova, ocasião em que o aluno deve: (i) enunciar suposições e hipóteses sobre uma estrutura provável de um padrão à medida que constrói uma fórmula direta razoável (fase abdutiva); (ii) verificar e testar a escolha da fase abdutiva ao longo de vários estágios (fase indutiva); e (iii) justificar.

O raciocínio, a significação e as representações ocupam um lugar de destaque no quadro conceptual concebido por Mata-Pereira e Ponte (2011) para a análise do raciocínio matemático. Neste quadro teórico (Figura 1), o raciocínio abdutivo e indutivo têm lugar na formulação de conjecturas gerais a partir de casos específicos e o raciocínio dedutivo ocorre durante os processos de justificação. Nesse modelo, “o raciocínio apoia-se nas representações e articula-se com os processos de significação (*sense making*)” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2011, p. 354).

No que diz respeito aos estudos empíricos conduzidos neste domínio, Mata-Pereira e Ponte (2012), ao fazer uso deste modelo analítico, analisaram os processos de raciocínio de alunos das séries finais do Ensino Fundamental na resolução de tarefas de cunho algébrico. Os autores consideram que, na realização de generalizações, grande parte dos alunos seguiu uma abordagem indutiva, embora também tenha sido verificado o uso de raciocínios abdutivos. Os autores também afirmam que a justificação não foi espontânea nos alunos, mas decorrente de questionamentos realizados pelo professor. Nelas, os alunos foram capazes de se justificarem baseados em conhecimentos anteriores, em propriedades, em conceitos matemáticos e também no uso de contraexemplos. Henriques (2012), por seu turno, analisou os processos de raciocínio matemático utilizados por alunos de Ensino Superior em uma experiência de ensino na disciplina de Análise Numérica. A autora concluiu que a realização das tarefas contribuiu para promover o raciocínio matemático dos alunos e incluiu a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a justificação, embora esta última tenha se dado de modo incipiente.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

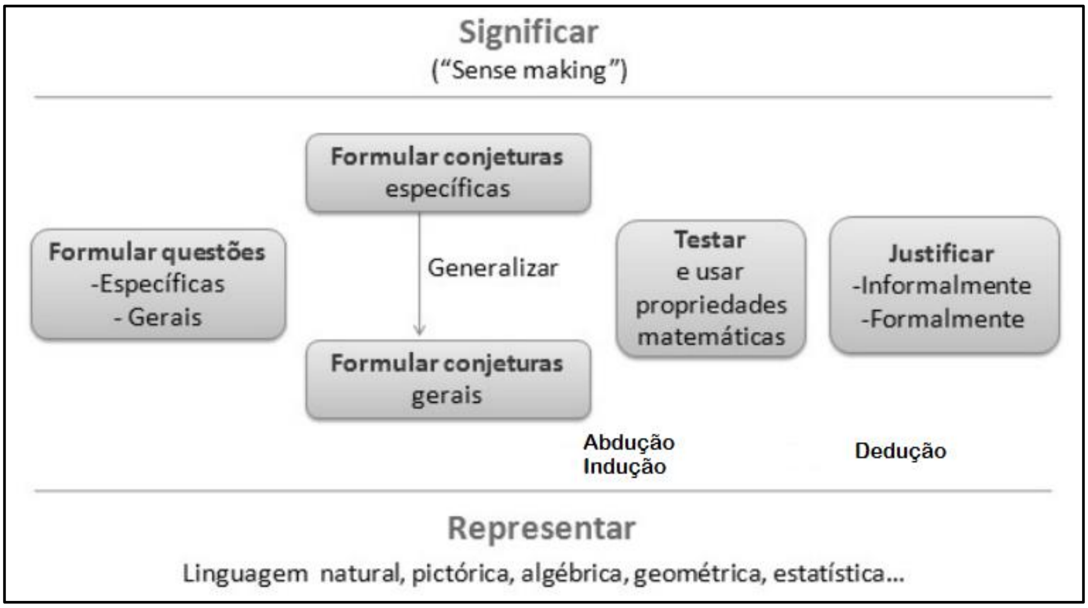


Figura 1 – Quadro conceptual para a análise do raciocínio
Fonte: Adaptado de Mata-Pereira e Ponte (2011).

3 Representações

O acesso direto aos processos de raciocínio dos alunos é, naturalmente, uma tarefa impossível. Para "conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações" (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012, pp. 359-360). Para Duval (2006), os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção ou por outros instrumentos, com efeito: "a única maneira de ter acesso a eles e lidar com eles é por meio de signos e representações semióticas" (DUVAL, 2006, p. 107). As representações, assim, incorporam características relevantes das estruturas mentais e das ações matemáticas dos alunos, uma vez que estes, quando "aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, de variadas formas, demonstram uma compreensão mais aprofundada e uma capacidade fortalecida de resolução de problemas" (NCTM, 2017, p. 24).

Vergnaud (1998), por seu turno, considera a representação um processo essencialmente dinâmico e destaca duas razões para considerá-la um assunto importante: a primeira é o fato de que todos nós *experimentamos* a representação como um fluxo de imagens, gestos e palavras internas; a segunda razão diz respeito ao fato de as palavras e símbolos usados no processo de comunicação não se referirem diretamente à realidade, mas à entidade representada, tais como: "objetos, propriedades, relacionamentos, processos, ações e construções" (VERGNAUD, 1998, p. 167). Nesse sentido, Duval (2006, p. 107) destaca que "os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com as representações semióticas que são utilizadas". Seguindo um ponto de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

vista semelhante, Greeno e Hall (1997) referem a existência de três coisas quando há uma representação, nomeadamente: (i) o que está sendo representado, o referente; (ii) a expressão referencial que o representa; e (iii) e a interpretação que liga a expressão de referência ao referente. No tocante às definições apresentadas, Goldin (2008) define uma representação como sendo uma configuração que pode representar outra coisa de algum modo:

> A configuração representativa pode, por exemplo, atuar, no lugar de ser interpretada como conectar a, corresponder a, denotar, representar, incorporar, codificar, evocar, rotular, vincular a, significar, produzir, referir-se a, assemelhar-se, servir a um metáfora para, significar, representar, substituir, sugerir ou simbolizar o que representa (GOLDIN, 2008, p. 179).

