

Los Sistemas de Numeración Aymara: cambios y Valor Formativo

Aymara Numbering Systems: changes and Formative Value

Henry-Mark **Vilca-Apaza***

 ORCID iD 0000-0001-6982-7645

Saúl **Bermejo-Paredes****

 ORCID iD 0000-0001-9885-7974

Danitza Luisa **Sardón Ari*****

 ORCID iD 0000-0001-7285-2403

Resumen

La etnia aymara llegó al Altiplano peruano en el siglo XI y, luego de conquistar a los Pukinas, se asentó a orillas del lago Titicaca, Perú-Bolivia. Para atender sus necesidades de contabilidad y organización, desarrolló un sistema de numeración, acorde a su contexto geográfico y de la mano con el sincretismo cultural, consecuencia de las conquistas. En ese marco, fue objetivo del presente artículo, identificar, analizar y sistematizar el sistema de numeración del pueblo aymara. La metodología empleada fue el cualitativo-etnográfico, consistente en visitas de campo y entrevistas a los mayores y jóvenes de las comunidades intervenidas, y revisión de fuentes documentales de la época colonial (1612 y 1616), respaldado por el enfoque de la Etnomatemática. Los resultados muestran que existen dos sistemas de numeración, y no solo uno como hasta ahora se creía, que actualmente se yuxtaponen: el originario de base quinaria que guarda información cuantitativa y cualitativa, sobre el que se estructuró el sistema numérico de base decimal, eminentemente oral.

Palabras clave: Etnomatemática. Cosmovisión. Numeración aymara. Sistema decimal. Simbología.

Abstract

The Aymara ethnic group arrived in the Peruvian Altiplano in the 11th century and, after conquering the Pukinas, settled on the shores of Lake Titicaca, Peru-Bolivia. To meet its accounting and organization needs, they developed a numbering system, according to their geographical context and hand in hand with cultural syncretism, a consequence of the conquests. Within this framework, the objective of this article was to identify, analyze, and systematize the numbering system of the Aymara people. The methodology used was qualitative-ethnographic, consisting of field visits and interviews with the elderly and young people of the intervened communities, and a review of documentary sources from the colonial era (1612 and 1616), supported by the Ethnomathematics approach. The results show that there are two numbering systems, and not just one, as was previously believed, that are currently juxtaposed: the original one with a quinary base that stores quantitative and qualitative information, on which the decimal base number system was structured, eminently oral.

Keywords: Ethnomathematics. Worldview. Aymara numbering. Decimal system. Symbolology.

* Doctor en Educación por la Universidad Alas Peruanas (UAP). Docente investigador Instituto de Investigaciones Sociales “José A. Encinas” – Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNAP), Puno, Perú. E-mail: hvilca@unap.edu.pe.

** Doctor en Educación por la Universidad Inca Garcilazo de la Vega (UIGV). Docente investigador Instituto de Investigaciones Sociales “José A. Encinas” – Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNAP), Puno, Perú. E-mail: saulbermejo@gmail.com.

*** Doctora en Educación por la Universidad Nacional del Altiplano (UNAP). Docente auxiliar de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNAP), Puno, Perú. E-mail: danitzaluisa@gmail.com.

1 Introducción

1.1 Historia, educación intercultural y etnomatemática aymara

Los aymaras, integrante de la familia lingüística *Aru* junto al *Kawki* y *Jaqaru* (HARDMAN, 1966), siguiendo la teoría inmigracionista de Alex Hrdlicka, son descendientes de aquellos pobladores, de procedencia fenicia, que cruzaron el Estrecho de Bering para poblar América del Sur hace 20.000 años, que luego de trajinar de norte a sur, arribaron tardíamente al Altiplano peruano hacia el siglo XI, en varios grupos aymarófonos (VILCA *et al*, 2018), al parecer, de manera violenta (TORERO, 2002), y se propagaron en los siglos XII y XIV (CERRÓN-PALOMINO, 2010). Según Cieza de León (1962[1553]), salieron del valle de Coquimbo y conquistaron a los Tiwanaku (BOUYSSSE-CASSAGNE, 1988) de habla pukina, descendiente de los *arawaks*, los primeros en habitar el Altiplano peruano hace 10.000 años, de quienes se nutrieron lingüística y culturalmente. En el siglo XV, fueron sometidos por los incas, formándose un conglomerado de culturas cuyo desarrollo se vería interrumpido con la conquista española, en el siglo XVI, llamándoseles en adelante *indígenas* e *indios*.

En periodo republicano, siglo XX, la educación oficial *asimilacionista* y *castellanizante* tuvo el propósito de civilizar al *indio*, a fin de incorporarlo al Estado-nación (VILCA *et al*, 2018). En ese contexto, la didáctica castellana suscitó, como en la actualidad, problemas en el área de matemática. La enseñanza del sistema de numeración, tema clave en los primeros grados (6 a 7 años de edad), por ser la etapa en la que se manifiesta la elaboración temprana de conceptualizaciones numéricas originales (TERIGI; BUITRON, 2013), está relacionada al fracaso escolar (TERIGI; WOLMAN, 2007). Si bien importantes, las matemáticas son una de las materias peor comprendidas (BISHOP, 1999).

En un contexto aborígen, durante el aprendizaje de la numeración castellana, el niño aymara pronuncia *dieciuno* (11 = once) o *diecicinco* (15 = quince), en la lógica de diecisiete (17). Esta respuesta, errada para el profesor, quien no se explica el por qué, es causa de mofa que genera baja autoestima y deterioro de la identidad cultural. Entonces, esta escuela de vacío cultural y lingüístico, se convierte en un agente de aculturación (SALAS; GODINO; QUINTRIQUEO, 2016), un puente de escape cultural que, más allá del problema cognitivo, enseña al niño a negar su cultura y a amar lo ajeno, a creer que es ignorante y sin capacidad de abstracción, gente con cultura atrasada (SÁNCHEZ, 2009), afectándose, así, su dignidad humana. Los padres dicen: *janiwa wawajaxa nayjamañapakiti*; o sea: *no quiero que mi hijo sufra como yo*.

Situación distinta sería si el profesor conociera la naturaleza del sistema de numeración aymara y su morfosintaxis. Le ayudaría a corregir sin lastimar. En la actualidad, en la etapa de formación inicial y continua de formadores se trabaja la metodología intercultural, el *cómo enseñar*; pero, aún es débil el conocimiento especializado de la cultura, el *qué enseñar*, para nutrir el currículo, que, en el caso de Puno, se tiene al Proyecto Curricular Regional – PCR, que incorpora la enseñanza de la matemática propia, pero hace falta el insumo cultural. Es importante “reconstruir el conocimiento matemático del estudiante para proponer diseños didácticos que articulen este conocimiento con la matemática escolar” (SALAS; GODINO; QUINTRIQUEO, 2016, p. 497); sin embargo, los estudios sobre el sistema de numeración aymara son más de enfoque lingüístico que numérico (BIZARRO; VILCA; SUCARI, 2020; PILARES CASAS, 2005), requiriéndose estudios matemáticos especializados. Se centran, prioritariamente, en números básicos, obviando analizar y sistematizar el conjunto de los números, vacío que es notorio en los mayores como *millón*, que en la praxis erradamente suele llamarse *milluna*, además de desconocerse la denominación para *cero*, que no existe en las etnias venezolanas (SÁNCHEZ, 2009), profundización que es sugerida por Sánchez (2012).

Una educación matemática pertinente requiere de un currículo intercultural abierto a otras racionalidades, que incorpore el saber indígena o las prácticas extraescolares (OLIVERAS; BLANCO-ÁLVAREZ, 2016). Se requiere la formación de verdaderos profesores etnomatemáticos, reflexivos, creativos y no meros consumidores de la matemática occidental (BLANCO-ÁLVAREZ; FERNÁNDEZ-OLIVERAS; OLIVERAS, 2017; OLIVERAS; BLANCO-ÁLVAREZ, 2016; SALAS; GODINO; QUINTRIQUEO, 2016).

