

ARTÍCULO

Conceptualizaciones de la Pendiente en el Currículum de Matemáticas de Chile

Conceptualizations of Slope of Chilean Intended Mathematics Curriculum

Crisólogo Dolores Flores*

 ORCID iD 0000-0002-2748-6042

Gustavo Andrés Mosquera García**

 ORCID iD 0000-0002-3664-3716

Resumen

Este estudio tiene como objetivo investigar qué conceptualizaciones de la pendiente se evidencian en el currículum de matemáticas de Chile y cuáles son enfatizadas. Para dar alcance al objetivo, se utilizó el Análisis de Contenido y las once categorías de conceptualizaciones de pendiente. Los resultados indican la presencia de dos, ocho y nueve de tales conceptualizaciones en Educación Básica, Media Básica y Media Superior¹, respectivamente. La conceptualización propiedad funcional se enfatiza en Educación Básica y Media Básica, esta misma junto con la situación del mundo real y la del coeficiente paramétrico son enfatizadas en la Educación Media Básica y Media Superior. En este último, se enfatizan el coeficiente paramétrico, situación del mundo real y razón algebraica. Son escasas las conceptualizaciones concepción trigonométrica y propiedad determinante en Educación Básica y en Media Básica, pero están en Media Superior. Los resultados de este estudio podrían ser útiles en las reformas curriculares futuras.

Palabras clave: Currículum de matemáticas de Chile. Conceptualizaciones de la pendiente. Educación Básica. Educación Media Básica. Educación Media Superior.

Abstract

This study aims to investigate which conceptualizations of slope are evident in the Chilean mathematics curriculum and which are emphasized. To achieve the objective, Content Analysis and the eleven categories of slope conceptualizations were used. The results indicate the presence of the second, eighth, and ninth categories of those conceptualizations in elementary education, junior high school, and high school levels, respectively. The functional

* Doctor en Ciencias por el ISPEJV de la Habana, Cuba. Profesor del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, Gro, México. E-mail: cdolores2@gmail.com; cdolores@uagro.mx

** Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, Gro, México. E-mail: gmosquera@uagro.mx

¹ La Ley General de Educación de Chile (Ley 20370) establece que tanto el nivel de Educación Básica como el de Educación Media duraran 6 años cada una. El primero comprende de 1º al 6º año y el segundo del 7º a 12º año. En este trabajo se utiliza el término “grado” en vez de año, “Educación Media Básica” para denotar el periodo del 7º al 8º grado (secundaria en otros países) y “Educación Media Superior” para el periodo de 9º al 12º grado (bachillerato en otros países).

property conceptualization is emphasized in elementary school and junior high school levels, and this along with the real world situation and the parametric coefficient are emphasized in elementary school and junior high school levels. In the latter, the parametric coefficient, real-world situation, and algebraic ratio are emphasized. There are few conceptualizations of trigonometric conception and determining property at elementary school and junior high school levels, but they are at the high school level. The results of this study could be useful in future curricular reforms.

Keywords: Chilean mathematics curriculum intended. Conceptualizations of slope. Elementary school level. Junior high school level. High school level.

1 Introducción

La pendiente es un concepto fundamental en la educación matemática porque ayuda a los estudiantes a comprender las primeras funciones que se estudian en el nivel medio (Nagle; Moore-Russo, 2013a; Stanton; Moore-Russo, 2012); trasciende a la educación superior transformada en derivada, que ayuda a los estudiantes universitarios a realizar análisis más finos sobre el comportamiento de las funciones (Nagle; Moore-Russo, 2014). Sin embargo, el concepto de pendiente es complejo y, por lo tanto, difícil de comprender. Es complejo por la amplia variedad de conceptualizaciones que tiene asociadas, es difícil porque su enseñanza ha dado lugar a errores y conceptos erróneos. Errores tales como: calcular la pendiente de la recta dado dos puntos como $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ en lugar de $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Cho; Nagle, 2017), y reconocer el coeficiente de x como el valor de la pendiente sin importar la forma de la ecuación lineal, por ejemplo, en $ax + by + c = 0$ (Rivera; Dolores, 2021); han propiciado la generación de conceptos erróneos tales como confundir la pendiente con la ordenada (las y) en el plano cartesiano (Leinhardt; Zaslavsky; Stein, 1990), o considerar que una recta que pasa por el origen debe tener pendiente cero (Mudaly; Moore-Russo, 2011).

Sobre la base de las conceptualizaciones de la pendiente, varios investigadores han estudiado las utilizadas por los estudiantes y maestros (Casey; Nagle, 2016; Mudaly; Moore-Russo, 2011). Otros las han analizado en los libros de texto (Dolores; Ibáñez, 2020; Nagle; Moore-Russo; Fisher, 2022), o bien han estudiado las que prevé el currículum oficial (Dolores; Mosquera, 2022; Nagle; Moore-Russo, 2014). Según el diccionario, las conceptualizaciones son acciones o procesos de formación de ideas o principios en la mente (Cambridge Dictionary, 2024). Las conceptualizaciones de la pendiente son ideas o principios que estudiantes y profesores se forman en la escuela o como producto de sus experiencias personales, pueden incluir a la pendiente como razón geométrica, como razón algebraica, como coeficiente paramétrico etc.

Los resultados de algunas investigaciones basadas en las conceptualizaciones de la

pendiente han llamado la atención, en el sentido de la poca alineación entre lo que se prevé en el currículum oficial, lo que se estipula en los libros de texto, lo que enseñan los maestros y lo que aprenden los estudiantes. Por ejemplo, en la revisión del currículum oficial, los trabajos de Dolores y Mosquera (2022), Dolores, Rivera y Moore-Russo (2020) y Nagle y Moore-Russo (2014) hacen notar el énfasis en el estudio de la variación constante entre dos cantidades y a las situaciones del mundo real. En los libros de texto, predomina lo algebraico de la pendiente (Dolores; Ibáñez, 2020; Nagle; Moore-Russo; Fisher, 2022). Los maestros tienden a considerar la pendiente en la enseñanza con base a concepciones trigonométricas, geométricas y paramétricas (Salgado; Rivera; Dolores, 2019), en cambio, los estudiantes son proclives a lo algebraico de la pendiente y al comportamiento de las rectas (Casey; Nagle, 2016). Esto refleja la escasa alineación entre lo que prevé el currículum, lo que plantean los libros de texto, lo que enseñan los maestros y lo que aprenden los estudiantes.

Las conceptualizaciones de la pendiente suelen estar previstas en el currículum de matemáticas, porque son conocimientos que los estudiantes necesitan tener desde el nivel básico hasta el superior para que puedan comprender el comportamiento de las funciones, por tanto, la revisión de los documentos curriculares puede evidenciarlas, tal como lo han hecho Stanton y Moore-Russo (2012) y Nagle y Moore-Russo (2014) en EE. UU., Dolores, Rivera y Moore-Russo (2020) en México y Dolores y Mosquera (2022) en Colombia. Sin embargo, en la búsqueda de la literatura, el conocimiento que se tiene sobre los estudios de la pendiente en los países latinoamericanos es escaso, particularmente en Chile pocas son las investigaciones que abordan este concepto. Los trabajos encontrados para este país, Parra-Urrea y Pino-Fan (2017) y Pino Fan, Parra-Urrea y Castro-Gordillo (2019) se centran en la función con muy escasa atención a la función lineal y por ende a la pendiente. Por eso, en este estudio nos proponemos dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿qué conceptualizaciones de la pendiente se evidencian en el currículum oficial de matemáticas en Chile y cuáles son enfatizadas?