Duval (2006), pelo seu lado, se refere à existência de dois tipos de transformações das representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos, segundo o autor, são transformações que acontecem no interior do mesmo registro, como, por exemplo, resolver algebricamente uma equação ou um sistema de equações, ou então completar uma figura utilizando critérios de simetria. As conversões, por outro lado, são transformações que consistem em alterar um registro, mas sem alterar os objetos representados. Como exemplo dessa transformação, o autor cita a passagem da notação algébrica de uma equação para a sua representação gráfica. Na visão de Duval (2006), a conversão é mais complexa do que o tratamento “porque qualquer mudança de registro requer primeiro o reconhecimento do mesmo objeto representado entre duas representações cujos conteúdos muitas vezes não têm nada em comum” (DUVAL, 2006, p. 112).

Goldin (2008), pelo seu turno, apresenta a distinção entre representações externas e internas, dividindo estas últimas em cinco tipos a que chamou de sistemas internos de representação: (i) verbal e semântico; (ii) imagético; (iii) notação formal; (iv) planejamento, monitorização e controle de execução; e (v) afetivo. A partir desses cinco tipos, prossegue o autor, é possível o indivíduo produzir uma vasta gama de configurações externas que, por sua vez, são interpretadas de forma significativa por outras pessoas:

> (1) linguagem falada e escrita; (2) gesto icônico, desenho, pictórico, representação, produções musicais e rítmicas; (3) fórmulas e equações matemáticas; (4) expressões de objetivos, intenção, planejamento, estruturas de decisão; (5) contato visual, expressão facial, linguagem corporal, contato físico, lágrimas e risos e exclamações que transmitem emoção. A riqueza da comunicação resultante é o que torna possível a complexidade da interação social humana (GOLDIN, 2008, p. 184).

4 Metodologia

Este estudo segue uma metodologia de natureza qualitativa, inscrita em um paradigma interpretativo (ERICKSON, 2012), sendo concretizado por meio da análise documental de seis

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

produções escritas de quatro alunos: Maria, Inês, Pedro e Rita (nomes fictícios), alunos das séries finais do Ensino Fundamental, nomeadamente do 9º ano. A escolha destas resoluções como objeto da análise ocorreu por dois motivos: (i) devido ao bom desempenho destes alunos no curso; e (ii) devido à forma bastante pormenorizada com que estes alunos apresentavam suas resoluções. Assim, tal escolha prende-se com a expectativa das resoluções apresentarem raciocínios mais elaborados e interessantes do ponto de vista analítico.

Os quatro alunos fazem parte de uma turma de 14 alunos das séries finais do Ensino Fundamental (oriundos de diferentes escolas públicas da região metropolitana de Florianópolis) selecionados devido ao bom desempenho em Olimpíadas de Matemática (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP e Olimpíada Regional de Matemática do Estado de Santa Catarina - ORM) para a participação em um curso de iniciação científica presencial envolvendo a resolução de problemas. O curso foi ministrado pelo primeiro autor e foi realizado fora do período escolar, aos sábados, de modo a poder contar com a presença de alunos de várias escolas.

O curso foi dividido em sete ciclos, sendo que cada ciclo tinha a duração aproximada de um mês e incidia sobre uma temática específica. Ao final de cada ciclo, os alunos realizavam, individualmente, uma prova sobre a respectiva temática. Em todos os quatro casos considerados neste estudo foi realizada a análise documental das produções escritas dos alunos. Tal análise incide sobre duas questões realizadas pelos alunos em dois ciclos diferentes: a primeira questão é referente aos fenômenos periódicos e padrões numéricos (ciclo 1) e a segunda questão é referente à geometria plana - áreas e perímetros (ciclo 3).

Quanto ao quadro analítico, a análise dos dados foi realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) processos e tipos de raciocínio e (ii) representações. Nos *processos e tipos de raciocínio* buscamos analisar a incidência dos raciocínios indutivos, abdutivos e dedutivos durante a realização das tarefas, bem como os aspectos transversais respeitantes à justificação e à significação. Nas *representações*, buscamos proceder à análise dos tipos de transformações utilizadas pelos alunos, nomeadamente a análise dos tratamentos e conversões.

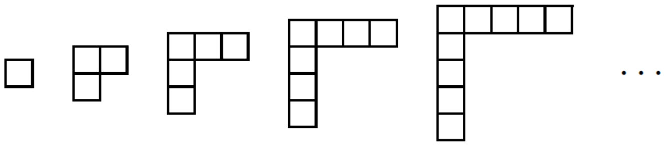
5 Análise dos dados e discussão

5.1 Tarefa 1

A primeira tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

Tarefa 1) Considere a seguinte sequência de figuras:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04



A primeira consiste por um quadrado, as demais são compostas por cópias do quadrado inicial, sucessivamente incorporando novos quadrados conforme padrão indicado. Quantos quadrados há ao todo nas 100 primeiras figuras?

