
CONTROLE ÓTIMO \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ COM MODIFICAÇÃO DE ZEROS PARA O PROBLEMA DE RASTREAMENTO USANDO LMI

Edvaldo Assunção*

edvaldo@dee.feis.unesp.br

Cristiano Quevedo Andrea*

quevedo@dee.feis.unesp.br

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*

marcelo@dee.feis.unesp.br

*Unesp - Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Elétrica
Caixa Postal 31, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

ABSTRACT

The problem of signal tracking, with disturbance in the plant, is solved using a zero variation methodology. A controller is designed in order to minimize the \mathcal{H}_2 -norm of the closed-loop, such that the effect of the perturbation is attenuated. The modification of the zeros is used to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from the reference input signal to the error signal, where the error is taking as the difference between the reference and the output signals, i.e., a tracking problem. The design is formulated on the linear matrix inequalities framework, such that the global optimum of the problem is obtained. A example illustrates the effectiveness of the proposed method.

KEYWORDS: LMI, Optimal Control, Zero Variation, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -Norm.

RESUMO

Uma metodologia de modificação de zeros é proposta para resolver o problema de rastreamento de sinal de referência, sendo que considera-se ainda a existência de um sinal de entrada exógena de perturbação ou distúrbio na planta. Em um primeiro momento projeta-se um controlador para minimizar a norma \mathcal{H}_2 do sistema a fim de diminuir o efeito desta perturbação. A seguir, através da modificação de ze-

ros, minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o erro entre o sinal de saída e a referência, constituindo portanto um rastreador de sinal. Os projetos são equacionados utilizando-se desigualdades matriciais lineares, que permitem descrever problemas de otimização convexa. É apresentada a obtenção do ótimo global da solução do problema através da modificação de zeros. Por fim, um exemplo numérico ilustra a viabilidade da abordagem proposta.

PALAVRAS-CHAVE: LMI, Controle Ótimo, Modificação dos Zeros, Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

1 INTRODUÇÃO

Na vasta literatura sobre sistemas de controle, como por exemplo (Ogata, 1997) e (Assunção e Peres, 2001), pode-se verificar facilmente a utilização de alocação de pólos em sistemas de malha fechada, enquanto para os zeros, há menor quantidade de textos publicados abordando este assunto. Um texto clássico de controle que trata o tópico alocação de zeros de forma mais detalhada pode ser encontrado em (Franklin et al., 1994). Ainda, entre os primeiros trabalhos publicados que tratam o assunto estão (Murdoch, 1975) e (Murdoch, 1977), que abordam a potencialidade da alocação de zeros em sistemas de múltiplas entradas.

Existem resultados práticos que demonstram que a alocação de zeros em um sistema de controle pode afetar não somente a resposta transitória do sistema, mas também características de robustez, rejeição a perturbação, esforços de

Artigo submetido em 30/04/2003

1a. Revisão em 5/05/2003; 2a. Revisão 6/02/2004

Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. Liu Hsu

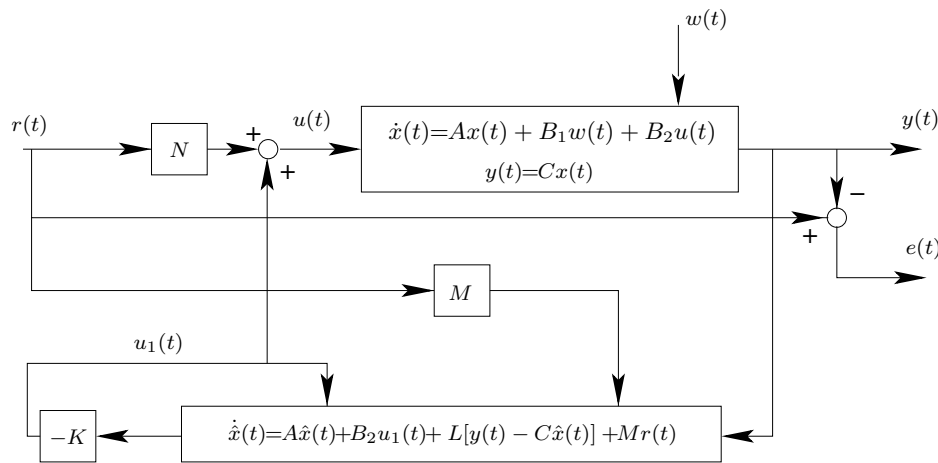


Figura 1: Sistema de controle ótimo com posicionamento de pólos e zeros.

controle e até mesmo aspectos de implementação do controlador (Pierri, 1999). Ainda, em (Schmidt e Benson, 1995) é apresentada uma proposta de imposição de zeros, onde é utilizada uma variação da síntese LQG/LTR.