El conocimiento acerca de las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum es importante porque contribuiría en varios sentidos. Por una parte, se contaría con un diagnóstico acerca de cuáles se prevén en el currículum y cuáles están ausentes, y por otra, sobre la base de esta información, los diseñadores del currículum podrían utilizarlas en futuras reformas curriculares, de modo que podrían considerar cuáles reforzarían el conocimiento sobre la pendiente, tanto el previo y el que se prevé en el medio básico como en el medio superior. También, los hallazgos de este trabajo pueden ser utilizados por aquellos investigadores interesados en el estudio de la pendiente en el contexto curricular para abrir nuevas líneas de

investigación o desarrollar esta que sigue el presente trabajo.

El currículum chileno ha sido seleccionado por tres razones; primero, porque forma parte del conjunto de países latinoamericanos cuya currícula estamos estudiando en un proyecto más amplio; segundo, porque el conocimiento de las conceptualizaciones de la pendiente a través del currículum permitirá conocer cómo se prevé que la pendiente se enseñe en este país y tercero, porque Chile es uno de los países latinoamericanos mejor posicionado en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de PISA (OECD, 2019).

2 Marco Teórico

Este estudio se fundamenta en dos elementos teóricos, el currículum y las conceptualizaciones de la pendiente. En términos generales, el currículum se refiere a la sustancia o contenido de la enseñanza y el aprendizaje, el *qué* se debe enseñar para que los estudiantes lo aprendan, también suele contener el *cómo* se debe enseñar y evaluar ese contenido. Investigadores y profesionales de la educación matemática con frecuencia utilizan el término currículum para referirse a “los recursos materiales diseñados para ser utilizados por los profesores en el aula” (Stein; Remillard; Smith, 2007, p. 321). Acordes con esta idea, Remillard y Heck (2014, p. 707) definen al currículum de matemáticas como un “plan para las experiencias que los estudiantes encontrarán”, usan el término *experiencias* para aclarar que el currículum es más que temas o metas a cumplir.

Existen varios tipos de currículum: el previsto (*intended*), el promulgado (*enacted*), el evaluado (*assessed*) y el escrito (*written*). Para Porter (2004), el currículum previsto revela los objetivos del contenido de instrucción, el promulgado destaca el contenido que los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprender, y el evaluado revela las áreas de contenido en las que se evalúa el rendimiento de los estudiantes. El presente estudio analiza el currículum previsto, el cual está generalmente plasmado en los planes y programas de estudio para el caso de los países latinoamericanos, para el caso estadounidense está cifrado en los *Principles and Standards for School Mathematic* (NCTM, 2000); siguiendo el ejemplo estadounidense algunos países latinoamericanos ya incluyen en su currícula los estándares de aprendizaje.

Las conceptualizaciones de la pendiente son el segundo elemento teórico utilizado. El término *conceptualización* se refiere al proceso de formación de un concepto o idea en la mente. Un concepto está formado por un conjunto de situaciones que le dan sentido, por un conjunto de invariantes operatorios que integran los esquemas evocados en las situaciones y por las representaciones lingüísticas simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) que permiten representar

los conceptos y sus relaciones (Vergnaud, 2013). La conceptualización está hecha de “representaciones de objetos, propiedades, relaciones, transformaciones, circunstancias, condiciones y relaciones funcionales entre estos objetos, y entre estos objetos y la acción en cuestión” (Vergnaud, 1996, p. 275).

Hoffman (2015) coincide con Vergnaud (1996), pero en particular considera a la conceptualización de la pendiente como una representación específica de este concepto. Por ejemplo, la representación $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la fórmula algebraica utilizada para calcular la pendiente de una recta y está ligada a la conceptualización razón algebraica; la propiedad relacionada con el ángulo que una recta forma con el eje x , conocida como ángulo de inclinación, está asociada a la concepción trigonométrica. El currículum utiliza representaciones variadas sobre lo que prevé que debieran aprender los estudiantes acerca de la pendiente. Para los propósitos de este trabajo, entendemos por conceptualizaciones de la pendiente a las representaciones de la pendiente acerca de sus propiedades, condiciones, circunstancias y relaciones con otros objetos como la *razón*, la *función*, la *tangente trigonométrica*, la *inclinación*, la *derivada* etc.

3 Método

3.1 Categorías de las Conceptualizaciones de la pendiente

Varios estudios (Moore-Russo; Conner; Rugg, 2011; Stump, 1999) ayudaron a clasificar y definir las diversas formas en que los individuos representan el concepto matemático de pendiente. En total, han ofrecido once conceptualizaciones de pendiente (Cuadro 1). En este estudio, la utilizaremos para identificar las que están presentes en los PEM.

Categoría	La pendiente como	Código
Razón geométrica	Razón del <i>desplazamiento vertical sobre el desplazamiento horizontal</i> en la gráfica de una recta (a menudo visto como el triángulo rectángulo en la gráfica de una recta que resalta el desplazamiento horizontal y el vertical).	G
Razón algebraica	Cambio en y sobre el cambio en x ; representación de la razón con expresiones algebraicas (a menudo visto como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$).	A
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como: grado, inclinación, ladeo, declive, empinado, <i>qué tan alto sube una recta</i> .	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en varias representaciones, incluyendo tablas, descripciones verbales (p. ej., x aumenta 2, y aumenta 3) o en situaciones que involucran razones relacionadas o constante de proporcionalidad.	F
Coeficiente paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o en $y - y_1 = m(x_2 - x_1)$ que actúa como un parámetro.	PC
Concepción trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que una recta forma con una recta horizontal (usualmente el eje positivo x); tangente del ángulo de inclinación.	T
Concepción en	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una	C

cálculo	curva, de una recta secante, o como razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso no lineal).	
Situación del mundo real	Situación física (estática, p. ej., una rampa, escalera, etc.) o situación funcional dinámica que relaciona dos variables (p. ej., distancia <i>vs.</i> tiempo, velocidad <i>vs.</i> tiempo, costo <i>vs.</i> tiempo).	R
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares en función de sus pendientes. También se refiere a que una única recta puede ser determinada si se da un punto <i>y</i> su pendiente.	D
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las <i>rectas</i> (puede ser referenciada como lo que hace que una línea sea <i>recta</i>); propiedad que garantiza la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se considere, es decir, <i>dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente</i> .	L
Indicador de comportamiento	Propiedad que indica el crecimiento, decrecimiento, tendencia horizontal de una recta; si no es cero, indica que la recta tiene una intersección con el eje <i>x</i> .	B

Cuadro 1 – Categorías de Conceptualizaciones de la pendiente

Fuente: adaptado de Nagle y Moore-Russo (2014, p. 44)

La pendiente es “un concepto de poderoso enlace” (Leinhardt; Zaslavsky; Stein, 1990, p. 54), que se forma de otros subconceptos entrelazados entre sí, tales como: razón, razón trigonométrica, incrementos ($\Delta y, \Delta x$), etc. En el currículum esos subconceptos suelen delinear trayectorias antes de que el concepto principal sea previsto su tratamiento. Para hacer esa diferenciación entre concepto y sus subconceptos decidimos utilizar los términos, implícito y explícito. Implícito si en el texto aparecían frases indicadoras de la presencia de subconceptos de la pendiente, por ejemplo, *fracciones equivalentes*, *razón*, *constante de proporcionalidad*, etc. Explícito cuando aparecía el término “pendiente” u otros con significado similar, tales como: *razón* o *tasa de cambio*, *inclinación*, *función creciente o decreciente* o alguna de sus representaciones algebraicas ($\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $y = mx + b$, etc.).