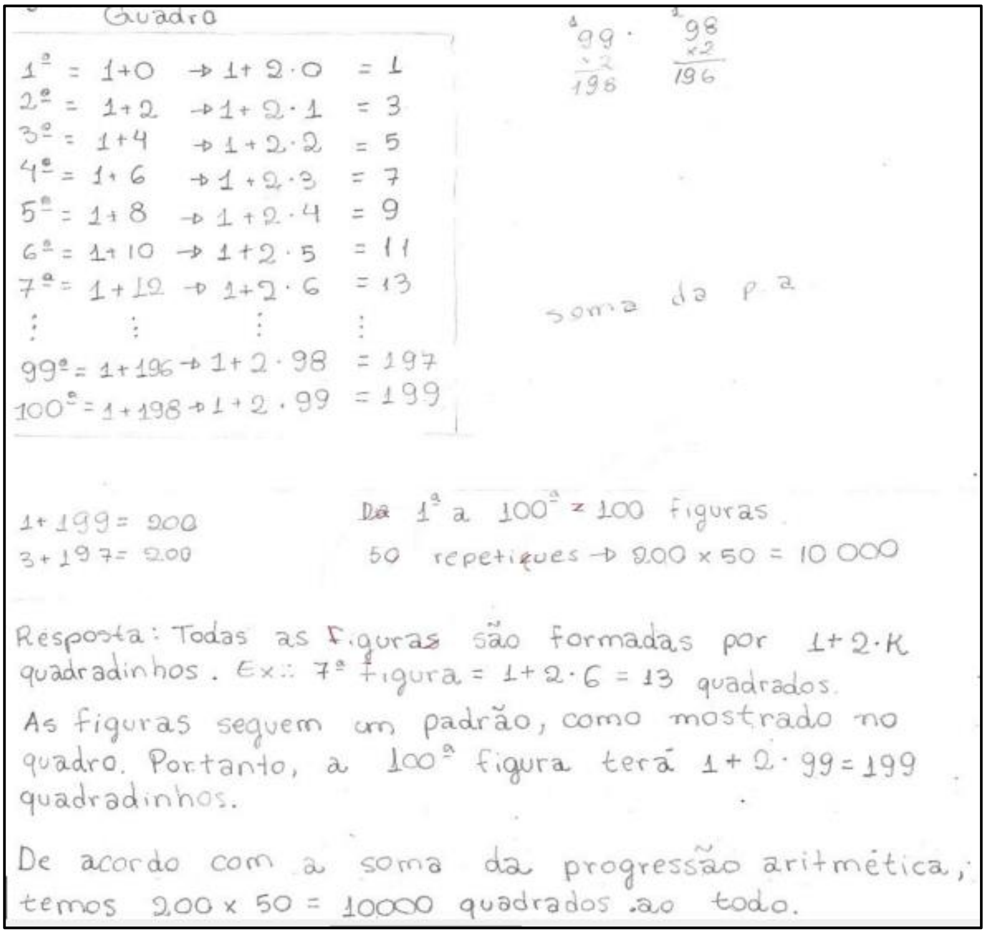
Fonte: Tarefa de avaliação, ciclo 1, ano.

Resolução de Maria:

A aluna começa a sua resolução mostrando uma construção auxiliar para estabelecer a quantidade de quadradinhos existentes em cada figura em função da sua ordem. Para isso, Maria constrói o que chamou de “quadro”, uma tabela com a disposição de duas colunas (Figura 2): (i) na primeira coluna apresenta o número de quadradinhos da figura por meio de uma soma particular (1 + 0; 1 + 2; 1 + 4;...), (ii) na segunda coluna, colocada ao lado da primeira, a aluna escreve cada número par (que constava na primeira coluna) como um produto, explicitando o fator dois (assim escreve: 0 = 2 . 0; 2 = 2 . 1; 4 = 2 . 2;...). Maria faz esta construção para as primeiras sete figuras e depois, usando três pontinhos (como indicativo de que este comportamento ocorre para os demais termos da sequência), coloca as somas dos quadradinhos das duas últimas figuras, nomeadamente das figuras de ordem 99 e 100. Ao final, e após esta construção do “quadro inicial”, afirma que todas as figuras são formadas por $1 + 2k$. Mesmo não estabelecendo, de modo explícito, a relação entre a ordem da figura e o valor de k, dá a entender que k possui uma unidade a menos que a ordem da figura. Isso ocorre quando menciona, a título de exemplo, que o número de quadradinhos da 7ª figura resulta da soma “1 + 2 . 6 = 13 quadrados”, ou seja, para este caso a ordem da figura é sete e o valor de k é igual a seis.

Maria refere na sua resposta que “as figuras seguem um padrão, como mostrado no quadro” e, novamente, lança mão do exemplo da centésima figura para mostrar este padrão: “100ª figura terá 1 + 2 . 99 = 199 quadradinhos”.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04



Quadro

1ª = 1+0	→ 1+2·0	= 1	
2ª = 1+2	→ 1+2·1	= 3	
3ª = 1+4	→ 1+2·2	= 5	
4ª = 1+6	→ 1+2·3	= 7	
5ª = 1+8	→ 1+2·4	= 9	
6ª = 1+10	→ 1+2·5	= 11	
7ª = 1+12	→ 1+2·6	= 13	
⋮	⋮	⋮	
99ª = 1+196	→ 1+2·98	= 197	
100ª = 1+198	→ 1+2·99	= 199	

99 · 2 = 198   98 × 2 = 196

soma da p.a

1+199 = 200
3+197 = 200

Da 1ª a 100ª = 100 figuras
50 repetições → 200 x 50 = 10 000

Resposta: Todas as figuras são formadas por 1+2·K quadradinhos. Ex.: 7ª figura = 1+2·6 = 13 quadrados.
As figuras seguem um padrão, como mostrado no quadro. Portanto, a 100ª figura terá 1+2·99 = 199 quadradinhos.

De acordo com a soma da progressão aritmética, temos 200 x 50 = 10000 quadrados ao todo.