Además del manejo didáctico-matemático intercultural (BLANCO-ÁLVAREZ; FERNÁNDEZ-OLIVERAS; OLIVERAS, 2017), como sucede en Perú, es preponderante que los profesores, para acercarse al niño, científica y pedagógicamente, se nutran del léxico y conocimiento especializado, además del respeto a su lengua (ESPINOSA; JIMENEZ, 2019) y cosmovisión, claves para el desarrollo del pensamiento (LIZARZABURU; ZAPATA, 2001).

Hoy, la escuela rural bilingüe, además de favorecer el desarrollo del pensamiento, revalorar los saberes ancestrales y la identidad, tiene un reto mayor, el devolverle su dignidad, su humanidad como hombre, como ente social y natural, premunido de valores y principios sociales. La declaratoria de los derechos humanos y los enfoques de desarrollo humano sostenible dejan ver que “la hominización es capital para la educación de la condición humana” (MORÍN, 1999, p. 24), requisito *sine qua non* para tener calidad de vida, individual y social. Ante esta realidad, ¿puede la matemática y la enseñanza de la numeración aymara formar valores en el aymara y en la humanidad? Consideramos que sí, aunque a menudo se piensa que

solo sirve para cuantificar o razonar matemáticamente. La didáctica de los sistemas de numeración no solo puede ayudar en la formación matemática, sino a la vitalización de aspectos específicos de la cultura indígena (CORTINA; ROJAS, 2016).

Lo descrito motivó que el estudio tenga por objetivo identificar, analizar el significado y reglas de composición y sistematizar el conjunto del sistema de números cardinales del pueblo originario aymara, del Perú, a fin que pueda servir como material de consulta e insumo para un currículo en el marco de la educación matemática intercultural en los procesos de formación inicial y continua de profesores etnomatemáticos.

El estudio se realizó en el marco del programa de investigación etnomatemática de D'Ambrosio (2005), definida como el estudio de procesos matemáticos, símbolos, jergas, modelos de razonamiento practicados por grupos culturales identificados; siendo sus fuentes primarias, los documentos escritos, monumentos y artefactos, además del comportamiento cotidiano y el conocimiento común (D'AMBROSIO, 2012, citado por AROCA ARAUJO, 2016). Entonces, es válido pensar que el aymara, un pueblo eminentemente oral, como cualquier etnia, sintió la necesidad de matematizar (DESPOT BELMONTE, 2010), de agrupar, acuñando su propio lenguaje; o que aborígenes de África lograran desarrollar maneras de describir números muy grandes (ZASLAVSK, 1973, citado por BISHOP, 1999). Sin embargo, para Aroca (2016), la etnomatemática va más allá de la definición etimológica, no sólo es sociocultural, es también lo histórico, lo político, lo pedagógico, lo psicológico, lo lingüístico, lo didáctico; y además:

El Programa Etnomatemática no pretende llenar de adornos las clases de matemáticas; tampoco substituir la matemática académica; se trata de promover un diálogo entre la matemática académica y la matemática local (...) lo interesante de esto es que cuando se ponen en juego como mínimo dos formas diferentes de pensamiento matemático, (...), cada uno aprende del otro y se pueden llegar a valorar mutuamente (AROCA, 2016, p. 188).

Por otro lado, el marco de la relatividad epistémica permite valorar los conocimientos más allá de lo científico (QUIDEL CATRILAF; SEPÚLVEDA OBREQUE, 2016). La Cognición Situada y el Relativismo Cultural (OLIVERAS; ALBANESE, 2012), dan realce a las maneras de pensar matemáticamente en forma contextualizada. La matemática es un proceso que se desarrolla en las prácticas culturales específicas (OLIVERAS; ALBANESE, 2012), por ello, no cabe generalizaciones absolutas y universales (SILVA; CALDEIRA, 2016).

En esa línea, no cabe ya el término matemática sino matemáticas. Siguiendo a Bishop (1999), la actividad de contar no es exclusiva de un pueblo, existe una gama de sistemas de contar. El problema está en que esta matemática aborígen no sintoniza con la de la escuela. A la educación oficial le falta entender que la matemática es un producto cultural, siendo así, la

educación matemática debe propiciar su relación con la cultura, más aún en espacios de diversidad cultural. No es suficiente enseñar las matemáticas, sino educar *mediante* las matemáticas y *con* las matemáticas, o si se quiere, generar situaciones de interacción niño-objeto de conocimiento (TERIGI; WOLMAN, 2007).

2 Metodología

2.1 Tipo de investigación

Corresponde al enfoque cualitativo, con la metodología del Estudio de caso etnográfico (ANDRÉ, 2008), que facilitó adentrarse a las comunidades, secundado del método descriptivo-analítico, orientado a la sistematización y análisis contrastivo de la información recogida desde la literatura y la vivencia comunitaria de los pueblos.

2.2 Participantes del estudio

El área de intervención fueron las comunidades originarias aymaras de Moho (zona norte) y Pilcuyo (zona sur), del departamento de Puno, ubicado en la región andina, al sur de Perú, a orillas del lago Titicaca, a una altitud de 3810 m.s.n.m. En el estudio participaron seis comuneros de habla aymara, seleccionados por su conocimiento: EM1 (Felisa) y EM2 (Rosa) de Moho, de 80 y 78 años de edad, respectivamente, EP1 (Francisca, antigua tejedora) y EP2 (Miguel; mediador y traductor bilingüe) de Pilcuyo de 71 y 70 años, y dos jóvenes comerciantes EPJ1 y EPJ2 de 23 y 21 años de edad.

2.3 Método de recolección y análisis de datos

Se emplearon tres técnicas de recolección de datos: la visita de campo, la entrevista y el análisis documental. La primera, ayudada de un diario de campo y la toma de fotografías de evidencias, consistió en realizar observaciones y conversaciones, con los comuneros, en cuatro oportunidades, en el periodo de 2015 a 2020, recogiendo evidencias e información sobre la cosmovisión, la praxis social y el significado de la simbología numérica. La entrevista, previo consentimiento, y con ayuda de una grabadora de voz, tuvo lugar en la vivienda de los informantes, recabándose información oral sobre los vocablos numéricos aymaras y sus

cambios, a través de preguntas y repreguntas como *¿Qhawqhasa ukanxa? o ¿kunjamasa jakt'añaxa?* (¿Cuánto hay? o ¿Cómo se cuenta?), registrada en la Ficha de Registro de Vocablos (FRV), un listado de vocablos numéricos castellano-aymara previamente estructurada. El análisis documental, consistió en la búsqueda de vocablos matemáticos en documentos coloniales, escritos por los primeros españoles clérigos arribados al Altiplano peruano en sus afanes de evangelizar, como el *Vocabulario de la Lengua Aymara*, de 1612, de Bertonio y el *Arte de la Lengua Aymara*, de Diego De Torres, de 1616, para corroborar cambios y suplir los vacíos de la oralidad, secundados con textos relativamente recientes.

Previo a la presentación de términos numéricos de los sistemas de numeración aymara en cuadros, se procedió a analizar su estructura morfosintáctica y reglas de composición numérica, así como a corregir fonológica y morfosintáctica los mismos, de acuerdo al alfabeto aymara aprobado por Resolución Ministerial N° 1218-85-ED del Ministerio de Educación Perú, estructurado en base a las grafías del alfabeto castellano.

3 Resultados y discusión

3.1 Sistema de numeración quinario

La visita de campo permitió ubicar la lito-escultura de Pukara, primera civilización Altiplánica de Perú, anterior a Tiwanaku (VILCA *et al*, 2018), a 85 km al norte de Puno. Dicho monolito guarda grabada la doble espiral en alto relieve, registrada también en mantas (*llijllas*) y textilería en general, de las comunidades de Moho y Pilcuyo. Por las aproximaciones teórico-cosmológicas de Schoeder (2001), se advierte que la doble espiral también forma parte del conjunto de cinco espirales cuadráticas del pueblo quechua, siendo, en el mundo aymara, de forma circular y parte de un sistema numérico de base quinaria, inadvertido por Schoeder, viva en el vocabulario de los participantes.

El Cuadro 1 muestra las grafías del sistema de numeración simbólica aymara.