3.2 Análisis de Contenido

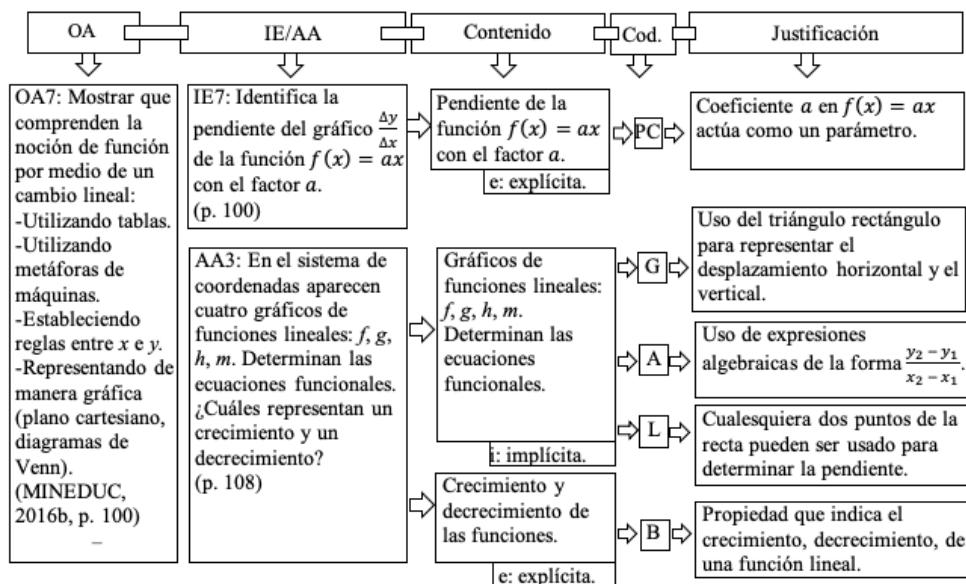
López-Aranguren (1996) plantea que el Análisis de Contenido es una técnica de investigación consistente en el análisis de la realidad social a través de la observación y el análisis documental. Sus objetivos, según Piñuel (2002), consisten en identificar los códigos utilizados por el emisor del discurso, su contenido manifiesto, el contexto en el que surge y se desarrolla el mensaje, así como descubrir y evidenciar sus contenidos latentes. De acuerdo con Bardin (2002), el Análisis de Contenido tiene tres fases. La primera, preanálisis, se centra en la elección de los documentos a analizar. La segunda, explotación del material, consiste en las operaciones de codificación, descomposición o enumeración del contenido. Y la tercera, tratamiento de los resultados, los cuales se realizan mediante operaciones estadísticas simples o complejas a fin de darles fiabilidad, y de ahí plantear inferencias sobre los objetivos previstos.

Siguiendo las fases de esta técnica, en la primera se obtuvieron los documentos oficiales

del currículum chileno del portal web del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC). Son dos los principales documentos que lo constituyen al currículum oficial de Chile, las Bases Curriculares y los Programas de Estudio de Matemáticas (PEM). Los primeros indican cuáles son los aprendizajes comunes obligatorios para todos los alumnos y los segundos entregan una organización temporal de los Objetivos de Aprendizaje (OA) para su logro en cada año escolar explicándolos con mayor detalle y amplitud. Los OA son definidos en los mismos términos en los dos documentos curriculares, p. ej., en el PEM de 5º grado se definen como aquellos que “integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral ...” (MINEDUC, 2013a, p. 8).

Los PEM (MINEDUC, 2013a, 2013b, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d, 2021a, 2021b), proporcionan orientación acerca de cómo secuenciar los OA, cómo combinarlos y cuánto tiempo destinar a cada uno de ellos. Asimismo, los OA incluyen un conjunto de Indicadores de Evaluación (IE), los cuales dan cuenta de las diversas maneras en que un estudiante puede demostrar que ha aprendido. Además, por cada OA se proporciona una amplia gama de Actividades de Aprendizaje (AA). Para el análisis del contenido del currículum se seleccionaron los doce PEM del MINEDUC, porque reflejan con mayor amplitud y precisión lo que se prevé que aprendan los estudiantes desde el 1.º grado hasta el 12º.

En la segunda fase se realizó la codificación y la selección de las unidades de análisis mediante la descomposición y enumeración de contenidos. Las unidades de análisis fueron las frases o términos que denotan el contenido *esencial* presente en los OA y que a su vez tienen similitud con el de alguna de las conceptualizaciones de la pendiente. Cuando las conceptualizaciones buscadas no estaban suficientemente claras o no estaban presente en los OA declarados, se recurrió a los IE o a las AA. En la Figura 1 se ilustran estos procedimientos.



Notas: OA: Objetivos de Aprendizaje; IE: Indicadores de Evaluación; AA: Actividades de Aprendizaje; Cód: Código de la conceptualización de pendiente.

Figura 1 – Procedimientos utilizados para el Análisis de Contenido
Fuente: elaboración propia

En el ejemplo, lo expresado en el OA7 refiere a la *noción de función* y al *cambio lineal*, frases insuficientes para identificar el contenido esencial y establecer una relación con alguna conceptualización. Por eso nos remitimos a los IE o a las AA, porque allí está claro que se refiere a la función lineal en su representación, gráfica, algebraica y a su comportamiento. En el IE7 del OA7, la expresión *Identifica la pendiente del gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la función $f(x) = ax$ con el factor a* se identificó como contenido similar con las características de la conceptualización coeficiente paramétrico (código PC), por lo que se catalogó como explícita.

Tercera fase, el tratamiento de los resultados se realizó sobre la base de la información organizada en la fase anterior y utilizando operaciones estadísticas simples como la frecuencia y la moda para cuantificar las conceptualizaciones de pendiente que se evidencian en los PEM. En esta fase, se empleó la técnica de triangulación caracterizada por Fusch, Fusch y Ness (2018) para verificar opiniones subjetivas, equilibrar opiniones y eliminar sesgos asociados con un solo investigador. Para ello, de forma independiente, cada uno de los investigadores analizó por separado los PEM con el propósito de explorar las conceptualizaciones presentes. Al final, en conjunto se compararon y se discutieron los hallazgos de cada investigador, en caso de algún desacuerdo, se discutieron sus hallazgos e interpretaciones hasta llegar a un consenso sobre el tipo de conceptualización presente. Para validar los resultados de este estudio, se siguió el criterio de expertos. Solicitamos a tres investigadores chilenos en educación matemática que revisaran la investigación reportada en este artículo y emitieran sus valoraciones y sugerencias al respecto. Sus juicios sirvieron para esclarecer algunas cuestiones relativas a las especificidades de los PEM.