Figura 2 – Registro da resolução apresentada pela aluna Maria para a tarefa 1
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

No tocante à soma de quadradinhos solicitada na tarefa, a aluna apresenta duas justificativas. Primeiro, ao apresentar os cálculos auxiliares 1+199 = 200 e 3+197 = 200, conclui que da 1ª figura até a 100ª figura existem 50 somas de 200 quadradinhos cada e, usando a multiplicação 200 x 50, conclui pela existência de 10000 quadradinhos. A segunda justificativa apresentada pela aluna é uma alusão direta à soma da Progressão Aritmética: “De acordo com a soma da progressão aritmética, temos 200 x 50 = 10 000 quadrados ao todo”.

Resolução de Inês:

De um modo similar à primeira resolução apresentada anteriormente, a aluna também parece construir uma fórmula fechada para a quantidade de quadradinhos consoante a ordem da figura (Figura 3). Entretanto, a fórmula em questão difere da apresentada anteriormente. Inês utiliza-se do exemplo da quarta figura, desenhando-a novamente. Na ilustração, a aluna identifica: “4 quadradinhos” horizontais e “3 quadradinhos” verticais e, ao lado da figura, apresenta a soma entre estas quantidades, expressando: 4 + (4 - 1) = 4 + 3 = 7.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

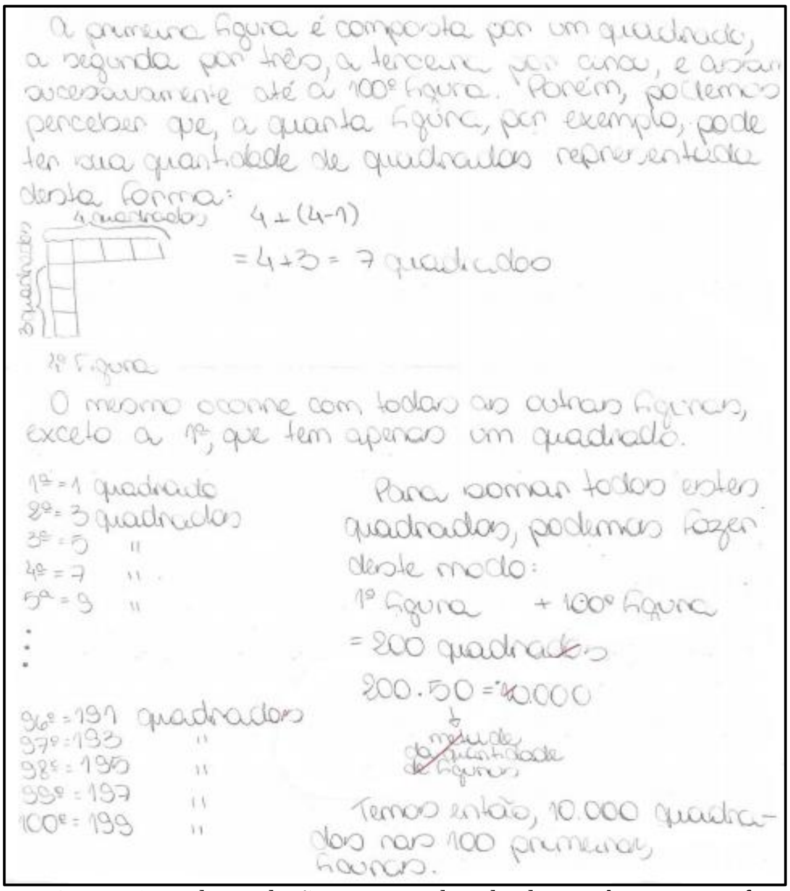


Figura 3 – Registro da resolução apresentada pela aluna Inês para a tarefa 1
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

A seguir busca generalizar este padrão, pontuando que “o mesmo ocorre com todas as outras figuras, exceto a 1ª, que tem apenas um quadrado”. Embora não sendo assertiva e direta, a aluna dá a entender que a quantidade de quadradinhos de cada figura pode ser obtida pela soma do número indicado na ordem da respectiva figura com o seu antecessor. Isto pode ser evidenciado no exemplo da 4ª figura por ela construído, ocasião em que fez questão de escrever o três como sendo o resultado da subtração de quatro (ordem da figura) menos um.

Por fim, a aluna apresenta o resultado da soma da 1ª figura com a 100ª figura, totalizando 200 quadrados. A seguir multiplica 200 por 50 e indica, por meio de uma seta, que o 50 representa “metade da quantidade de figuras” e conclui pela existência de 10000 quadrados nas 100 primeiras figuras.

Resolução de Pedro:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

Com base no padrão, uma figura somado com todos os seus antecessores resulta em um quadrado exato, sendo que o número da figura sempre será o valor de ambos os seus lados, conforme este detalhe, a figura 100 será um quadrado de lados 100x100.
Ao todo há 10.000 quadrados.

Figura 4 – Registro da resolução apresentada pelo aluno Pedro para a tarefa 1
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Na sua resolução (Figura 4), o aluno começa por indicar a existência de um padrão: “com base no padrão”. Mas, de um modo diferente das resoluções anteriores, o aluno não constrói uma hipótese para uma fórmula fechada que possa dar o número de quadradinhos de cada figura em função da sua ordem, mas sim para a soma total de quadradinhos de toda a sequência. O aluno identifica que uma figura ao ser somada com todas as figuras que a antecedem forma um quadrado, ao que chamou de “quadrado exato”. A seguir, afirma que o número de quadradinhos desse “quadrado exato” pode ser obtido por meio do produto de seus lados: “será o valor de ambos os seus lados” (área do quadrado). Por fim o aluno destaca que, “conforme esse detalhe, a figura 100 será um quadrado de lados 100 x 100”, e conclui sua resolução indicando um total de 10000 quadradinhos.