Em (Moore e Bhattacharyya, 1990) é considerado um problema de largo interesse em controle, que é projetar controladores através de alocação de zeros que resultem em sistemas de malha fechada com características no domínio no tempo, tais como porcentagem de overshoot e tempo de estabelecimento. Ainda em (Hauksdóttir, 2000) utiliza-se a alocação ótima dos zeros para redução da ordem de modelos.

Um projeto para o controle de rastreamento robusto confiável para o problema de falhas em atuadores e controle de defeitos na superfície de aeronaves é apresentado em (Liao et al., 2002), sendo abordado um método baseado em um controle misto linear quadrático (LQ)/ \mathcal{H}_∞ no desempenho de um rastreador e a otimização multiobjetivo é realizada em termos de inequações lineares quadráticas.

Enfim, a alocação de zeros vem sendo utilizada em diversos assuntos em sistema de controle, mas não existe na literatura uma parametrização convexa do problema de modificação dos zeros e a otimização das normas \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ em sistemas de controle automático. Em (Pierri, 1999), os autores conseguem otimizar a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema de controle através da alocação de zeros, porém, a parametrização do problema em função de uma variável, torna-o não-linear.

Neste trabalho, descreve-se a formulação da otimização deste problema na forma de desigualdade matriciais lineares - LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), representando uma formulação convexa do problema. O método proposto é de simples equacionamento em relação a outras técnicas de rastreamento e o principal resultado é que o ótimo global do problema é obtido com pequeno esforço computacio-

nal, pois as LMIs podem ser resolvidas usando-se algoritmos de programação linear de convergência polinomial (Boyd et al., 1994). Um exemplo ilustra a metodologia proposta.

2 FORMULAÇÃO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO PARA O RASTREADOR DE SINAIS

Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo descrito na forma de variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0; \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x(t)$ é o vetor de estados, $y(t)$ é a saída de interesse do sistema, $u(t)$ a entrada de controle e $w(t)$ é uma entrada exógena (do tipo distúrbio ou perturbação).

Considera-se a estrutura ilustrada na Figura 1 para o problema ótimo de rejeição do sinal de perturbação e rastreamento de sinal de controle.

Inicialmente projeta-se o controlador K , que é um compensador \mathcal{H}_2 , segundo a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$. Tal controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma \mathcal{H}_2 de $w(t)$ para $y(t)$ conforme descrito na Figura 2.

Na etapa seguinte, projeta-se um estimador de Kalman (Gahinet et al., 1995) (Kalman, 1960) para reconstruir os estados e por fim obtêm-se o ganho N e o vetor M , indicados na Figura 1, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs. N e M modificam as posições dos zeros de $r(t)$ para $u(t)$ de forma a otimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a saída $e(t)$ e a entrada de controle $r(t)$.

O diagrama de blocos da Figura 1 pode ser descrito através

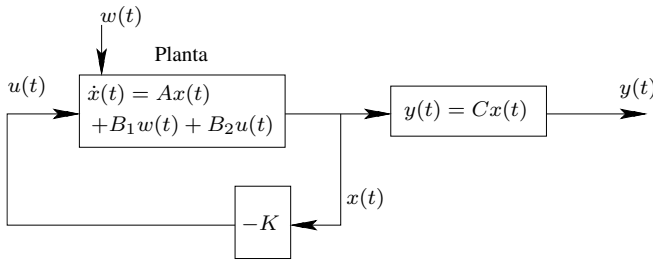


Figura 2: Sistema com realimentação de estados, K é um compensador \mathcal{H}_2 .

das variáveis de estado $x(t)$ e $\hat{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 N \\ M \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_o &= A - B_2 K - LC \\ T &= LC \\ Z_1 &= B_2 K \end{aligned}$$

O sistema (2) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A_m \bar{x}(t) + B_m r(t) + B_w w(t) \\ e(t) &= D_m r(t) - C_m \bar{x}(t) \\ y(t) &= C_m \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo,