4 Resultados

4.1 Conceptualizaciones de la pendiente del 1º al 6º grado (Educación Básica)

En este nivel se identificaron las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, ambas implícitas. Del 1º a 4º grado no se encontraron frases que hicieran pensar en la presencia de alguna conceptualización, se evidenciaron del 5º grado en adelante. La conceptualización de la propiedad funcional fue la más común en estos grados. En el 5º grado

se codificó a partir de la frase *fracciones equivalentes* (IE4 del OA7, IE1 del OA8, Cuadro 2), que refiere al valor numérico de las fracciones que representan la misma cantidad. En el 6º grado, la frase *razones equivalentes* (IE6 del OA3) sugiere implícitamente a la interpretación de la constante de proporcionalidad, ya que el valor numérico del cociente de dos o más razones equivalentes es constante. Por otro lado, en la resolución de problemas que involucra razones equivalentes se deja entrever la situación del mundo real, pues en una de las actividades planteada se refleja una situación funcional dinámica que relaciona dos variables, la cantidad de películas que se proyecta en un cine diariamente y la cantidad de horas (AA8 del OA3).

4.2 Conceptualizaciones de la pendiente del 7º al 8º grado (Educación Media Básica)

En este nivel se evidenciaron las conceptualizaciones: concepción física, coeficiente paramétrico, indicador de comportamiento, propiedad funcional, situación del mundo real, constante lineal, razón geométrica y razón algebraica. En 7º grado se distinguieron las conceptualizaciones: propiedad funcional, coeficiente paramétrico, situación del mundo real y constante lineal, todas implícitas. La propiedad funcional se codificó en la frase *constante de proporcionalidad*, referida a la actividad que pide encontrar la constante de proporcionalidad en el gráfico que relaciona la masa y el largo de un alambre (AA7 del OA8, Cuadro 2). La situación del mundo real se codificó en el enunciado *relación entre la masa de un alambre y su largo*, ya que resalta una situación funcional dinámica que relaciona dos variables.

g	e-i	Contenidos de los PEM	Código
5	i	OA7: Demostrar que comprende las fracciones propias. IE4: Crean un conjunto de fracciones equivalentes y explican por qué una fracción tiene muchas fracciones equivalentes a ella. (p. 116).	F
	i	OA8: Demostrar que comprende las fracciones impropias. IE1: Explican por qué las fracciones equivalentes representan la misma cantidad. (p. 116).	F
6	i	OA3: Demostrar que comprende el concepto de razón. IE6: Identifican razones equivalentes en el contexto de la resolución de problemas. (p. 52).	F
	i	AA8: En una sala de cine se proyectan 3 películas cada 5 horas. Si el cine proyecta películas durante 15 horas, ¿cuántas películas proyecta diariamente? (p. 61).	R
7	i	OA8: Demostrar que comprenden las proporciones directas: realizando tablas de valores, explicando las características de la gráfica, realizando problemas de la vida diaria y otras asignaturas. (p. 100). AA7: El gráfico muestra la relación entre la masa de un alambre y su largo. Determina qué tipo de relación es. Encuentra la constante de proporcionalidad y la expresión algebraica que modela la relación. (p.114).	F, PC, R, L
8	i	OA7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal. IE1: Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). (p. 100).	F
	e	IE3: Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad. (p. 100).	P
	e	IE7: Identifican la pendiente del gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la función $f(x) = ax$ con el factor a . (p. 100).	PC

i	IE9: Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales. (p. 100).	R
i	AA3: En un sistema de coordenadas aparecen cuatro gráficos de funciones lineales: f , g , h , m . ¿Cuáles representan un crecimiento y cuáles representan un decrecimiento?	G, A, L
e	Determinan las ecuaciones funcionales de las funciones f , g , h , m . (p. 108).	B
e	OA10: Mostrar que comprenden la función afín: Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. IE1: Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. (p. 102).	F, L
e	IE5: Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines: $f(x) = ax + b$. (p. 102)	R
e	IE6: Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la recta. (p. 102).	PC
i	AA4: Marcan los puntos A (2, 0) y B (0, 3) en el sistema cartesiano y grafican una recta que pasa por A y B. Elaboran la ecuación funcional $y = mx + n$ que corresponde a la recta que pasa por A y B. (p. 124).	G, A

Notas: OA: Objetivos de Aprendizaje; IE: Indicadores de evaluación; AA: Actividades de Aprendizaje; g: Grado; e: explícito; i: implícito

Cuadro 2 – Conceptualizaciones de pendiente de 1º-8º

Fuente: MINEDUC (2013a, 2013b, 2016a, 2016b)

La constante lineal fue codificada en la oración *determinen qué tipo de relación es* (AA7 del OA8, Cuadro 2), puesto que su representación gráfica dada es una línea recta, la cual, por un lado, resalta la rectitud de la recta y por otro, es la representación gráfica de la constante de proporcionalidad numérica. La conceptualización coeficiente paramétrico se asoció a la frase *expresión algebraica que modela la relación* (AA7 del OA8), la realización de esta actividad requiere construir expresiones algebraicas del tipo: $b = ax$, en la cual está presente el parámetro a que denota la constante de proporcionalidad.

En 8º grado se notaron las ocho conceptualizaciones ya mencionadas al principio de este apartado. El estudio de las funciones lineales y el uso del término pendiente (denominada también como inclinación) posibilitaron esta diversidad de conceptualizaciones, algunas implícitas y otras explícitas. Las frases *constantes de proporcionalidad* (IE1 del OA7) y *tasa de cambio constante* (IE1 del OA10) permitieron codificar la propiedad funcional. En el IE1 del OA7 esta conceptualización está presente y es implícita, porque es el preámbulo para el estudio del concepto de pendiente, pues refiere que los pares de valores que tienen el mismo cociente sea denominado como constante de proporcionalidad. Mientras que el IE1 del OA10 se consideró explícita, porque es referenciada como el valor constante de una función afín.

El uso explícito del término *pendiente* o *inclinación* (IE3 del OA7, Cuadro 2) permitió codificar la conceptualización propiedad física, pues el uso de la expresión *inclinación* es una forma de describir la pendiente de una recta. La conceptualización coeficiente paramétrico se codificó en la oración *identificar la pendiente de la función $f(x)=ax$ con el factor a* (IE7 del OA7, IE6 del OA10), esta conceptualización está presente y es explícita, debido a que el parámetro a representa la pendiente de una recta. La conceptualización situación del mundo

real se codificó por medio de los enunciados que referían al *modelado de situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales* (IE9 del OA7, IE5 del OA10).