Processos e tipos de raciocínio na tarefa 1

Tanto Maria quanto Inês parecem utilizar-se de um modo orgânico e articulado dos raciocínios abdutivo e indutivo durante o processo de construção e justificativa das generalizações por elas idealizadas. Isso vai ao encontro do referido por Rivera e Becker (2009), ou seja, da existência de uma sinergia entre os processos de abdução, indução e prova quanto à generalização de padrões, o que, por seu turno, também está em conformidade com o proposto no quadro conceitual para a análise do raciocínio presentado por Mata-Pereira e Ponte (2011).

Na fase indutiva, as alunas apresentam como hipótese uma fórmula fechada que permite determinar o número de quadradinhos a partir da ordem da figura. Maria apresenta a fórmula $1 + 2k$ e Inês parece indicá-la como sendo a soma do número que representa a ordem da figura com o seu antecessor. Entretanto, cabe destacar que Maria consegue fazer uso de modo proficiente de uma linguagem algébrica mais elaborada, se referindo à fórmula $1 + 2k$, ao passo que Inês não faz uso desta linguagem.

Um ponto comum é que ambas as alunas utilizam-se de um exemplo: Inês coloca os exemplos de um modo direto, não explicitando as somas e ainda com um forte apelo visual, enquanto Maria escreve os exemplos no formato da fórmula fechada que abduziu. Ademais, a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

disposição inicial das somas colocadas no “quadro” elaborado por Maria parece ter desempenhado um papel relevante para que a aluna descobrisse o que era comum às figuras, tal como referido por Radford (2008) para a compreensão da “comunalidade”. Por fim, é de destacar que os exemplos apresentados na tarefa parecem servir tanto para o propósito da construção da hipótese (fase abdutiva) como também para testar esta hipótese (fase dedutiva).

Já Pedro parece seguir uma linha de raciocínio essencialmente dedutiva. O aluno busca uma generalização identificando um padrão, mas faz isso dentro da chamada “generalização visual”, tal como referido por Rivera e Becker (2009): o aluno observa visualmente um padrão, ou seja, que cada figura somada com todos os seus antecessores resulta em um quadrado cujo lado é igual ao número que representa a sua ordem. Daí deduz, com relativa facilidade, que a soma solicitada pode ser obtida através do produto dos lados do quadrado. Considerando as três resoluções apresentadas, os resultados analisados vão ao encontro do referido por Rivera e Becker (2009, p. 220): “Quando os padrões aparecem como sequência de estágios figurais, alguns alunos estabelecerão suas generalizações visualmente, enquanto outros farão numericamente”. Entretanto, mesmo nessa generalização mais numérica, identificamos, a partir da análise das resoluções, a existência de diferentes graus de proficiência ao nível algébrico.

Representações na tarefa 1

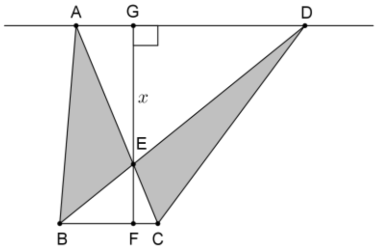
Na resolução apresentada, tanto Maria quanto Inês parecem não ter dificuldades na conversão da língua natural (escrita) para a algébrica, passando de uma para outra com muita naturalidade. Realizam, com bastante desenvoltura, os tratamentos associados ao formato algébrico da fórmula matemática apresentada: Maria apresentando vários exemplos e Inês se concentrando apenas na 4ª figura. Pedro, por sua vez, ao adotar uma linha de raciocínio mais visual e direta, utiliza-se de tratamentos dentro de um mesmo sistema de representação, nomeadamente da língua natural escrita.

Tarefa 2

A segunda tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

Tarefa 2) Observe a figura abaixo, nela o segmento $\overline{BC}$ é paralelo à reta que contém os pontos A e D.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

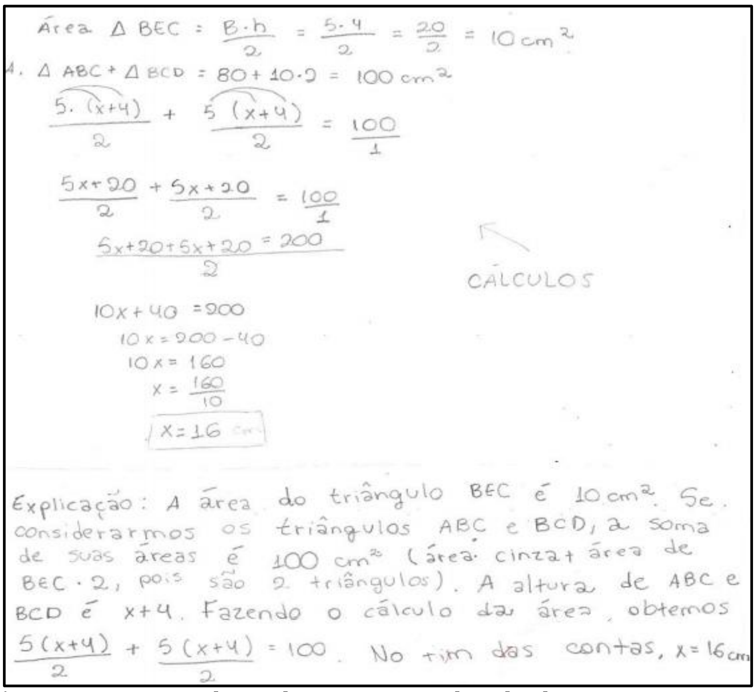


Sabendo-se que BC mede 5 cm, EF mede 4 cm e que a soma das áreas em cinza é igual a 80 cm^2*, determine o valor de x, medida do segmento EG.*

Fonte: Tarefa de avaliação, ciclo 3 (ano).