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix}, D_m = 1, \quad (4)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_2 N \\ M \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace no sistema (3), para $\bar{x}(0)=0$, e realizando-se algumas manipulações algébricas, pode-se determinar a relação entre a saída $Y(s)$ e as entradas $W(s)$ e $R(s)$, conforme descrito em (6):

$$Y(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m R(s) + C_m (sI - A_m)^{-1} B_w W(s) \quad (6)$$

Considerando-se o sinal de entrada $r(t)$ nulo na equação (6), verifica-se que norma \mathcal{H}_2 de $w(t)$ para $y(t)$ pode ser minimizada devido ao projeto inicial do controlador K , que é um compensador \mathcal{H}_2 ; isto implica na minimização do efeito do sinal de perturbação presente na planta ao desempenho da saída do sistema.

Na Figura 1 observa-se a adição do termo $Mr(t)$ na estrutura do estimador, o parâmetro M tem somente a função de alterar os zeros da função de transferência de $r(t)$ para $u(t)$ e não modificar os pólos estabelecidos no projeto inicial do estimador, pois a função de transferência de $W(s)$ para $Y(s)$ não é modificada por N ou M , vide equações (4) e (6). Os pólos do sistema não são modificados, pois A_m em (4) e (6) não dependem de M ou N . Com isso a convergência do estimador não é comprometida.

Para o projeto do rastreador ótimo, considera-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência descrito em (7), com o sinal de perturbação $w(t)$ nulo

$$H_m(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = -C_m (sI - A_m)^{-1} B_m + D_m \quad (7)$$

Neste caso, através da modificação dos zeros pode-se projetar um rastreador de sinal minimizando a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema. O processo de modificação de zeros não interfere no projeto de rejeição de perturbação, pois segundo (6) a função de transferência de $W(s)$ para $Y(s)$ não depende de B_m . Em (7) utiliza-se a posição dos zeros, implícitos na especificação de N e M em B_m , para o processo de minimização do erro do rastreamento.

Note em (4) que os parâmetros M e N modificam completamente B_m , porém o vetor M modifica apenas a partição inferior de B_m , correspondente aos zeros de $r(t)$ para $u(t)$, sendo que N é um escalar e não modifica os zeros da planta.

3 PROJETO DE UM COMPENSADOR \mathcal{H}_2

O problema de otimização da norma \mathcal{H}_2 de (A, B_1, B_2, C) ilustrado na Figura 2 consiste em determinar um controlador K de tal forma que a influência da perturbação $w(t)$ na saída $y(t)$ do sistema seja a menor possível. Portanto, deseja-se minimizar a norma \mathcal{H}_2 entre a entrada $w(t)$ (perturbação) e a saída $y(t)$ e o projeto do controlador K pode ser obtido através do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs (Peres, 1997):

$$\begin{aligned} \min & \quad Tr(Z) \\ \text{s.a.} & \quad \begin{bmatrix} Q & B_1' \\ B_1 & Z \end{bmatrix} > 0 \\ & \quad \begin{bmatrix} AQ + QA' - B_2 Y - Y' B_2 & QC' \\ & CQ & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q > 0$$

sendo $Q = Q'$ e o controlador K é obtido pela expressão: $K = YQ^{-1}$, sendo Q e Y soluções ótimas de (8).

Neste caso, foi suposto realimentação de todos os estados e então otimizou-se a norma \mathcal{H}_2 , após é projetado um estimador (L) para permitir a realimentação apenas da saída. O uso a posteriori do estimador modifica levemente o ótimo obtido em (8).

4 ALOCAÇÃO DE ZEROS

Considerando-se o sistema (A, B_2, C) , pode-se projetar um sistema que possibilite a modificação dos zeros de $r(t)$ para $u(t)$ conforme a estrutura ilustrada na Figura 3. Neste processo seleciona-se M e N de modo que os zeros de malha fechada sejam alocados em lugares arbitrários de escolha do projetista, sendo $M \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $N \in \mathbb{R}$ (Assunção et al., 2002). O sinal $u_1(t)$ é a saída de controle do regulador.

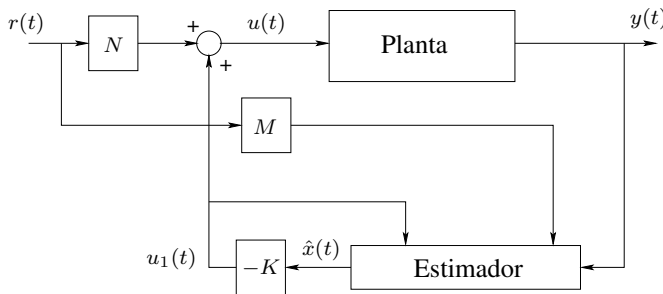


Figura 3: Sistema de alocação de zeros.