Las frases *determinan las ecuaciones funcionales* f, g, h, m (AA3 del OA7) y *elaboran la ecuación funcional* $y = mx + n$ (AA4 del OA10) permitieron codificar las conceptualizaciones razón geométrica y razón algebraica, ambas consideradas implícitas, porque posiblemente con la gráfica presentada en las actividades se haga uso del triángulo rectángulo para representar el desplazamiento horizontal y el vertical, sin que se indique en esas actividades su utilización para obtener la pendiente de la recta. Análogamente la razón algebraica, por el posible uso de expresiones algebraicas de la forma $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La conceptualización constante lineal se codificó mediante las frases *determinar las ecuaciones funcionales* (AA3 del OA7) y *trasladando funciones lineales en el plano cartesiano* (OA10). En la AA3 del OA7, esta conceptualización está presente, ya que posibilita determinar la pendiente de la recta a partir de dos puntos cualesquiera de la misma (por su rectitud), además se consideró implícita porque se pide determinar la ecuación funcional sin que necesariamente en esa actividad se recomienda utilizar u obtener la pendiente. En el OA10 se consideró explícita, porque al trasladar una recta no se afecta la pendiente. La conceptualización de indicador de comportamiento se notó en la interrogante *¿cuáles de las funciones representan un crecimiento y un decrecimiento?* (AA3 del OA7), se consideró explícita, ya que en ella se pide seleccionar qué funciones son crecientes o decrecientes, términos que son congruentes con la caracterización de esta conceptualización.

4.3 Conceptualizaciones de la pendiente del 9º al 12º grado (Educación Media Superior)

En este nivel se hicieron evidentes nueve conceptualizaciones de pendiente, omitiéndose la propiedad funcional y concepción en cálculo (Cuadro 3). El estudio sugerido en los PEM de este nivel acerca de: las rectas paralelas y perpendiculares, de las razones trigonométricas, de los modelos matemáticos que describen situaciones de crecimiento o decrecimiento y a la resolución de problemas acerca de la recta y su representación analítica; fueron clave para su codificación.

En 9º grado se evidenciaron las conceptualizaciones: situación del mundo real, propiedad determinante, razón geométrica, razón algebraica, coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento. Las conceptualizaciones propiedad física, propiedad funcional y constante lineal presentes en el 8º grado se omiten en 9º grado. La frase *planos inclinados*

(techo) (OA5, Cuadro 3) permitió codificar la situación del mundo real, debido a que refiere a una situación física (estática), además considerada explícita, porque el término *inclinado* se ha relacionado con la pendiente. La propiedad determinante se codificó mediante las frases *haz de rectas paralelas en el plano cartesiano* (OA5) y *determinan la ecuación de más rectas paralelas* (AA1 del OA5), considerada como explícita, ya que se solicita que determinen y grafiquen rectas paralelas a partir de una dada, situación que coincide explícitamente con la conceptualización en mención. En virtud de que en esa misma actividad (AA1 del OA5) se requiere la construcción de una recta que pasa por dos puntos y determinar su ecuación, esos requerimientos se asociaron las conceptualizaciones de razón geométrica y razón algebraica. Estas dos conceptualizaciones se consideraron implícitas debido a que no se indica cómo obtener la pendiente de la recta para modelar la ecuación requerida. Sin embargo, la actividad posibilita el uso del triángulo rectángulo para resaltar el desplazamiento horizontal y el vertical o al uso de expresiones algebraicas, para la obtención de la pendiente. La conceptualización coeficiente paramétrico se codificó en el enunciado *reconocen el cociente $-a/b$ como la pendiente de la recta con ecuación $ax + by = c$* (IE2 del OA5), se consideró como explícita, ya que es necesario calcular $-a/b$ como la pendiente de la recta. La conceptualización de indicador de comportamiento se codificó en la actividad que se pide determinar *¿En cuál(es) de los gráficos los puntos satisfacen $ax + by = c$, con $a > 0, b > 0 ; a = 0?$* (AA9 del OA5), para su realización es necesario analizar los signos del cociente $-a/b$ para determinar el comportamiento de las gráficas. Se catalogó como explícita, ya que si el cociente es positivo la gráfica crece, si es negativo decrece y si es cero se mantiene constante, propiedades que son congruentes con la caracterización de la conceptualización en mención.

g	e-i	Contenidos de los PEM	Código
9	e	OA5: Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$; p. ej: un haz de rectas paralelas en plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo). AA1: Determinan la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (5, 0) y Q (0, 3) y la expresan a la forma $ax + by = c$ y determinan la ecuación de más rectas paralelas. (p. 113).	R, D
	i		G, A
	e	IE2: Reconocen el cociente $-a/b$ como pendiente de la recta con la ecuación $ax + by = c$. (p. 102).	PC
	e	AA9: ¿En cuál(es) de los gráficos los puntos satisfacen $ax + by = c$, con $a > 0, b > 0 ; a = 0?$ (p. 118).	B
10	e	OA8: Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. (p. 124). AA9: El ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal... (p. 139).	T
	e	AA1: La pendiente de una calle se expresa en porcentajes, que se refiere a la razón entre la altura (vertical) a la cual sube la calle, y la distancia por la que avanza en dirección horizontal. (p. 133).	G
	e	AA3: Determinan la pendiente más inclinada del cerro y el ángulo de elevación. (p. 135).	P, R
	e	OA9: Aplicar razones trigonométricas en diversos contextos, en la composición y	P

	i	descomposición de vectores. (p. 124). AA5: Un esquiador que corre en una pendiente cuyo ángulo de elevación de $\alpha = 38^\circ$. Expresan los componentes del vector en dirección (x) y en la dirección (y), mediante razones trigonométricas. (p. 142).	T
11	i	OA3: Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento que involucran las funciones exponenciales y logarítmicas. (p. 60). AA4: Encuentra la ecuación de la recta, y compara los valores con el modelado exponencial ($y = ce^{mx}$). (p. 86).	G, A, PC
12	e	OA4: Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica. IE3: Elaboran ecuaciones de rectas a partir de la pendiente y las coordenadas de un punto dado. (p. 129)	D
	e	AA1: En una tabla se muestra costos horarios y margen de contribución por hora de arriendo de una retroexcavadora: Grafica la situación en el plano cartesiano ¿Cómo es la pendiente de la recta en este caso? (p. 131)	R, B
	e	AA3: Dibuja una recta cualquiera en el plano cartesiano, marca dos puntos sobre ella. Determina la pendiente de la recta y su ecuación usando la expresión: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Usando uno de los puntos antes elegidos u otro punto sobre la recta, expresa la ecuación de la recta, usando la expresión: $y - y_0 = m(x - x_0)$. (p. 146).	A, PC, L

Notas: OA= Objetivos de Aprendizaje; IE= Indicadores de evaluación; AA= Actividades de Aprendizaje.

Cuadro 3 – Conceptualizaciones de pendiente de 9º-12º

Fuente: Elaboración propia con datos del MINEDUC (2016c, 2016d, 2021a, 2021b)

En el 10º grado quedaron de manifiesto las conceptualizaciones: concepción trigonométrica, razón geométrica, propiedad física y situación del mundo real. Los objetivos y las actividades fueron clave para asociar estas conceptualizaciones. La concepción trigonométrica se asoció en las frases: *el ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal* (AA9 del OA8) y *razones trigonométricas en el contexto de la composición y descomposición de vectores* (AA5 del OA9). En la AA9 del OA8, esta conceptualización está presente y es explícita, ya que refiere al ángulo que una recta forma con una recta horizontal. La AA5 del OA9 se consideró como implícita, aunque no se indique el uso de la razón trigonométrica tangente para expresar las componentes del vector, las características de la actividad posibilitan su uso.