Resolução de Maria

Maria inicia a resolução da tarefa efetuando o cálculo da área do triângulo BEC, em relação ao qual são fornecidos os valores da base (BC = 5cm) e da altura (EF = 4cm), chegando ao valor de $10\,cm^2$ (Figura 5). Na sequência, a aluna constrói uma equação envolvendo as áreas dos triângulos ABC e BCD. A aluna apresenta na parte inferior uma nota de "explicação", referindo que a soma das áreas dos triângulos em questão é 100 cm^2 por se tratar da área cinza (que é dada e equivale a 80 cm^2) somada com o dobro da área de BEC (já calculada). A aluna justifica essa multiplicação por dois da área de BEC ao referir que "são dois triângulos", ou seja, que a sua área está sendo considerada duas vezes.


Área Δ BEC : $\frac{B \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10\,cm^2$

Δ ABC + Δ BCD = 80 + 10·2 = 100 cm^2

$\frac{5 \cdot (x+4)}{2} + \frac{5\,(x+4)}{2} = \frac{100}{1}$

$\frac{5x+20}{2} + \frac{5x+20}{2} = \frac{100}{1}$

$\frac{5x+20+5x+20}{2} = 200$

$10x + 40 = 200$

$10x = 200 - 40$

$10x = 160$

$x = \frac{160}{10}$

$\boxed{x = 16\ cm}$

CÁLCULOS

Explicação: A área do triângulo BEC é 10 cm². Se considerarmos os triângulos ABC e BCD, a soma de suas áreas é 100 cm² (área cinza + área de BEC · 2, pois são 2 triângulos). A altura de ABC e BCD é x+4. Fazendo o cálculo da área, obtemos $\frac{5(x+4)}{2} + \frac{5(x+4)}{2} = 100$. No fim das contas, x = 16 cm

Figura 5 – Registro da resolução apresentada pela aluna Maria para a tarefa 2
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Na sequência, a aluna menciona que a altura dos triângulos ABC e BCD é a mesma e equivale a (x + 4) e monta a equação seguinte que possui x como incógnita:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

$\frac{5(x+4)}{2}+\frac{5(x+4)}{2}=100$. No primeiro membro da equação temos as duas frações que representam as áreas de ABC e BCD, que são iguais por possuírem a mesma base (5cm) e mesma altura (x + 4). Por fim, a aluna aplica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma nos numeradores das frações e resolve a equação, encontrando o valor correto de 16 cm para x.

Resolução de Rita – Parte 1:

Rita inicia a sua resolução (Figura 6) na tentativa de "saber x", considerando o quadrilátero ABCD. Tal quadrilátero representa um trapézio. A aluna não se recorda do nome do quadrilátero em questão, mas refere, corretamente, que sua área é dada pela expressão: $\frac{(BC(5cm)+AD).h}{2}$, sendo que BC representa a base menor, AD representa a base maior e h, a altura.

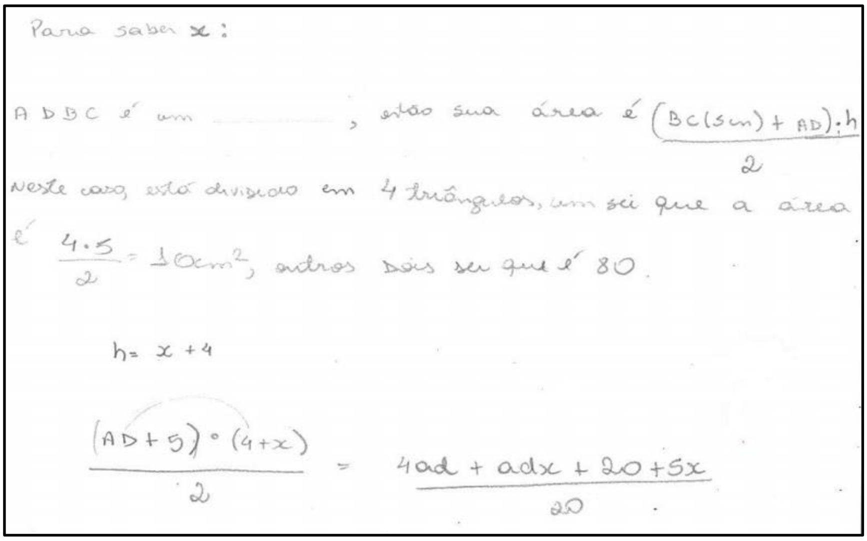


Figura 6 – Registro da primeira parte da resolução apresentada pela aluna Rita para a tarefa 2.
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