				
UNO Maya	DOS Paya	TRES Kimsa	CUATRO Pusi	CINCO Qallqu
1	2	3	4	5

Cuadro 1 – Sistema numérico quinario aymara
Fuente: recreación propia

La espiral simple representa al número *uno* (*maya*), que tiene su génesis en el charco de agua, *uma jaljtiri* (EP1-2) (ondas expansivas). Este movimiento simboliza el inicio primigenio o pre-manifestación de la vida (SCHOEDER, 2001), el principio de todo para los *arawak* (DE LA HOZ; PACHECO; TRUJILLO, 2016). Sin embargo, a diferencia del pueblo quechua y *arawak*, no es aún la unidad. Siendo un movimiento unidireccional, representa al elemento impar, y por lo tanto incompleto (varón, positivo, día, frío etc.). *Chacha sapasti, ch'ullakiwa. Janiwa aka wiranxa ch'ullaki sarnaqsnati, payatapuniwa taqikunasa* (EM1) (El varón es impar. En esta vida, no debemos andar solos, todo es par). *Yuqallaxa janiwa karjunaka katuqkaspati, panichasiñapawa* (EP1) (El soltero (impar) no puede asumir responsabilidades socio-políticas, antes, debe casarse, ser persona). Estas frases reflejan la necesidad de complementarse en par, dando lugar al opuesto complementario (contradicción), la doble espiral, a la cosmovisión paritaria (varón/mujer, positivo/negativo, día/noche etc.). Veamos las Figuras 1 y 2.



Figura 1 – Doble espiral en los monolitos de Pukara, Puno, Perú
Fuente: tomada por el autor (2015)



Figura 2 – Doble espiral en la textilería aymara – Puno, Perú
Fuente: tomada por el autor (2018)

Como se advierte, la doble espiral, en la lito-escultura y textilería aymara (Figuras 1 y 2), representa al número *dos* (*paya*), y a la vez, al pensamiento paritario, que el aymara llama *payacha* o *parisa* (EP1-EM2). Es la filosofía *chacha-warmi* (varón/mujer) que enseña que el varón no podría/debería vivir sin la mujer, y viceversa. Ambos se tornan en sí para formar la unidad, cobrando sentido la frase social relevante: *la paridad o 2 es la unidad*. Bajo este principio, la forma de vivir aymara está regida por la paridad.

El frío del Altiplano es tan necesario como el calor, el día necesita de la noche para generar vida, el hombre necesita de la *pachamama* (tierra) y de sus semejantes (hombre, animal o cosa). *Ukatì taq'xañanixa, janiwa walikaspati* (EM1) (*La ruptura de la paridad, significa*

desequilibrio). El aymara expresa su profunda empatía, respeto y sensibilidad por el *otro* al decir: *jani papa jaqurpayampti, jachirikchisa* (EP1) (*no botes la papa, quizá pueda llorar*) o *kunjamaraki walisnaxa, mayni jani manq'añanikanixa* (EM2) (*cómo podemos vivir bien, si el otro vive mal*).

De las observaciones y entrevistas se deduce que muchas prácticas culturales aymaras tienen como fundamento la paridad, y es que, simbólicamente, nada es *ch'ulla* (incompleto), todo es par (DESPOT BELMONTE, 2010). El *siku* (zampoña), instrumento musical, es tocado por dos personas, *Arka* e *Ira*, de cuya interacción armónica nace la música. El espacio está dividido en *alasa* y *maasa* (arriba y abajo). El mundo aymara (*pacha*) comprende dos espacios y no tres como se pensaba: *Alaxa pacha* y *manqha pacha* (mundo de arriba y abajo). El *Aka pacha* (este mundo), el tercer elemento, es la resultante del choque de los dos mundos. El encuentro armónico genera el tercer elemento representado por la espiral triple, que matemáticamente es *tres* (*kimsa*), y cosmovivencialmente, el hijo (*wawa*) o la vida, como indica Schoeder (2001), resultado inevitable del complemento de los dos opuestos (DESPOT BELMONTE, 2010).

La espiral cuádruple representa al número *cuatro* (*pusi*) y, a la vez, a la complementariedad necesaria del hijo (Cuadro 1). *Wawaxa janipuni sapäkaspata* (EP1) (*el hijo no puede caminar solo*). Expresión que refleja la colectividad, las cuatro estrellas de la *Chakana* (Cruz del Sur). *Chakanjamañasawa, yañapt'asiña, mayakiña* (EP1) (*Debemos ser unidos como la Chakana*). La nación aymara estuvo organizada administrativamente en cuatro regiones, denominada *pusisuyu* (*pusi* = cuatro, *suyu* = región), unidas por una quinta, la capital *qallqu*, que según los aymaras es la convergencia de cuatro elementos, concurrencia de políticas, ideas, personas etc. Es la unidad que debe existir en la colectividad y diversidad.

El aymara considera que todos son hijos de la *pachamama*. *Taqipachawa, uywasa, jaqisa, mayakitawa* (EM1) (*Todos, sea persona o animal, somos uno*). *Tunupaxa, mäpitata taqikuna luriritaynaxa siriwa aukijaxa* (EP1) (*Mi padre decía que Tunupa creó en un solo acto todo lo que existe*). El aymara concibe que nadie es más y que nadie es menos, que el hombre no es el dueño de la tierra. Su representación gráfica, según Arias (2005), sería la doble espiral (tiempo y espacio = *pacha*), basada en dos pirámides de base cuadrada unidas por sus puntas (*qallqu*) (ver Cuadro 1).

Hay pueblos, como los aborígenes de Australia que, por la riqueza de lenguaje, muestran apego a sus números pequeños, cuando la matemática occidental insiste en realizar cálculos con números grandes (BISHOP, 1999). En esa línea, reconstruir el sistema numérico ancestral aymara es reconstruir el pensamiento aymara, su cosmovisión, su forma de ver la vida social y

natural, para vivir mejor. El sistema numérico aymara, al igual que otros sistemas de conteo como el Guaraní (SILVA, CALDEIRA, 2016), quechua (SCHOEDER, 2001), Banda de África Central, donde veinte es *hombre completo* (PILARES CASAS, 2005) y Arawak (DE LA HOZ; PACHECO; TRUJILLO, 2016), cumple diversas funciones sociales (URTON, 2003). Encierra una categoría matemática cuantitativa y cualitativa, registro de su cosmovisión.

Sus números son fuente de educación de principios y valores, que rigen la vida social y natural del aymara, como la tolerancia, la armonía, el respeto por el *otro*, el amor por toda forma de vida (la *Pachamama* entera), lo que no sucede con la enseñanza de la numeración eurocéntrica, en una escuela que promueve más bien el racismo epistémico. Su potencial está, además de su valor matemático, en la información cosmológica que guarda cada número-espiral. Enseñar esta numerología casi olvidada tiene una ventaja para la formación de valores sociales y principios (actitudes sociales), casi extintos en las nuevas generaciones. Enseña a sentir y pensar, social y ecológicamente, para vivir bien en sociedad y con la naturaleza.

El Cuadro 1 muestra las cinco grafías (1 al 5) y lexemas del sistema numérico ancestral aymara, basado en espirales. Obsérvese que el número 5, se denomina *phisqa* (PILARES CASAS, 2005; SCHOEDER, 2001). Consideramos que *phisqa* es una denominación tardía, asimilada en época Inka (quechua), y colegimos que su denominación ancestral fue *qallqu*, en razón de los deuterolexemas *päqallqu* y *kimsaqallqu* compuestos sobre *qallqu*, subyacente en el actual sistema decimal. Pilares Casas (2005), quien estudió la numeración aymara, no supo explicar la procedencia de *qallqu* en el aymara sureño, menos su significado.

Se limitó a indicar, que no existe relictos del protolexema *qallqu* en el aymara central-Lima (*Kawki* y *Jakaru*). El estudio postula la hipótesis de que *qallqu* es vocablo Pukina, pueblo originario del Titikaka, llegado hace 10.000 años, a quienes los aymaras conquistaron y de quienes asimilaron su cultura (VILCA *et al*, 2018). Según los examinados, provendría de la palabra *qallu* (EP1-EM2) (*mitad de algo, una sola mano*). *Mä k'anaxa, pusita kattapisnwa lurañaxa* (EP1) (*una trenza se hace de cuatro hileras*). Las cuatro hileras juntas hacen *qallu*, y *qallu* más *qallu* resulta diez, *tschukhara* (*dos manos juntas*) en lengua Uro chipaya (familia pukina) (ARIAS, 2005), del cual se derivó el término actual *tunka* (diez) y no del quechua, como indican Pilares Casas (2005) y Schoeder (2001).