O estimador de estados utilizado no sistema de modificação de zeros é um estimador de Kalman (Kalman, 1960) e é projetado segundo (Gahinet et al., 1995) de modo que não afete no desempenho do sistema.

Considerando a Figura 3, se existir um zero de transmissão de $r(t)$ para $u(t)$, então necessariamente existe um zero de transmissão de $r(t)$ para $y(t)$, a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. Com isso, a equação característica dos zeros $r(t)$ para $u(t)$ pode ser descrita por (Franklin et al., 1994):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Mr(t) \\ u(t) &= -K\hat{x}(t) + Nr(t) \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + B_2K + LC & -M \\ -K & N \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

sendo que as soluções, $s = z_i$, são os zeros modificados de $r(t)$ para $u(t)$.

Os parâmetros M e N permitem a modificação dos zeros de $r(t)$ para $u(t)$ e neste trabalho é tratado o caso SISO. Ainda, neste trabalho os zeros são modificados para otimizar a norma \mathcal{H}_∞ do erro de rastreamento.

5 OTIMIZAÇÃO DA NORMA \mathcal{H}_∞ UTILIZANDO A MODIFICAÇÃO DE ZEROS

Um sistema dinâmico linear, invariante no tempo e SISO é "pequeno" caso sua função de transferência $H(s)$ possua pequenas magnitudes em todas as frequências. Uma norma que quantifica esta medida para sistemas é a norma \mathcal{H}_∞ .

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema dinâmico próprio $H(s)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A_s, B_s, C_s, D_s) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_s x(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= C_s x(t) + D_s u(t) \end{aligned} \quad (10)$$

sendo $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_s \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_s \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_s \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs (Boyd et al., 1994):

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 &= \min \quad \delta \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} -A_s Q - Q A_s' & -Q C_s' & B_s \\ -C_s Q & I & D_s \\ B_s' & D_s' & \delta I \end{bmatrix} > 0 \\ &Q > 0 \\ &\delta > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C_s(sI - A_s)^{-1} B_s + D_s$.

O problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ de $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ indicado em (7) consiste em determinar o valor dos parâmetros M e N (presentes em B_m e que determinam a posição dos zeros do sistema) que minimizem a norma \mathcal{H}_∞ do sistema H_m , isto é, modificar os zeros de tal modo que a norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$ seja mínima, constituindo-se um rastreador de sinal (Andrea, 2002).

Para o projeto de M e N , utiliza-se a equação (11) para minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema H_m . Neste instante substitui-se A_m , B_m , $-C_m$ e D_m em (11), o que resulta no seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs (Andrea, 2002):

$$\begin{aligned} \min \quad &\delta \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} -A_m Q - Q A_m' & Q C_m' & B_m \\ C_m Q & I & D_m \\ B_m' & D_m' & \delta I \end{bmatrix} > 0 \\ &Q > 0 \\ &\delta > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

sendo $Q = Q'$.

Particionado-se Q na forma

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

com $Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a equação (4), a equação (12) pode ser reescrita de acordo com a equação (13), sendo M e N as soluções ótimas de (13).

O vetor M e o ganho N determinam a posição dos zeros de $r(t)$ para $u(t)$ e como seus valores são ótimos, então os valores de M e N encontrados minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$.

A norma \mathcal{H}_∞ é o maior valor da resposta em frequência do sistema, podendo existir uma faixa de frequência com grande atenuação e outra com menor grau de atenuação. Para que o rastreador opere adequadamente, a norma \mathcal{H}_∞ do sistema H_m deve ser atenuada para a frequência do sinal de referência. Porém esta norma não é totalmente atenuada para todo o espectro de frequência, e conseqüentemente o rastreador não funcionará para qualquer tipo de sinal a ser rastreado. É interessante que o rastreador execute suas funções segundo uma faixa de frequência contida nas especificações de projeto. Para isso, propõe-se o rastreador com peso na frequência.