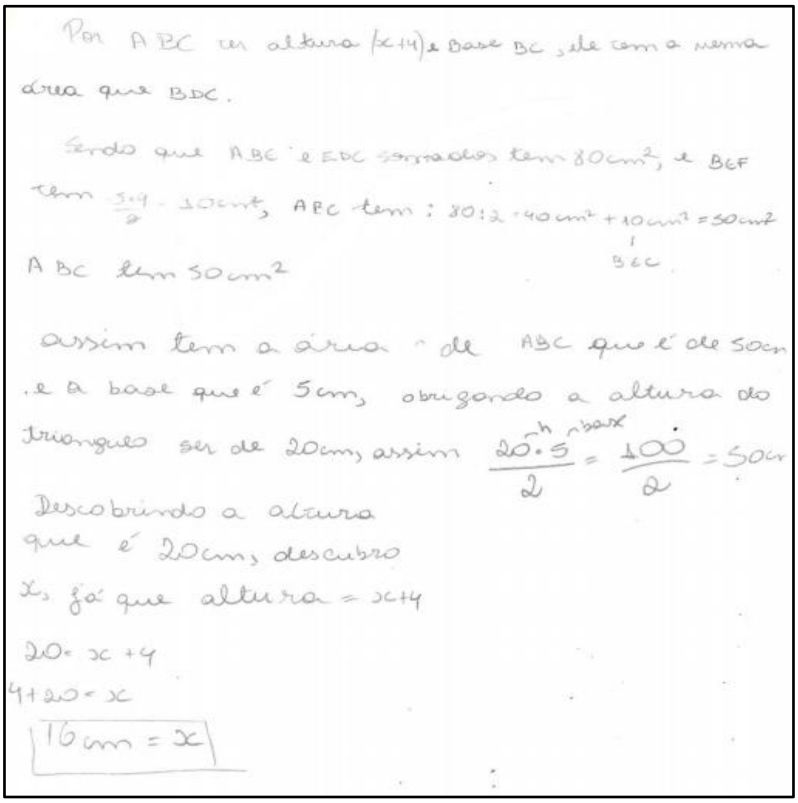
Na sequência, Rita refere que o quadrilátero "está dividido" em 4 triângulos. Destes triângulos, destaca que um (BCE) possui como área $10\,cm^2$ (apresenta o cálculo) e que a soma dos outros dois (ABE e CED) é 80 cm^2. Entretanto, como a área do triângulo ADE não é fornecida, Rita não consegue construir uma equação. Assim, mesmo escrevendo o valor de h como sendo (x + 4), a expressão da área total do trapézio permanece com duas variáveis: o valor de x e do segmento AD. Ademais, o valor da área do trapézio (necessário para se montar a equação) também é desconhecido. Rita chega a aplicar a propriedade distributiva da

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

multiplicação em relação à soma, mas não consegue avançar na solução, pois falta-lhe justamente estes dois elementos que não são fornecidos na tarefa, nomeadamente a dimensão do segmento AD e a área do triângulo ADE. Rita passa então para outra abordagem no verso da folha.

Resolução de Rita - Parte 2:

Na sua segunda tentativa de resolução (Figura 7), Rita inicia justificando que os triângulos ABC e BDC têm mesma área por possuírem mesma altura (x + 4) e a mesma base (BC). Na sequência, deduz a área do triângulo ABC como sendo de 50 cm^2.


Por ABC ter altura (x+4) e base BC, ele tem a mesma área que BDC.

Sendo que ABC e BDC somados tem 80cm², e BEF tem $\frac{5\cdot4}{2}$ = 10cm², ABC tem : 80:2 = 40cm² + 10cm² = 50cm²
BEC

ABC tem 50cm²

assim tem a área de ABC que é de 50cm e a base que é 5cm, obrigando a altura do triangulo ser de 20cm, assim $\frac{\overset{h}{20}\cdot\overset{base}{5}}{2} = \frac{100}{2} = 50$cm

Descobrindo a altura que é 20cm, descubro x, já que altura = x+4

20 = x + 4
4+20 = x
$\boxed{16\text{cm} = x}$

Figura 7 – Registro da segunda parte da resolução apresentada pela aluna Rita para a tarefa 2
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Embora este resultado esteja correto, ao tentar justificar, a aluna acaba por confundir o triângulo BEF com o triângulo BEC. Ademais, não justifica o porquê de ter divido a área cinza (80 cm^2) por dois, de modo que os triângulos ABE e CEF tenham mesma área. Na sequência, a aluna concentra-se na área do triângulo ABC, cuja base e área são conhecidas. Com essas informações, refere que “a altura do triângulo obrigatoriamente deve ser de 20 cm”. Por fim, referindo que a altura é dada por (x + 4) monta a equação 20 = x + 4 e a resolve. Mesmo se confundido na resolução (escreveu 4 + 20 = x ao invés de 20 – 4 = x) apresenta o resultado

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

correto de $x = 16$ cm.

Processos e tipos de raciocínio na tarefa 2

Nessa tarefa, tanto Maria quanto Rita parecem fazer uso de um processo de raciocínio próximo da dedução. Em primeiro lugar, embora as estratégias adotadas pelas alunas sejam um tanto distintas, tanto em um caso quanto no outro é de destacar a forma proficiente com que conseguiram relacionar conceitos e, principalmente, o fato de apresentarem de um modo muito claro a explicação e a justificação dos passos seguidos. Em ambos os casos é possível observar, tal como referido pelo NCTM (2009), a atividade de significação realizada pelas alunas, uma vez que conseguem realizar um entendimento da situação conectando-a com o conhecimento existente.

Cabe também destacar que os processos de raciocínio utilizados pelos alunos, mesmo quando a resolução não é levada a bom termo ou que faltam elementos para continuar (tal como foi o caso da primeira tentativa de resolução de Rita), também devem ser objeto de uma atenta análise pelo professor, pois tais registros podem trazer indícios importantes dos processos de raciocínio utilizados. Infelizmente quando o aluno consegue resolver por outra via e empregando outra estratégia, esse registro inicial, muito rico para uma análise pormenorizada, acaba não sendo conservado. No caso concreto de Rita, mesmo a tentativa que não logrou êxito na resolução (e que foi conservada), acabou por demonstrar a forma proficiente como a aluna conseguiu conectar a situação com conceitos que já eram do seu conhecimento (como foi o caso da área do trapézio).

Representações na tarefa 2

Nesta tarefa, tanto Maria quanto Rita não apresentam dificuldade na conversão da linguagem natural para a algébrica. Maria escreve "se considerarmos os triângulos ABC e BCD, a soma de suas áreas é 100 cm^2 (área cinza + área de BEC . 2, pois são 2 triângulos)" e a seguir apresenta a equação em linguagem algébrica. Inês faz o mesmo ao considerar a área do triângulo ABC. Assim, ambas as alunas conseguiram realizar a transformação de conversão das duas representações semióticas. Também foi identificada a transformação de tratamento no interior do mesmo registro. Tal ocorreu, com ambas as alunas, quando resolveram algebricamente as equações (Maria com a equação que relacionava as áreas dos triângulos ABC e BCD e Rita, tanto na equação que envolveu a área do trapézio, quanto a do triângulo ABC).