La presencia de los deuterolexemas *päqallqu* (*paya 2 + qallqu 5*) y *kimsaqallqu* (*kimsa 3 + qallqu 5*) en el actual sistema de numeración decimal oral son vestigio de la existencia de un antiquísimo sistema numérico quinario, de uso y estructura sencilla, útil para la vida cotidiana, construido en base 5 (*qallqu*). La posición de los protolexemas (*pä* y *kimsa*) en los deuterolexemas *päqallqu* y *kimsaqallqu*, indican que fueron construidos siguiendo un régimen

de composición de reglas propias y diferentes al sistema de numeración decimal, inadvertido hasta ahora por los estudiosos. Por ello, se plantea la hipótesis de que la numeración cosmológica originaria obedeció a un sistema ancestral e incipiente de base quinaria, en el que debió jugar un rol importante la mano.

3.1.1 Régimen de composición

Todo sistema numérico tiene un régimen de composición. Las bases más utilizadas son: 5, 10, 12, 20 y 60 (CID; GODINO; BATANERO, 2002). Respecto al aymara, Pilares Casas (2005) indicó que los deuterolexemas *päqallqu*, y *kimsaqallqu*, prueban la existencia del protolexema *qallqu 5*, con un régimen de composición aditivo propio del sistema decimal. No coligió que se trata más bien de un sistema quinario con un régimen de composición sencillo para números básicos en base 5, cuya diferencia con el régimen aditivo del sistema decimal aymara, quechua y español, es que el regido no se pospone al regente, sino que se antepone.

La regla de composición para el deuterolexema *päqallqu 7* (*paya 2* y *qallqu 5*) es $2 + 5$, *päqallqu*; no es $5 + 2$, como lo habían advertido erróneamente Bizarro, Vilca-Apaza, Sucari (2020), Pilares Casas (2005) y Vilca, Sosa y Vásquez (2020), pues resultaría *qallqu (5) + pä-* (2), *qallqupaya*, y tal vocablo no existe en el aymara. Por su parte, *kimsaqallqu* es producto de la composición aditiva de 3 (regido) + 5 (regente), inverso al régimen aditivo de base decimal, régimen en el cual sería $5 + 3$, resultando erróneo *qallqukimsa*. En algún momento, debieron ser vigentes los extintos *mäqallqu 1 + 5 = 6* y *pusiqallqu 4 + 5 = 9*, cuyas grafías y lexemas se presentan en el Cuadro 2. Un sistema subyacente, que es justo y necesario ponerlo en vigencia.

				
SEIS Mäqallqu	SIETE Päqallqu	OCHO Kimsaqallqu	NUEVE Pusiqallqu	DIEZ Tschukhara
$1 + 5 = 6$	$2 + 5 = 7$	$3 + 5 = 8$	$4 + 5 = 9$	$5 + 5 = 10$

Cuadro 2 – Números de 6 a 10 en base quinaria
Fuente: recreación propia

No se tiene mayor evidencia del uso y existencia de gráficos y lexemas de números superiores a 10 y sus reglas de composición para órdenes superiores, excepto la representación gráfica de 20 (Figura 3), recogido por Arias (2005) en la textilería de Moho, en base a la que fue posible proyectar la grafía del número 30 (Figura 4). Como es de advertir, la escritura de un sistema numérico de espirales resultaría tediosa, aunque propia y original; sin embargo,

estudiosos como Arias (2005) y Vilca, Sosa y Vásquez (2020) proyectaron, bajo el régimen de composición decimal, números superiores a 10 (Cuadro 3), requiriéndose mayor estudio.

ONCE <i>tunka</i> <i>mayani/mpi</i>	DOCE <i>tunka</i> <i>payani/mpi</i>	TRECE <i>tunka</i> <i>kimsani/mpi</i>	CATORCE <i>tunka</i> <i>pusini/mpi</i>	QUINCE <i>tunka</i> <i>qallquni/mpi</i>
$10 + 1 = 11$	$10 + 2 = 12$	$10 + 3 = 13$	$10 + 4 = 14$	$10 + 5 = 15$

Cuadro 3 – Números cosmológicos aymaras

Fuente: recreación propia



Figura 3 – *pä tunka* (veinte)

Fuente: recreación propia



Figura 4 – *kimsa tunka* (treinta)

Fuente: recreación propia

3.2 Sistema de numeración decimal

3.2.1 Unidades: *Sapanaka*

El término *número* en aymara es *jakhu* (EM1-2 y EP1-2) y *jakhunaka* (números) en plural. El término *unidades* es *sapanaka*. En el Cuadro 4 se presenta una visión cronológica del sistema de numeración decimal y sus lexemas, de cero a diez, producto de las entrevistas y documentación colonial. En culturas como su antecesora Arawak, no existe el cero, debido a que en su cosmovisión no existe el vacío o la nada (DE LA HOZ; PACHECO; TRUJILLO, 2016); sin embargo, en el aymara, descuidado en estudios y materiales del Ministerio de Educación, es *ch'usa*. *Ch'usakiwa ukanxa* (EP1 y EM2) (*ahí, no hay nada, vacío*).

Los vocablos numéricos *maya* (*mä*), *paya* (*pä*) y *pusi*, propios del aymara, se han mantenido a lo largo de su historia, desde el periodo autónomo a la actualidad. Por su parte, *kimsa* se presenta como vocablo quechua. Los extintos *mäqallqu* (6) y *pusiqallqu* (9), del sistema quinario, han sido sustituidos por *suxta*, de origen quechua (SCHOEDER, 2001; PILARES CASAS, 2005), y *ñätunka* o *llätunka* (término aymara), respectivamente. *Päqallqu* (7) y *kimsaqallqu* (8) se mantienen y son la evidencia de que el actual sistema numérico decimal absorbió y se forjó sobre la base del sistema quinario, ya explicado; y que el haberse formado de la anteposición de 2 (*pä*) y 3 (*kimsa*) a 5 (*qallqu*), es indicio de que, en aymara ancestral, 5 se decía *qallqu* y luego con la influencia quechua, se introdujo *phisqa* (ARIAS, 2005; PILARES CASAS, 2005; VILCA; SOSA; VÁSQUEZ, 2020).

Sím bolo	Numeración simbólica ancestral (pre-inka).	Bertonio (1612) Juli, Puno	De torres (1616) Aymara, Puno	Versión oral (2020) Moho, Perú	Versión oral (2020) Pílcuyo, Puno	Versión oral jóvenes (2020) Pílcuyo, Puno
0	---	---	---	Ch'usa	Ch'usa	Ch'usa
1	Maya	Maya (maa)	Maya (maa)	Maya (mä)	Maya	Maya, <i>Unu</i>
2	Paya	Paya (paa)	Paya (paa)	Paya (pä)	Paya	Paya
3	Kimsa	Quimsa	Quimsa	Kimsa	Kimsa	Kimsa
4	Pusi	Pusi	Pusi	Pusi	Pusi	Pusi
5	Qallqu	Phisca	Pisca	Phisqa	Phisqa	Phisqa, <i>Sinku</i>
6	Mäqallqu	Chhukhta	Socta	Suxta	Suxta	Suxta
7	Päqallqu	Pacallco	Pacallco	Paqalqu	Päqalqu	Päqalqu
8	Kimsaqallqu	Quimsacallco	Quimsacallco	Kimsaqalqu	Kimsaqalqu	Kimsaqalqu
9	Pusiqallqu	Llalla/ñañatunca	Ñañatunca	Llätunka/Ñätunka	Llätunka	Llätunka
10	<i>Tschukhara</i>	Tunca	Tunca	Tunka	Tunka	Tunka, <i>Tisi</i>

Cuadro 4 – Cronología del sistema de numeración decimal aymara

Fuente: elaboración propia, Ficha de Registro Vocablos

Estas sustituciones terminológicas presentes en el actual sistema decimal aymara, cuyos lexemas corresponden a las lenguas pukina, aymara y quechua, son producto del sincretismo lingüístico, consecuencia de la conquista aymara de los pukinas y la conquista quechua de los aymaras, sucedidos en el siglo XI y XIV, respectivamente, e indican que una antigua forma de agrupar en base 5, se vio obligada a adaptarse y converger hacia un sistema decimal dominante. Es decir, el actual sistema numérico decimal, de característica aditiva, en base a agrupamientos y reagrupamientos de diez, similar al Mapuche (QUIDEL CATRILAF; SEPÚLVEDA OBREQUE, 2016), Chipaya, Puquina, Kallawaya (BIZARRO, VILCA-APAZA, SUCARI, 2020), Arawak, Quechua y el europeo, se estructuró sobre el sistema quinario, del cual, además, tomó ciertos vocablos.