La conceptualización razón geométrica se codificó en la actividad que refiere que la pendiente de una calle es *la razón entre la altura (vertical) a la cual sube la calle, y la distancia por la que avanza en dirección horizontal* (AA1 del OA8), a su vez se catalogó como explícita, debido a que la actividad posibilita el uso del triángulo rectángulo para indicar el desplazamiento horizontal y el vertical, para medir la pendiente de los perfiles de cada calle. La AA3 del OA8 en donde se pide determinar *la pendiente más inclinada de un cerro*, se asoció la propiedad física y situación del mundo real. Es evidente la referencia al mundo real y el uso de la expresión *inclinación* a través de la cual se reconoce tempranamente a la pendiente, la *pendiente de un cerro* refiere a una situación física estática. Ambas son explícitas, porque utilizan expresamente el término pendiente. En la AA5 del OA9 también se codificó la propiedad física, el uso de la expresión *un esquiador que corre en una pendiente* hace alusión

a lo inclinado o empinado que se encuentra el lugar (que describe el contexto de la actividad). Por ello, se catalogó explícita, ya que este tipo de terminología se relaciona con la pendiente.

En el 11º grado se encontraron las conceptualizaciones: razón geométrica, razón algebraica y coeficiente paramétrico. En la actividad que pide aplicar un modelo exponencial ($f(x) = ce^{kx}$) en ámbitos digitales y de las redes sociales (AA4 del OA3, Cuadro 3), se sugiere comparar los datos de una función exponencial con la ecuación de la recta que mejor se ajuste a los datos de dicha función. Por ello, a la frase *determinar la ecuación de la recta*, se asoció a las tres conceptualizaciones y de forma implícita. Esto se debe a que no se indica cómo obtener la pendiente de la recta para modelar la ecuación solicitada. Sin embargo, la actividad puede propiciar el uso del triángulo rectángulo para representar el desplazamiento horizontal y el vertical o al uso de expresiones algebraicas, para la obtención de la pendiente. La del coeficiente paramétrico porque requiere reconocer el parámetro m para obtener la ecuación de la recta.

En el 12º grado, se identificaron las conceptualizaciones: propiedad determinante, situación del mundo real, indicador de comportamiento, razón algebraica, coeficiente paramétrico y constante lineal, todas consideradas como explícitas. La propiedad determinante se codificó a partir de la frase *elaboran ecuaciones de rectas a partir de la pendiente y las coordenadas de un punto dado* (IE3 del OA4), ya que refiera a una de las características de esta conceptualización. La situación del mundo real se asoció al enunciado *costos horarios y margen de contribución por hora* (AA1 del OA4), pues resalta una situación funcional dinámica que involucra variables ligadas a la realidad. En esta misma actividad, se codificó la conceptualización de indicador de comportamiento, ya que se pide graficar la situación en el plano cartesiano y luego analizar el comportamiento de la gráfica, se consideró explícita porque posibilita visualizar la cantidad de decrecimiento de una recta.

En la AA3 del OA4 se advierten diferentes formas en la que se puede determinar la pendiente de la recta. Por ejemplo, el uso de la representación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, lo que llevó a codificar la razón algebraica, lo explícito se debe a que se solicita el uso de expresiones algebraicas. También se pide *expresar la ecuación de la recta, usando la expresión: $y - y_0 = m(x - x_0)$* (AA3 del OA4), en donde está presente el parámetro m ; lo explícito radica en que, en esta expresión, m representa la pendiente. Otra forma en la que se solicita es *usando uno los puntos antes elegidos u otro punto sobre la recta* (AA3 del OA4), por lo que se codificó la constante lineal, se consideró explícita porque se recomienda utilizar u obtener la pendiente.

4.4 Conceptualizaciones de la pendiente enfatizadas

Del 1º al 4º grado no se encontró evidencia de la presencia de alguna de las conceptualizaciones, es en 5º grado que se encontró una de ellas, la conceptualización propiedad funcional. En el 6º grado, además de la propiedad funcional se evidenció la situación del mundo real, las dos encontradas en ambos grados en forma implícita, referidas principalmente a situaciones donde se utilizan fracciones equivalentes. A juzgar por su frecuencia la propiedad funcional fue la enfatizada en este nivel (Figura 2).

En el nivel de Educación Media Básica se incrementa la cantidad de conceptualizaciones, en Educación Básica solo aparecieron dos y en este nivel aumentó hasta ocho. En este nivel educativo, específicamente en el PEM de 8º grado, aparece por primera vez el término de pendiente como *inclinación* referida a una gráfica lineal que depende de la constante de proporcionalidad. En este nivel se pone énfasis en la propiedad funcional, situación del mundo real, coeficiente paramétrico y constante lineal, aunque se pone también particular atención a la razón geométrica y la razón algebraica. El énfasis de la primera y la segunda conceptualización es debido al tratamiento específico de la razón de cambio constante, generalmente referidas a situaciones de la realidad que se modelan mediante funciones lineales. La tercera tiene presencia importante, porque le da sustento al lenguaje algebraico que se utiliza para modelar situaciones a través de funciones lineales. La cuarta tiene presencia en la representación gráfica de la proporcionalidad directa y las funciones lineales y la colinealidad de los puntos de una recta. La presencia de la razón geométrica y razón algebraica es consecuencia natural de las cuatro conceptualizaciones enfatizadas.

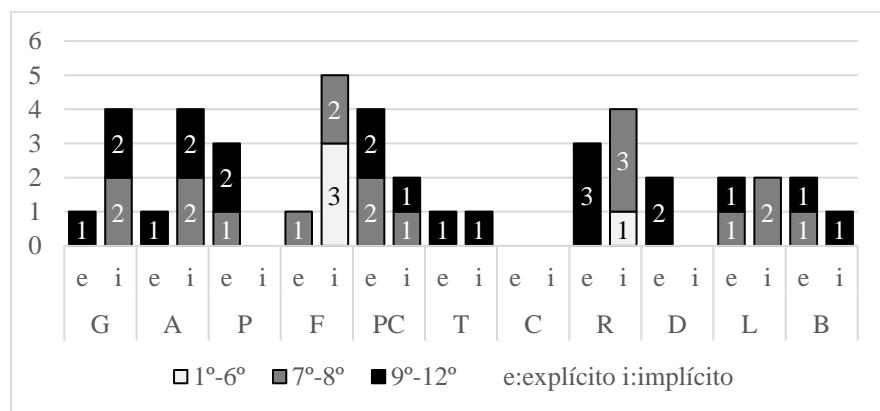


Figura 2 – Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum chileno ($n=43$)
 Fuente: Datos de la investigación

En Educación Media Superior se incrementa la variedad de las conceptualizaciones respecto de la Media Básica, en este nivel se evidenciaron nueve y en Media Básica ocho

(Figura 2). En Educación Media Superior no aparece la propiedad funcional, en cambio, en la Básica y en la Media Básica sí. En la Educación Media Superior se pone énfasis en el coeficiente paramétrico y la situación del mundo real, no se encontró mención de la derivada o razón de cambio instantánea. El coeficiente paramétrico se refleja en las funciones lineales del tipo ($f(x) = ax + n$) o a veces exponenciales que modelan situaciones de la vida diaria o de las ciencias. Las dos conceptualizaciones enfatizadas se reflejan en actividades que tienen relación directa con la realidad, por ello el énfasis en la conceptualización situación del mundo real.