6 PROJETO DO RASTREADOR COM PESO NA FREQUÊNCIA

A utilização de peso na frequência em sistemas de controle tem como objetivo atingir especificações de projeto em malha fechada. Pode-se verificar a utilização de pesos em frequência descritos na forma de desigualdades matriciais bilineares - BMIs (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*) para redução de modelos em (Valentin e Duc, 1997). Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \|W(s)H_m(s)V(s)\|_\infty \quad (14)$$

sendo $W(s) = (A_w, B_w, C_w, D_w)$ o peso na frequência de entrada, $V(s) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$ o peso na frequência de saída e considera-se $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em (7). Na Figura 4 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência:

Pode-se representar o sistema indicado na Figura 4 através de variáveis de estado em função de $x_m(t)$, $x_w(t)$ e $x_v(t)$, através das equações abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_w(t) \\ \dot{x}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 \\ -B_w C_m & A_w & B_w D_m C_v \\ 0 & 0 & A_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_w(t) \\ x_v(t) \end{bmatrix}$$

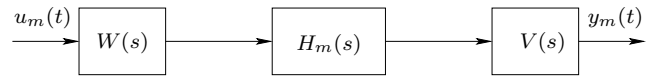


Figura 4: Estrutura de sistemas com peso na frequência.

$$+ \begin{bmatrix} B_m \\ B_w D_m D_v \\ B_v \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -D_w C_m & C_w & D_w D_m C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_w(t) \\ x_v(t) \end{bmatrix} + D_w D_m D_v r(t)$$

Com isso, uma possível realização em espaço de estado de $\tilde{H}_{wv} = W(s)H_m(s)V(s)$ é:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{vw} & \tilde{B}_{vw} \\ \hline \tilde{C}_{vw} & \tilde{D}_{vw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_m & 0 & 0 & B_m \\ -B_w C_m & A_w & B_w D_m C_v & B_w D_m D_v \\ 0 & 0 & A_v & B_v \\ \hline -D_w C_m & C_w & D_w D_m C_v & D_w D_m D_v \end{array} \right] \quad (15)$$

Para sistemas MIMO deve existir peso na frequência nas saídas e nas entradas, porém para sistemas SISO é necessário incluir peso somente em um dos lados, pois o peso na entrada e na saída são equivalentes. Este trabalho restringe-se ao sistema SISO.

Para o projeto do rastreador com peso na frequência, substitui-se \tilde{A}_{vw} , \tilde{B}_{vw} , \tilde{C}_{vw} e \tilde{D}_{vw} de (15) na equação (11). Isto resulta no problema de otimização descrito em (16), que é equacionado na forma de LMIs. Deste processo determina-se o ganho N e o vetor M , e estes parâmetros minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$ (rastreador de sinais).

A matriz Q é particionada da seguinte forma $Q_{ij} = Q'_{ij}$, $i, j=1, 2, 3, 4$ e as matrizes A_w , B_w e C_w que representam a dinâmica do filtro, são particionadas como segue:

$$A_w = \begin{bmatrix} A_{w1} & A_{w2} \\ A_{w3} & A_{w4} \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} B_{w1} \\ B_{w2} \end{bmatrix}, C_w = [C_{w1} \quad C_{w2}]$$

e $A_w \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B_w \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ e $C_w \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$.

O vetor M e o ganho N são soluções ótimas de (16) e minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema considerando peso na frequência.

Os filtros utilizados no equacionamento do rastreador somente são usados em projeto com o objetivo de ajustar os parâmetros M e N para uma determinada faixa de frequência, neste contexto o processo de otimização da posição dos zeros descrito na forma de LMIs considera a dinâmica do filtro para ajustar a operação do rastreador em uma determinada faixa de frequência. Mas na implementação ou simulação do sistema estes filtros são descartados.

$$\begin{array}{l}
\min \quad \delta \\
\text{s.a} \quad \left[\begin{array}{cccc}
-AQ_{11} - Q_{11}A' + Z_1Q'_{12} + Q_{12}Z'_1 & -AQ_{12} + Z_1Q_{22} - Q_{11}T' - Q_{12}A'_o & Q_{11}C' & B_2N \\
-TQ_{11} - A_oQ'_{12} - Q'_{12}A' + Q_{22}Z'_1 & -Q'_{12}T' - Q_{22}A'_o - TQ_{12} - A_oQ_{22} & Q'_{12}C' & M \\
CQ_{11} & CQ_{12} & I & D_m \\
NB'_2 & M' & D'_m & \delta I
\end{array} \right] > 0 \\
\left[\begin{array}{cc}
Q_{11} & Q_{12} \\
Q'_{12} & Q_{22}
\end{array} \right] > 0 \\
\delta > 0
\end{array} \tag{13}$$