El análisis comparativo y cronológico revela que la morfosintaxis y fonología de los números aymaras ha variado a través del tiempo y espacio, y en la actualidad está mutando. Ya no se dice *qallqu* (con doble *l*) sino *qalqu*, *päqalqu* y *kimsaqalqu* (con una *l*). El número cinco (5), en la época pre-inka, se decía *qallqu* (post-velar simple |q| y doble *l*), en periodo hispano cambia a *phisqa* por influencia del quechua, vigente en la actualidad, pese a casi quinientos años de políticas de exclusión y alienación, con una insinuante mutación a *sinku* (cinco), signo de la emergente lengua híbrida llamada *aymañol* (aymara + español).

Dicha re fonologización, presente en los jóvenes comerciantes examinados (EPJ1 y EPJ2), también sucede con *uno* y *diez*, que empiezan a pronunciarse como *unu* y *tisi*, incoherentes con la gramática, pero socialmente válidos, efecto del inevitable uso comercial de monedas y billetes de uno, cinco y diez soles, el acceso a la academia y a las redes sociales, propios de la globalización, que también ocurre en los aborígenes de Venezuela (SÁNCHEZ, 2009). Es usual escuchar a los jóvenes aymaras examinados: *¿Qhawqharusa t'anta alastaxa?*

(¿A cuánto compraste el pan?). *Sinku pur un sulisawa* (Cinco por un sol), cuando lo correcto es *suxtawa mä sulisaxa*. Ello es clara necesidad de recuperar, corregir, preservar y difundir la originalidad a través de la escuela.

3.2.2 Regimen de composición

Un sistema numérico es un conjunto finito de palabras y reglas de composición (DESPOT BELMONTE, 2010; VILCA; SOSA; VÁSQUEZ, 2020). El régimen de composición establece una relación cuantitativa entre dos numerales, el regente y el regido, siguiendo una regla aritmética (multiplicando, adicionando o sustrayendo) dependiendo del sistema (CID; GODINO; BATANERO, 2002; PILARES CASAS, 2005). En la numeración decimal aymara, como en la castellana y quechua, el regente siempre es un número que es potencia de la base de numeración del sistema, por ejemplo, 10^0 'maya', 10^1 'tunka'; 10^2 'pataka'; 10^3 'waranqha' ..., en tanto, el regido es cualquiera (1;2;3;...). Ahora, si el regente está antepuesto al regido, se dirá que es de régimen aditivo, lo contrario, da lugar al regimen multiplicativo. Ejemplo: Régimen multiplicativo: 4 (regido) y 10 (regente) = $4 \times 10 = 40$, *pusi pataka*; Regimen aditivo: 10 (regente) y 4 (regido) = $10 + 4 = 14$, *tunka mayani*.

A diferencia del castellano, el sistema numérico decimal aymara posee régimen aproximativo, mas no sustractivo, en el que se utiliza el constructor aproximativo |llä-| o |ñä-|, contricción silábica que procede del reduplicativo alveopalatal *llalla* y *ñaña*, utilizado en el siglo XVII, una transformación de *nya* (que significa *casi*) (SCHOEDER, 2001), que según EP1-2 y EM2 es *niya*, *cerca* o *casi*. El número 9 (*llätunka* o *ñätunka*), único lexema de este regimen, se construye con la partícula aproximativa |llä-| o |ñä-| *cerca* o *casi* y |tunka| *diez*, y quiere decir *cerca a diez* y no *10 menos 1* como postuló Pilares Casas (2005).

Otra prueba de la existencia de este régimen de composición son los números compuestos por aproximación, aunque ya extintos, *llallatunkampi paya tunka* (19 o casi 20), *llallatunkampi kimsa tunka* (29 o casi 30), *llallatunkampi pusi tunka* (39 o casi 40), registrados por Bertonio, en 1612, a inicios de la Colonia. Actualmente, el número 29 se expresa *pä pataka llätunkani*. Con esto, podemos afirmar que la numeración aymara adquirió mayor sencillez para mejores aprendizajes.

3.2.3 Decenas: *Tunkanaka*

Veamos el Cuadro 5.

Número	Composición	Escritura Aymara	Escritura Castellana
10	10	Tunka	Diez
20	2x10	Pä tunka (paya tunka)	Veinte
30	3x10	Kimsa tunka	Treinta
40	4x10	Pusi tunka	Cuarenta
50	5x10	Phisqa tunka	Cincuenta
60	6x10	Suxta tunka	Sesenta
70	7x10	Päqalqu tunka	Setenta
80	8x10	Kimsaqalqu tunka	Ochenta
90	9x10	Llätunka tunka (nä tunka)	Noventa

Cuadro 5 – Tunkanaka: numeración de diez en diez

Fuente: Ficha de Registro de Vocablos

La palabra *decena* equivale a *tunka*, y al agregársele el sufijo pluralizador *-naka* resulta *tunkanaka*, *decenas*. Las decenas (de diez en diez) se estructuran bajo el régimen multiplicativo. Al regente 10 (*tunka*) se le antepone el regido (1 al 9) sin agregar el sufijo *-ni*. Por ejemplo, 20 = *pä tunka*, resulta de 2 (*pä*) x 10 (*tunka*) = dos dieces = veinte, como se aprecia en el Cuadro 5. Para componer un número del orden de las decenas que contenga unidades (de 11 a 99), se aplica el régimen aditivo. Al regente (10; 20; ...; 90) se agrega el regido (1; 2; ...; 9), más el sufijo pluralizador *-ni* (*que tiene*). Para obtener el número 12, a 10 (regente) se agrega 2 (regido), del orden de las unidades, más el sufijo *-ni*, resultando *tunka payani* (10 = *tunka* + 2 = *paya* + *-ni* = que tiene). Se distingue que en 12 hay una decena y 2 unidades. Esta cualidad sugiere la conveniencia de enseñar la numeración a partir de su idioma materno, para así garantizar la transición armónica a la numeración castellana. Otros ejemplos son:

EM1-2, EP1-2	: 18 = <i>tunka kimsaqalquni</i>	: ‘diez que tiene ocho’
Composición	: 18 = 10 (<i>tunka</i>) + 8 (<i>kimsaqalqu</i>) + <i>-ni</i>	
EM1-2, EP1-2	: 52 = <i>phisqa tunka payani</i>	: ‘cincuenta que tiene dos’
Composición	: 52 = 50 (<i>phisqa tunka</i>) + 2 (<i>paya</i>) + <i>-ni</i>	

Cabe señalar que existe discordancia en la pronunciación de los deuterolexemas 11 al 15, entre el aymara y español, que explica las confusiones que se suscitan en los niños durante el aprendizaje de la numeración castellana. Como se advierte en el Cuadro 6, en lengua castellana, se nombra primero la unidad y luego la decena, por lo que se suele pronunciar once, doce, trece, catorce y quince, cuando por regularidad debería ser *dieciuno*, *diecidos*, *diecitre*, *diecicuatro* y *diecicinco*. Por su parte, el aymara nombra primero las decenas (del 11 al 19) y luego agrega las unidades, y se pronuncia *tunka mayani* (en la lógica de ‘*ieciuno*), *tunka phisqani* (*dieciquince*) etc. Esto debe ser advertido y corregido con pedagogía por el profesor, de lo contrario, los efectos negativos, derivados de esta inobservancia, persistirán, en desmedro

del desarrollo del pensamiento matemático. Considérese que el aymara, tiene una sola regla de composición (BIZARRO, VILCA-APAZA, SUCARI, 2020).