5 Discusión

En el currículum chileno las conceptualizaciones de la pendiente inician su presencia en la Educación Básica en donde se hicieron evidentes la situación del mundo real y la propiedad funcional. A diferencia del currículum mexicano (Dolores; Rivera; Moore-Russo, 2020), del colombiano y el estadounidense (Dolores; Mosquera, 2022; Nagle; Moore-Russo, 2014), esas mismas conceptualizaciones están implícitamente presentes desde grados anteriores. La propiedad funcional, que es la conceptualización enfatizada, se desarrolla mediante las ideas de razón y de fracciones o razones equivalentes. Estas ideas constituyen los preliminares numéricos de la razón constante de cambio, propiedad esencial de la propiedad funcional. En el currículum estadounidense se sugiere una vía semejante previo a la formación del concepto de pendiente, se recomienda “analizar el cambio en varios contextos” (NCTM, 2000, p. 163), para dar oportunidad a los estudiantes de que estudien situaciones que muestren diferentes patrones de cambio, en particular el que ocurre a una razón constante y que es ligado a la pendiente de la recta. En el currículum mexicano se prevé una vía similar, utilizando la idea de constante de proporcionalidad para identificar a la razón de cambio constante (Dolores; Rivera; Moore-Russo, 2020).

En el currículum de Chile de la Educación Media Básica se evidenciaron ocho conceptualizaciones (F, PC, R, L, G, A, B, P) con énfasis en las cuatro primeras: propiedad funcional, coeficiente paramétrico, situación del mundo real y constante lineal. Igual que en el currículum estadounidense, es escasa la atención prestada a la concepción trigonométrica en el currículum chileno, a pesar de que la pendiente es introducida mediante la idea de inclinación que se presta para el uso de los ángulos de inclinación y su equivalente trigonométrico. En cambio, está prevista en el currículum mexicano (Dolores; Rivera; Moore-Russo, 2020) y escasamente en el colombiano (Dolores; Mosquera, 2022). Las conceptualizaciones enfatizadas

en el currículum chileno se hacen notar en la transición de la constante de proporcionalidad numérica prevista en la Media Básica a la representación algebraica y gráfica del concepto de pendiente en la Media Superior. En el currículum chileno se prevé el inicio explícito de la pendiente en 8º grado, igual que en el estadounidense y el colombiano (Dolores; Mosquera, 2022) en cambio, en el mexicano hasta el 9º grado. Su introducción en el currículum chileno está mediada por la noción geométrica de la inclinación de la recta, en cambio, en el resto de la currículum mencionada se introduce como razón de cambio, privilegiando en estos el estudio de la variación y el cambio.

En currículum chileno de la Educación Media Superior se hicieron evidentes nueve conceptualizaciones (PC, R, A, B, P, L, G, D, T) con énfasis en el coeficiente paramétrico, situación del mundo real y la razón algebraica. En este nivel no aparece la propiedad funcional, como sí lo está en la Educación Básica y en la Media Básica. Las conceptualizaciones coeficiente paramétrico y la situación del mundo real también son enfatizadas en el currículum mexicano, sin embargo, no se encontró en el chileno la concepción en cálculo como sí lo está en el mexicano (Dolores; Rivera; Moore-Russo, 2020), en el estadounidense (NCTM, 2000, p. 37), y en el colombiano con mayor insistencia (Dolores; Mosquera, 2022). Las conceptualizaciones enfatizadas se utilizan para modelar situaciones vinculadas a realidad por medio de funciones. El estudio de las funciones es una parte esencial del precálculo y en el nivel de Educación Media Superior ocupan un lugar importante, en cambio, en ese mismo nivel en el currículum mexicano y colombiano (Dolores; Mosquera, 2022; Dolores; Rivera; Moore-Russo, 2020) van más allá del estudio de las funciones, ya que sugieren el estudio de la razón de cambio instantánea (derivada) en funciones que modelan situaciones de variación y cambio.

6 Conclusiones

Este estudio se propuso como objetivo el de investigar qué conceptualizaciones de la pendiente se evidencian en el currículum de matemáticas de Chile y cuáles son enfatizadas. Los datos obtenidos indican que, en conjunto, diez de las once conceptualizaciones utilizadas por Nagle y Moore-Russo (2014) se hicieron evidentes en el currículum chileno del nivel de Educación Básica hasta la Media Superior, está ausente la concepción en cálculo; se enfatizan la propiedad funcional, el coeficiente paramétrico, la situación del mundo real, razón algebraica y constante lineal. El énfasis en la propiedad funcional podría contribuir a la compresión del concepto de pendiente y de la razón de cambio, posibilitando las conexiones entre ambos conceptos, ya que hay evidencias de que los estudiantes los consideran conceptos inconexos

(Dolores; Rivera; García, 2019; Teuscher; Reys, 2010).

La conceptualización situación del mundo real es enfatizada en el currículum chileno, pero según los resultados reportados por Stump (2001) y Nagle y Moore-Russo (2013b), los futuros profesores le dan escasa importancia en la enseñanza y es poco utilizada por los estudiantes según el trabajo de Dolores, Rivera y García (2019). El énfasis de la conceptualización situación del mundo real proviene de la tendencia marcada por la OECD (2004) hacia el desarrollo de las competencias matemáticas. En ella se asume como competencia matemática al conocimiento matemático puesto en uso funcional en una multitud de situaciones diferentes y variadas, en las cuales, a su vez, se pretende que el individuo identifique y entienda las funciones que tiene la matemática en el mundo y pueda utilizarla para satisfacer las necesidades de su vida, de donde se infiere que es esencial enseñar la pendiente en varios contextos con particular énfasis en situaciones del mundo real. Nagle y Moore-Russo (2013b) sugieren que la comprensión del concepto de pendiente se puede propiciar mediante la construcción de una red de componentes conectados en donde las situaciones del mundo real posibilitan la integración de todas las conceptualizaciones.

Los resultados de este trabajo indican ausencia de nociones relativas a la pendiente en los primeros cuatro grados de la Educación Básica. Las reformas curriculares podrían considerar la inclusión en esos grados de conceptualizaciones de la pendiente como la situación del mundo real y la propiedad física. Para que los niños empiecen a familiarizarse desde edades tempranas con la idea de que la pendiente está presente en la realidad (en calles empinadas, en cuestas de montañas o en rampas, etc.) de modo que utilicen términos como: empinado, cuesta, inclinación, u otro similar, con significados ligados al mundo en que se desenvuelven. Se podría fortalecer la comprensión de la pendiente procurando conexiones entre las ideas intuitivas desarrolladas en la Educación Básica con las conceptualizaciones en las que se utilizan representaciones numéricas, gráficas y algebraicas iniciadas en el Nivel Medio Básico. Un tratamiento formal pudiera lograrse en el Nivel Medio Superior previendo conexiones más ricas entre las once conceptualizaciones, confirmando más espacio curricular a la concepción en cálculo y a la trigonométrica, teniendo siempre presente que la conceptualización del mundo real es por excelencia la integradora de todas las demás.