6 Conclusão

Neste trabalho, realizamos uma análise interpretativa a partir das resoluções individuais dos alunos na resolução de tarefas. Poderia ser interessante a realização de entrevistas clínicas individuais como meio complementar na coleta de dados. Ademais, a realização de entrevistas poderia lançar mais luz sobre a relação intrincada e orgânica evidenciada entre os raciocínios abdutivos e indutivos e, de um modo mais específico, ajudar a responder como os exemplos dados na tarefa (como, por exemplo, na primeira tarefa) são utilizados nestes raciocínios: servem mais para conjeturar uma generalização por abdução ou servem mais ao propósito de se iniciar um processo de raciocínio indutivo? Tal questão fica em aberto e a ser dirimida em futuras investigações neste domínio.

Este estudo, tal como o de Mata-Pereira e Ponte (2011), aponta para uma grande potencialidade do recurso à Álgebra (domínio da linguagem algébrica) na realização das justificações dos alunos. Os alunos que assim o fizeram também conseguiram diversificar os seus registros semióticos de representação e a coordenação destes registros (DUVAL, 2006). Um aluno recorreu, no entanto, a um raciocínio mais visual e respondeu de modo correto e válido à primeira tarefa. Sobre este aspecto, assim como referido por Rivera e Becker (2009) também endossamos a ideia de que, “embora as abordagens visuais sejam poderosas, ressaltamos a importância das abordagens numéricas na generalização de atividades que não envolvem elementos visuais” (RIVERA; BECKER, 2009, p. 220).

Diferentemente do que foi referido por Mata-Pereira e Ponte (2012), que apontaram em seu estudo que a justificação não tinha sido espontânea nos alunos, mas sim decorrente de questionamentos realizados pelo professor, neste estudo tal situação não ocorreu. Os alunos conseguiram realizar as suas justificações sem serem instados pelo professor, apresentando-as de um modo muito organizado. Tal questão parece estar associada ao modo como as tarefas foram colocadas aos alunos e também ao fato destes alunos serem medalhistas em Olimpíadas de Matemática, certames em que a justificação assume um caráter essencial, principalmente nas provas dissertativas (tal como ocorre na segunda fase da OBMEP). Como consequência, reforçamos que a pesquisa sobre os processos de raciocínio dos alunos poderia considerar mais estes alunos, justamente por serem bons informantes.

Este estudo proporcionou uma maior compreensão sobre os processos de raciocínio de alunos de 9º ano do Ensino Fundamental participantes em Olimpíadas durante a realização das tarefas de cunho aritmético/algébrico e geométrico. Identificamos uma generalização baseada em representações geométricas de alguns alunos e o emprego mais articulado e orgânico entre abdução, indução e prova por parte de outros alunos. Verificamos, ainda, que alguns alunos fazem uso recorrente de exemplos, evidenciando raciocínio abdutivo e indutivo. Identificamos a existência de graus distintos de proficiência ao nível algébrico, por parte dos alunos, com consequências no alcance dos raciocínios realizados.

Por fim, destacamos como algo extremamente necessário (e até urgente) que o professor detenha um conhecimento aprofundado sobre os processos de raciocínio dos alunos e, principalmente, consiga refletir a partir destes processos a fim de promover um ensino de Matemática com significação e sentido. Para que isso ocorra, também é importante considerar o papel de relevo desempenhado pelo raciocínio tanto no âmbito do desenvolvimento curricular quanto das práticas profissionais do professor.

Agradecimento

A investigação teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Referências

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: a structural approach. **Synthese**, Amsterdam, v. 134, n. 1-2, p. 25 - 44, 2003.

BATTISTA, T. B. Mathematical Reasoning and Sense Making. *In*: BATTISTA, T. B; BAEK, J. M.; CRAMER, K.; BLANTON, M. (ed.). **Reasoning and sense making in the mathematics classroom grades 3 – 5**. Reston: NCTM, 2017. p. 1–22.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

ERICKSON, F. Qualitative research methods for science education. *In*: FRASER, B.; TOBIN, K.; MCROBBIE, C. (ed.). **Second international handbook of science education.** Dordrecht: Springer, 2012. p. 145–1469.

GOLDIN, G. Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. *In*: ENGLISH, L. D. (ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York: Taylor & Francis, 2008. p. 176-201.

GREENO, J.; HALL, R. Practicing representation: learning with and about representational Forms. **Phi Delta Kappan**, Bloomington, v. 78, n. 5, p. 361-367, jan. 1997.

HENRIQUES, A. C. O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a04

com alunos universitários. **Quadrante**, Lisboa, v. 21, n. 2, p. 139–164, 2012.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 96, n. 1, p. 1-23, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning**: Pre-K-Grade 8. Reston: NCTM, 2011.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano. In: **Atas do encontro de investigação em educação matemática** 2011, Póvoa do Varzim. p. 347-364.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em conjunto numérico: uma investigação no 3º ciclo. **Quadrante**, Lisboa, v. 21, n. 2, p. 81–110, 2012.

NCTM. **Focus in high school mathematics**: Reasoning and sense making. Reston: NCTM, 2009.

NCTM. **Princípios para a Ação**: Assegurar a todos o sucesso em matemática. Lisboa: APM, 2017.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 100, p. 3–9, 2008.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

RADFORD, L. Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Context. **ZDM**, Heidelberg, v. 40, n. 1, p. 83–96, 2008.

RIVERA, F.; BECKER, J. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teacher in the Middle School**, Reston, v. 15, n. 4, p. 212–221, 2009.

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 11, n. 4, p. 258–288, 2009.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

Submetido em 13 de Novembro de 2021.
Aprovado em 26 de Janeiro de 2022.