Número	Composición	Escritura Aymara	Escritura Castellana
11	10 + 1	Tunka mayani	ONCE *Dieciuno
12	10 + 2	Tunka payani	DOCE *Diecidos
13	10 + 3	Tunka kimsani	TRECE *Diecitre
14	10 + 4	Tunka pusini	CATORCE *Diecicuatro
15	10 + 5	Tunka phisqani	QUINCE *Diecicinco
16	10 + 6	Tunka suxtani	Dieciséis
17	10 + 7	Tunka paqalquni	Diecisiete
18	10 + 8	Tunka kimsaqalquni	Dieciocho
19	10 + 9	Tunka llätunkani	Diecinueve

Cuadro 6 – Numeración decimal aymara del 11 al 19

Fuente: Ficha de Registro de Vocablos

3.2.4 Centenas: *Patakanaka*

La palabra *centena* y *cien* equivalen a *pataka* (EM1-2 y EP1-2) igual que en Mapuche (SALAS; GODINO; QUINTRIQUEO, 2016), aunque Quidel Catrilaf y Sepúlveda Obreque (2016) erran al indicar que deriva del quechua, *Pachaq*. Cualquier número del orden de las centenas, de cien en cien, se obtiene sobre la base del número 100, en el régimen multiplicativo. Por ejemplo, $200 = p\ddot{a}$ *pataka* se obtiene de anteponer 2 (regido) a *100* (regente). Ver Cuadro 7.

Número	Estructura	Escritura Aymara	Escritura Castellana
100	100	Pataka	Centena
200	2x100	Pä pataka	Doscientos
300	3x100	Kimsa pataka	Trescientos
400	4x100	Pusi pataka	Cuatrocientos
500	5x100	Phisqa pataka	Quinientos
600	6x100	Suxta pataka	Seiscientos
700	7x100	Päqalqu pataka	Setecientos
800	8x100	Kimsaqalqu pataka	Ochocientos
900	9x100	Llätunka pataka	Novcientos

Cuadro 7 – Patakanaka: Cienes, numeración de cien en cien

Fuente: Ficha de Registro de Vocablos

Para componer números del orden de las centenas que contienen decenas y unidades se aplica el régimen aditivo. Al regente (100 ; 200 ; ... ; 900) se agrega el regido (10 ; 20;... ; 90 y/o 1; 2; ...; 9), más el sufijo *-ni*, de la siguiente forma:

EM1-2, EP2: 350 = *kimsa pataka phisqa tunkani* : ‘trescientos que tiene cincuenta’
 Composición: 350 = 3x100 (*kimsa pataka* = tres cienes) + 5x10 (*phisqa tunka* = cinco dieces) + *-ni*
 EP2: 842 = *kimsaqalqu pataka pusi tunka payani* : ‘ochocientos cuarenta que tiene dos’
 Composición: 842 = 8x100 (*kimsaqalqu pataka* = ocho cienes) + 4x10 (*pusi tunka* = cuatro dieces) + 2 (*paya*) + *-ni*

3.2.5 Millares: *Waranqhanaka*

A inicios de la Colonia, siglo XVI, Bertonio (1612) y De Torres (1616) registraron *mil* como *jachu/hacho*, en desuso. Actualmente, según la versión de EM1-2 y EP1-2, es *waranqha*, vocablo tomado por el Ministerio de Educación (1905). Con base a ello, las unidades de millar, las decenas de millar (*tunka waranqhanaka*) y centenas de millar (*pataka waranqhanaka*), se obtienen siguiendo el régimen multiplicativo, sobre la base 1000. Por ejemplo, 2000 = *pä waranqha* se obtiene anteponiendo 2 *pä* (regido) a 1000 *waranqha* (regente; el número 30.000 = *kimsa tunka waranqha*, de anteponer 30 (regido) a 1000 (regente); y 200.000 = *pä pataka* = 200 y *waranqha* = mil), de anteponer 200 a 1000. Ver Cuadro 8.

Número	Estructura	Escritura Aymara	Escritura Castellana
1 000	1000	Mä waranqha	Mil
2 000	2x1000	Pä waranqha	Dos mil
3 000	3x1000	Kimsa waranqha	Tres mil
4 000	4x1000	Pusi waranqha	Cuatro mil
5 000	5x1000	Phisqa waranqha	Cinco mil
6 000	6x1000	Suxta waranqha	Seis mil
7 000	7x1000	Päqalqu waranqha	Siete mil
8 000	8x1000	Kimsaqalqu waranqha	Ocho mil
9 000	9x1000	Llätunka waranqha	Nueve mil
10 000	10x1000	Tunka waranqha	Diez mil
100 000	100x1000	Pataka waranqha	Cien mil
900 000	900x1000	Llätunka pataka waranqha	Novcientos mil

Cuadro 8 – Waranqhanaka: millares
 Fuente: Ficha de Registro de Vocablos

Los números compuestos del orden de los millares que contengan centenas, decenas y unidades, se obtienen siguiendo el régimen aditivo. Ejemplo:

EP2: 3 421 = *kimsa waranqha pusi pataka pä tunka mayani*

Composición: 3 451 = 3 000 (*kimsa waranqha*) + 400 (*pusi pataka*) + 20 (*pä tunka*) + 1 (*maya*) + *-ni*

EP2: 12 734 = *tunka payani waranqha päqalqu pataka kimsa tunka pusini*

Composición: 12 734 = 12 000 (*tunka payani waranqha*) + 700 (*päqalqu pataka*) + 30 (*kimsa tunka*) + 4 (*pusi*) + *-ni*

3.2.6 Millón: *Junu*

En el *Rakin* mapuche no existe el término *millón*; solo, *muchos* (QUIDEL CATRILAF; SEPÚLVEDA OBREQUE, 2016); mientras en el pueblo de *Ipgo* (África) se cuenta hasta 96 000 000 (BISHOP, 1999). El Ministerio de Educación (1905) utiliza *hunu* y *waranqa waranqa*, con post-velar simple *|q|*, como término equivalente a Millón en quechua. Los aymaras estudiados (EM1-2 y EP1-2) vocalizan dicho término como *waranqha waranqha*, con la consonante post-velar aspirada *|qh|*. La expresión *waranqha waranqhaniwa uka warmixa*

(EP2), quiere decir *esa mujer es millonaria*. Advuértase que *waranqha* (1000) *waranqha* (1000) es 1 000 000 (un millón), siendo una opción legítima, aunque su escritura en aula resultaría muy extensa. El *Vocabulario de la Lengua Aymara* (1612), indica que *Millón* equivale a *Junu*, que por su simplicidad debe ser socializado por la escuela. Los números de millón en millón (ver Cuadro 9), se obtuvieron aplicando el régimen multiplicativo. Por ejemplo, 2 000 000 se obtiene anteponiendo 2 (regido) a 1 000 000 (regente) (2x1 000 000) y se lee *pä junu*. No es necesario agregar el pluralizador *-naka*. Diez millones, equivale a *tunka junu* (*tunka* = 10, *junu* = 1 000 000), y cien millones a *pataka junu* (*pataka* = cien, *junu* = millones).