Finalmente, el presente estudio fue realizado analizando los doce PEM del currículum chileno, por tanto, los hallazgos aquí reportados se restringen a lo que ahí se prevé. Trabajos futuros podrían examinar las relaciones entre las conceptualizaciones de la pendiente previstas en el currículum, las tratadas en los libros de texto, las que se enseñan en el aula y las que aprenden los estudiantes. Con ello se podría tener una mejor aproximación sobre la enseñanza

y el aprendizaje de este concepto en Chile o en algún otro país latinoamericano.

Referencias

- BARDIN, L. **El análisis de contenido**. 3. ed. Madrid: Akal, 2002.
- CAMBRIDGE DICTIONARY. **Conceptualization**. Cambridge: Cambridge University, 2024. Disponible en: <https://dictionary.cambridge.org/es/diccionario/ingles/conceptualization>. Acceso: 12 ago. 2024.
- CASEY, S. A.; NAGLE, C. Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 92, n. 2, p. 163-177, ene. 2016.
- CHO, P.; NAGLE, C. An analysis of students' mistakes on routine slope tasks. In: CONFERENCE ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 39., 2017, Indianapolis. **Proceedings...** Indianapolis: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators, 2017. p. 645-652. Disponible en: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED581294.pdf>. Acceso en: 26 dic. 2024.
- DOLORES, C.; IBÁÑEZ, G. Conceptualizaciones de la pendiente en libros de texto de matemáticas. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 825-846, 2020.
- DOLORES, C.; MOSQUERA, G. Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas. **Educación Matemática**, México, v. 34, n. 2, p. 217-244, 2022.
- DOLORES, C.; RIVERA, M. I.; GARCÍA, J. Exploring mathematical connections of pre- university students through tasks involving rates of change. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 50, n. 3, p. 369-389, 2019.
- DOLORES, C.; RIVERA, M. I.; MOORE-RUSSO, D. Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. **School Science and Mathematics**, Hoboken, v. 120, n. 2, p. 104-115, 2020.
- FUSCH, P.; FUSCH, G. E.; NESS, L. Denzin's paradigm shift: Revisiting triangulation in qualitative research. **Journal of Social Change**, Minneapolis, v. 10, n. 1, p. 19-32, 2018.
- HOFFMAN, W. **Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task based interviews**. 2015. Thesis (Doctoral of Philosophy in Curriculum and Instruction) - Faculty of Education, University of North Carolina, Charlotte, 2015.
- LEINHARDT, G.; ZASLAVSKY, O.; STEIN, M. K. Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. **Review of Educational Research**, Washington, v. 60, n. 1, p. 1-64, 1990.
- LÓPEZ-ARANGUREN, E. M. El análisis de contenido. En: GARCÍA-FERRANDO, M.; IBÁÑEZ, J.; ALVIRA, F. (coord.). **El análisis de la realidad social: Métodos y técnicas de investigación**. Madrid: Alianza Editorial, 1996. p. 594-616.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática**: Programa de estudio quinto año básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2013a. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18980_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática**: Programa de estudio sexto año básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2013b. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18981_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática:** Programa de estudio séptimo básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2016a. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18982_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática:** Programa de estudio octavo básico. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2016b. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática:** Programa de estudio primero medio. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2016c. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Matemática:** Programa de estudio segundo medio. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2016d. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34360_programa.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Programa de estudio 3º medio: Matemática.** Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2021a. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140137_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Programa de estudio 4º medio: Matemática.** Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, 2021b. Disponible en: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140142_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf. Acceso en: 4 dic. 2024.

MOORE-RUSSO, D.; CONNER, A.; RUGG, K. Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 76, n. 1, p. 3-1, jan. 2011.

MUDALY, V.; MOORE-RUSSO, D. South African teachers' conceptualizations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an advanced certificate in education programme. **Pythagoras**, Durbanville, v. 32, n. 1, p. 27-33, sep. 2011.

NAGLE, C.; MOORE-RUSSO, D. The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. **Investigations in Mathematics Learning**, London, v. 6, n. 2, p. 1-18, 2013a.

NAGLE, C.; MOORE-RUSSO, D. Slope: a network of connected components. In: CONFERENCE ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 35., 2013, Chicago. **Proceedings...** Chicago: University of Illinois at Chicago, 2013b. p. 127-135. Disponible en: <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2035%202013%20Proceedings.pdf>. Acceso en: 26 dic. 2024.

NAGLE, C.; MOORE-RUSSO, D. Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. **The Mathematics Educator**, Georgia, v. 23, n. 2, p. 40-59, dec. 2014.

NAGLE, C.; MOORE-RUSSO, D.; FISHER, T. A study of slope explanations across a standards-based textbook series. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, London, v. 23, n. 1, p. 25-45, jun. 2022.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS -NCTM. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. **The PISA**

2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills. Paris: OECD Publishing, 2004.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. PISA 2018: Insights and interpretations. Paris: OECD Publishing, 2019.

PARRA-UREA, Y.; PINO-FAN, L. Análisis ontosemiótico de libros de texto chilenos: El caso del concepto de función. In: CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS, 2., 2017. Granada. **Actas...** Granada: Universidad de Granada, 2017. p. 1-11. Disponible en: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acceso en: 26 dic. 2024.

PINO-FAN, L.; PARRA-URREA, Y; CASTRO-GORDILLO, W. Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. **Magis: Revista Internacional de Educación Matemática**, Bogotá, v. 11, n. 23, p. 201-220, ene. 2019.

PIÑUEL, J. L. Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. **Estudios de Sociolinguística**, Vigo, v. 3, n. 1, p. 1-42, abr. 2002.

PORTRER, A. C. **Curriculum assessment** (Additional SCALE research publications and products: Goals 1, 2, and 4). Nashville: Vanderbilt University, 2004.

REMILLARD, J.; HECK, D. Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. **ZDM**, Hamburg, v. 46, n. 5, p. 705-718, 2014.

RIVERA, M. I.; DOLORES, C. Preconcepciones de pendiente en estudiantes de educación secundaria. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 39, n. 1, p. 195-217, 2021.

SALGADO, G.; RIVERA, M. I.; DOLORES, C. Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del bachillerato. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 57, p. 41-56, 2019.

STANTON, M.; MOORE-RUSSO, D. Conceptualizations of slope: A review of state standards. **School Science and Mathematics**, Hoboken, v. 112, n. 5, p. 270-277, 2012.

STEIN, M.; REMILLARD, J.; SMITH, M. How curriculum influences student learning. In: LESTER, F. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 319-369.

STUMP, S. High school precalculus students' understanding of slope as measure. **School Science and Mathematics**, Hoboken, v. 101, n. 2, p. 81-89, 2001.

STUMP, S. Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. **Mathematics Education Research Journal**, Sydney, v. 11, n. 2, p. 124-144, 1999.

TEUSCHER, D.; REYS, R. Slope, rate of change, and steepness: do students understand the concepts? **Mathematics Teacher**, Washington, v. 103, n. 7, p. 519-524, 2010.

VERGNAUD, G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In: BARBIER, J. (ed.). **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: Presses Universitaires de France, 1996. p. 275-292.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, Barcelona, v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013.



**Submetido em 25 de Outubro de 2023.
Aprovado em 26 de Agosto de 2024.**