Número	Escritura Aymara	Significado Castellano
1 000 000	Junu	Un millón
2 000 000	Pä junu	Dos millones
3 000 001	Kimsa junu mayani	Tres millones uno
4 000 000	Pusi junu	Cuatro millones
5 000 000	Phisqa junu	Cinco millones
6 000 000	Suxta junu	Seis millones
7 000 000	Päqalqu junu	Siete millones
8 000 000	Kimsaqalqu junu	Ocho millones
9 000 000	Llätunka junu	Nueve millones
10 000 000	Tunka junu	Diez millones
100 000 000	Pataka junu	Cien millones

Cuadro 9 – Junu: Millón

Fuente: Ficha de Registro de Vocablos

3.2.7 Billones, trillones, cuatrillones e infinito

Los aborígenes de Australia solo tienen dos o tres números cardinales (HARRIS, 1980; citado por BISHOP, 1999), al igual que los Yanomami, Baniva, Baré y Yavitero de Venezuela, quienes además usan *mucho(s)* para cantidades mayores (SÁNCHEZ, 2009), al igual que los Caribe (SÁNCHEZ, 2012). El aymara, aunque no es urgencia social (PILARES CASAS, 2005), cuenta con números grandes como billones o decallones, ausentes en la oralidad y fuentes coloniales. El Taller de Terminología de Puno, de 1942, sugiere el término *billón* como *junjunu*, resultado de la composición de *junu* y *junu* (millón millón), siguiendo el régimen multiplicativo. Con base a ello, *dos billones* sería *päjunjunu*; *10 billones*, *tunka junjunu* (*tunka* = 10, *junjunu* = millón) y *100 billones*, *pataka junjunu*. El Vocabulario Pedagógico Aimara, de 1993, precisa que *trillón* es *junkimsawayta* (*Junu* = millón, *kimsa* = tres, *wayta* = veces), y con base a ello, *cuatrillones* sería *junpusiwayta* (*Junu* = millón, *pusi* = cuatro, *wayta* = veces), y *decallones*, *juntunkawayta*.

El grado de desarrollo y estructuración de estos términos numéricos, demuestra la capacidad de abstracción y flexibilidad del lenguaje matemático aymara para incorporar nuevos lexemas. Como indica Levy-Strauss (1994), citado por Sánchez (2009), el pensamiento y las

palabras abstractas no son patrimonio exclusivo de las lenguas civilizadas, como se piensa erróneamente.

Finalmente, el término *infinito* según los entrevistados (EM1-2 y EP1-2) es *laq'a laq'a*. *Warawaraxa laq'alaq'jamawa* (las estrellas son infinitas, como la tierra). Término que también se encuentra en el documento colonial de De Torres (1616) como *laca laca* y en el de Bertonio (1612) como *laq'a laq'a*. Cerrándose con este último, todo un sistema numérico.

4 Conclusiones y reflexiones

No existe solo un sistema de numeración aymara como hasta ahora se ha creído y estudiado. Se diferencian dos sistemas que se yuxtaponen en la actualidad como resultado de sincretismos culturales. El primero, una incipiente y ancestral manera de organizar cantidades en base quinaria (*maya*, *paya*, *kimsa*, *pusi* y *qallqu*). Un sistema escrito con espirales, con régimen de composición aditivo inverso, inadvertido hasta hoy por los estudiosos. Bajo este régimen y sobre base 5 (*qallqu*), debieron componerse los números del siguiente orden: *mäqallqu* ($1+5=6$), *päqallqu* ($2+5=7$), *kimsaqallqu* ($3+5=8$), *pusiqallqu* ($4+5=9$) y *Tschukhara* ($5+5=10$). De estos, solo están vigentes *päqallqu* y *kimsaqallqu* en el sistema decimal actual y son la evidencia de la existencia del sistema quinario con régimen de composición en base 5.

La riqueza del sistema quinario aymara identificado es que, su numerología, más que cantidad es cualidad. Es el registro de la cosmovisión aymara (su forma de pensar y actuar en este mundo), castrado en la enseñanza de la numeración aymara actual. Es una herramienta cognitiva que enseña no solo a razonar matemáticamente, sino a sentir, entender y entenderse con el mundo. Al igual que los números Arawak (DE LA HOZ; PACHECO; TRUJILLO, 2016), es simbología que transmite valores como la tolerancia y sensibilidad por el *otro*, respeto y amor a toda forma de vida y la Pachamama, necesarios en tiempos de deterioro social y ambiental. Refleja el enfoque socio-ambiental holístico de las matemáticas, que debe ser enseñado y puesto en vigencia a través de la escuela intercultural. Su principal ponente, la doble espiral, es el símbolo del pensamiento paritario, la necesidad humana de integrarse en par, varón-mujer, hombre-naturaleza. Es el poder explicativo de las matemáticas mediante número propuesta por Bishop (1999), educar en números es enseñar a vivir, a *vivir bien*.

El segundo, es el sistema numérico oral en base 10, similar al arawak, mapuche, puquina, kallawaya, quechua y europeo, tan completo como los sistemas numéricos modernos. Representa cantidades desde *cero* (*ch'usa*), obviado en los estudios, *maya* (1), *paya* (2), *kimsa*

(3), *pusi* (4), *phisqa* (5), *suxta* (6), *päqalqu* (7), *kimsaqalqu* (8), *llätunka* (9) y *tunka* (10), hasta cantidades muy altas y abstractas como *decallón* (*juntunkawayta*) e *infinito* (*laq'a laq'a*) que, pese a pertenecer a una cultura ágrafa, refleja una concepción numérica avanzada y con flexibilidad para adaptarse a las exigencias de la educación matemática moderna. Esta terminología ha variado en el decurso tempo-espacial y presenta indicios claros de mutación fonológica por efecto de la globalización y la hegemonía del español, como es el caso de *sinku* (cinco), *tisi* (diez) y *unu* (uno), siendo original *phisqa*, *tunka* y *maya*, respectivamente. Es tarea de la escuela preservar y transmitir a las nuevas generaciones la originalidad y el valor de este conocimiento matemático.

El régimen de composición del sistema numérico decimal aymara es aditivo, multiplicativo y, además, a diferencia del quechua y castellano, aproximativo, erróneamente llamado sustractivo. Solo el lexema *llätunka* (9) que literalmente quiere decir *casi diez* (*llä = casi* y *tunka = diez*) está en el régimen aproximativo. El castellano, a diferencia del aymara, presenta irregularidad en la pronunciación de los números 11 al 15. Por ejemplo, por regularidad *11* debería leerse *dieciuno* (10 y 1), al igual que en aymara, *tunka mayani* (10 que tiene 1), empero, rompiendo la lógica de estructuración lexémica, se dice *once*. Esta irregularidad, totalmente válida y formal, es la que causa los problemas en el aprendizaje y autoestima, expuestos en la problemática, y deben ser corregidos con didáctica intercultural.

Los sistemas de numeración aymara identificados y diferenciados tienen un valor formativo que va más allá del propósito dualista de la educación matemática de D'Ambrosio (2005), corroborado por Condori-Viza *et al.* (2017) y Salas, Godino y Quintriqueo (2016). No solo favorece el desarrollo cognitivo en el marco de la teoría social del aprendizaje de Vygotski, y reafirman la identidad, entendiendo que enseñar *su matemática* significa dar valor a lo suyo, pues nadie ama lo que no conoce. Además, permitirían cumplir dos propósitos adicionales: el devolverle dignidad a un ser humano, integrante de una sociedad, excluido y denigrado sistemática e históricamente, que al ver valorada su cultura se sentirá valorado como ser humano, constituyéndose en elemento positivo para el desarrollo del país; y finalmente, su simbología numérica es insumo que favorece la formación de valores sociales y ecológicos, que le permiten sentir, vivir y convivir en armonía social y natural, muy necesarios en tiempos de disyuntiva social y ruptura ecológica, inadvertido en estudios anteriores. Todo ello, es valioso insumo para un currículo intercultural y formación de profesores etnomatemáticos.

El conocimiento matemático aymara está, mas faltan desarrollos didácticos auténticos (CORTINA; ROJAS, 2016). Un currículo técnico no puede educar, solo instruir y adiestrar; por lo que se necesita migrar de una educación matemática orientada hacia la ejecución técnica

(método, reglas y respuestas) y promover una educación matemática reflexiva (BISHOP, 1999). Las futuras investigaciones sobre didáctica de la matemática, en entornos indígenas, que se puedan derivar del presente, deben realizarse en el marco interpretativo del aprendizaje, en el que el aprendizaje de los números sea una construcción social, y no una transferencia pasiva. Se sugiere el modelo didáctico de Cobb y sus colegas (COBB, 2000, citado por CORTINA, ROJAS, 2016), que en México logró que niños indígenas reconozcan la matemática como parte de lo propio, y no ajeno e impuesto.

Agradecimiento

Por su valiosa información, a las comunidades originarias aymaras de los distritos de Pilcuyo (zona sur) y Moho (zona norte) del departamento de Puno, Perú.

Referencias

- ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Líber Livro, 2008.
- ARIAS MEJÍA, P. **Etnomatemática en la escuela primaria**. Universidad Nacional del Altiplano. Puno: Editorial Titikaka, 2005.
- AROCA ARAUJO, A. La definición etimológica de Etnomatemática e implicaciones en Educación Matemática. **Educación matemática**, Ciudad de México, v. 28, n. 2, p. 175-195, 2016. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262016000200175&lng=es&tlng=es. Acceso: 04 de dic. 2020.
- BERTONIO, L. **Vocabulario de la Lengua Aymara**. La Paz: IFEA facsimilar, 1984 [1612].
- BISHOP, A. J. **Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural**. Barcelona: Temas de educación Paidós, 1999.
- BIZARRO, W.; VILCA-APAZA, H.M.; SUCARI, W. Sistema de numeración aimara: una revisión para su reconstrucción. **Apuntes Universitarios**, Tarapoto, v. 11, n. 1, p. 364–385, 2020.
- BLANCO-ÁLVAREZ, H.; FERNÁNDEZ-OLIVERAS, A.; OLIVERAS, M. L. Formación de Profesores de Matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 564-589, 2017.
- BOUYSSÉ-CASSAGNE, T. **Lluvias y cenizas: dos Pachacuti en la historia**. La Paz: Composición, Diagramación e Impresión – C.I.D., 1988.
- CERRÓN-PALOMINO, R. Contactos y desplazamientos lingüísticos en los Andes centro-sureños: el puquina, el aimara y el quechua. **Boletín de Arqueología PUCP**, Lima, n. 14, p. 255-282, 2010.
- CORTINA, J.; ROJAS, C. Didáctica de los sistemas de numeración de las lenguas indígenas: el diseño de una propuesta para escuelas primarias unidocentes. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 9, n. 2, p. 103-126, 2016.

CID, E.; GODINO, J. D.; BATANERO, C. **Sistemas numéricos y su didáctica para maestros**. Granada: ReproDigital-Facultad de Ciencias, 2002.

CIEZA DE LEÓN, P. **Crónica del Perú**. Ciudad de México: Editorial Nueva España, 1962 [1553].

CONDORI-VIZA, C. *et al.* Cultura Arica: Un caso para el estudio y educación de la geometría presente en textiles prehispánicos. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 10, n. 2, p. 8-25, 2017. Disponible en: <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/411>. Acceso: 4 de ene. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DE LA HOZ MOLINARES, E. E.; PACHECO FERNÁNDEZ, J.; TRUJILLO VARILLA, O.E. Números y universo Arhuaco. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 9, n. 2, p. 33-52, 2016. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5562543>. Acceso: 20 de ene. 2021.

DE TORRES RUBIO, P. D. **Arte de la lengua aymara**. Lima: John Carter Brown Library, 1616. Disponible en: <https://archive.org/details/artedelalenguay00torr/page/n6/mode/2up>. Acceso: 20 de feb. 2020.

DESPOT BELMONTE, C. A. **Jakhüwi etnomatemática aymara: análisis de las representaciones de las ilustraciones en los módulos desarrollados por la reforma educativa de Bolivia para primer grado**. Tesis (Maestría en Artes Visuales) – Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2010. Disponible en: http://132.248.9.195/ptb2011/febrero/0666439/0666439_A1.pdf. Acceso: 13 de nov. 2020.

ESPINOSA, A.; JIMÉNEZ, I. E. R. Lengua Materna y Comunicación en la Construcción del Pensamiento Matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 63, p. 248-268, 2019.

HARDMAN, M. J. **Jaqaru: outline of phonological and morphological structure**. Mouton: Editorial The Hague, 1966.

LIZARZABURU, A.; ZAPATA, G. **Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina: Experiencias y desafíos**. Madrid: Morata, 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Vocabulario políglota incaico**. Lima: Tipografía del Colegio de Propaganda FIDE del Perú, 1905.

MORÍN, E. **Los siete saberes necesarios para la educación del futuro**. París: UNESCO, 1999. Disponible en: <http://www.ideassonline.org/public/pdf/LosSieteSaberesNecesariosParaLaEduDelFuturo.pdf>. Acceso: 22 de feb. 2021.

OLIVERAS, M. L.; ALBANESE, V. Etnomatemáticas en artesanías de trenzado: un modelo metodológico para investigación. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1315-1344, dez. 2012.

OLIVERAS, M. L.; BLANCO-ÁLVAREZ, H. Integración de las Etnomatemáticas en el Aula de Matemáticas: posibilidades y limitaciones. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 455-480, mai./ago. 2016.

PILARES CASAS, G. Los Sistemas Numéricos del Quechua y el Aimara. **Revista Andina**, Cusco, n. 40, p. 149-178, 2005. Disponible en: <http://revista.cbc.org.pe/index.php/revista-andina/article/view/308>. Acceso: 22 de oct. 2021.

QUIDEL CATRILAF, G.; SEPÚLVEDA OBREQUE, K. El Rakin, conteo mapuche, un conocimiento con valor de uso. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 9, n. 2, p. 12-32, 2016. Disponible en:

<https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/167/252>. Acceso: 22 de feb. 2021.

SALAS, S. S.; GODINO, J. D.; QUINTRIQUEO, S. Análisis Exploratorio de las Prácticas Matemáticas de dos Estudiantes Mapuches en Colegios con y sin Educación Intercultural Bilingüe. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 481-501, ago. 2016.

SÁNCHEZ, D. El Sistema de Numeración y algunas de sus aplicaciones entre los aborígenes de Venezuela. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 2, n. 1, p. 43-68, 2009. Disponible en: <http://www.etnomatematica.org/v2-n1-febrero2009/sanchez.pdf>. Acceso: 02 de feb. 2021.

SÁNCHEZ, D. El concepto de nada como equivalencia al número cero según los aborígenes de Venezuela. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan de Pasto, v. 5, n. 2, p. 80-95, 2012. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/3092/>. Acceso: 02 de feb. 2021.

SCHOEDER, J. **Matemática andina**. Ministerio de Educación – GTZ. Cooperación Alemana al Desarrollo. Lima: Talleres Asociación Gráfica Educativa, 2001.

SILVA, S. F.; CALDEIRA, A. D. Etnomatemática do Sistema de Contagem Guarani das Aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M'Biguaçu. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 992-1013, dez. 2016.

TERIGI, F.; WOLMAN, S. Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, n. 043, p. 59-83, 2007. Disponible en: <https://www.redalyc.org/pdf/800/80004305.pdf>. Acceso: 13 de dic. 2020.

TERIGI, F.; BUITRON, V. Los aprendizajes sobre el sistema de numeración en el primer ciclo en escuelas primarias urbanas. Estudio exploratorio en distintos contextos didácticos. **Educación, Lenguaje y Sociedad**, La Pampa, v. 10, n. 10, p. 13-39, dic. 2013. Disponible en: <https://cerac.unlpam.edu.ar/index.php/els/article/view/1477/1489>. Acceso: 11 de dic. 2020.

TORERO, A. **Idiomas de los Andes: Lingüística e Historia**. Lima: Editorial Horizonte. Instituto Francés de Estudios Andinos, 2002.

URTON, G. **La Vida Social de los Números**. Cuzco: Centro de Estudios Regionales Andinos Bartolomé de Las Casas, 2003.

VILCA APAZA, H.M. *et al.* Maestros indigenistas y sus experiencias socio-educativas en el altiplano peruano en el siglo XX. **Comuni@cción**, Puno, v. 9, n. 2, p. 90-100, dic. 2018. Disponible en: http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2219-71682018000200002&lng=es&nrm=iso. Acceso: 13 de ene. 2020.

VILCA-APAZA, H.M.; SOSA GUTIERREZ, F.; VÁSQUEZ MACHICAO, L. **El valor de la formación en etnomatemática aymara para docentes en Puno, Perú**. Bogotá: Editorial Milla Ltda. 2020. Disponible en: https://www.ilae.edu.co/web/Ilae_Files/Libros/20200825195917804402900.pdf. Acceso: 14 de ene. 2021.

**Submetido em 24 de Dezembro de 2020.
Aprovado em 09 de Julho de 2021.**