$$\begin{array}{l}
\min \quad \delta \\
\text{s.a} \quad \left[\begin{array}{cccc}
-AQ_{11} - Q_{11}A' + Z_1Q'_{12} + Q_{12}Z'_1 & -AQ_{12} + Z_1Q_{22} - Q_{11}T' \cdots & & \\
-TQ_{11} - A_oQ'_{12} - Q'_{12}A' + Q_{22}Z'_1 & -TQ_{12} - A_oQ_{22} - Q'_{12}T' \cdots & & \\
B_{w1}CQ_{11} - A_{w1}Q'_{13} - A_{w2}Q'_{14} - Q'_{13}A' + Q'_{23}Z'_1 & B_{w1}CQ_{12} - A_{w1}Q'_{23} - A_{w2}Q'_{24} \cdots & & \\
B_{w2}CQ_{11} - A_{w3}Q'_{13} - A_{w4}Q'_{14} - Q'_{14}A' + Q'_{24}Z'_1 & B_{w2}CQ_{12} - A_{w3}Q'_{23} - A_{w4}Q'_{24} \cdots & & \\
D_wCQ_{11} - C_{w1}Q'_{13} - C_{w2}Q'_{14} & D_wCQ_{12} - C_{w1}Q'_{23} - C_{w2}Q'_{24} \cdots & & \\
NB'_2 & M' \cdots & & \\
\cdots - Q_{12}A'_o & Q_{11}C'B'_{w1} - Q_{13}A'_{w1} - Q_{14}A'_{w2} - AQ_{13} + Z_1Q_{23} & & \\
\cdots - Q_{22}A'_o & Q'_{12}C'B'_{w1} - Q_{23}A'_{w1} - Q_{24}A'_{w2} - TQ_{13} - A_oQ_{23} & & \\
\cdots - Q'_{13}T' - Q'_{23}A'_o & B_{w1}CQ_{13} + Q'_{13}C'B'_{w1} - A_{w1}Q_{33} - Q_{33}A'_{w1} - A_{w2}Q'_{34} - Q_{34}A'_{w2} & & \\
\cdots - Q'_{14}T' - Q'_{24}A'_o & B_{w2}CQ_{13} - A_{w3}Q_{33} - A_{w4}Q'_{34} + Q'_{14}C'B'_{w1} - Q'_{34}A'_{w1} - Q_{44}A'_{w2} & & \\
\cdots & D_wCQ_{13} - C_{w1}Q_{33} - C_{w2}Q'_{34} & & \\
\cdots & -D_mB'_{w1} & & \\
Q_{11}C'B'_{w2} - Q_{13}A'_{w3} - Q_{14}A'_{w4} - AQ_{14} + Z_1Q_{24} & Q_{11}C'D_w - Q_{13}C'_{w1} \cdots & & \\
Q'_{12}C'B'_{w2} - Q_{23}A'_{w3} - Q_{24}A'_{w4} - TQ_{14} - A_oQ_{24} & Q'_{12}C'D_w - Q_{23}C'_{w1} \cdots & & \\
Q'_{13}C'B'_{w2} - Q_{33}A'_{w3} - Q_{34}A'_{w4} + B_{w1}CQ_{14} - A_{w1}Q_{34} - A_{w2}Q_{44} & Q'_{13}C'D_w - Q'_{33}C'_{w1} \cdots & & \\
B_{w2}CQ_{14} + Q'_{14}C'B'_{w2} - A_{w3} - Q'_{34}A_{w3} - A_{w4}Q_{44} - Q_{44}A'_{w4} & Q'_{14}C'D_w - Q'_{34}C'_{w1} \cdots & & \\
D_wCQ_{14} - C_{w1}Q_{34} - C_{w2}Q_{44} & I & & \\
B'_{w2}D_m & D_wD_m & & \\
\cdots - Q_{14}C'_{w2} & B_2N & & \\
\cdots - Q_{24}C'_{w2} & M & & \\
\cdots - Q_{34}C'_{w2} & B_{w1}D_m & & \\
\cdots - Q_{44}C'_{w2} & B_{w2}D_m & & \\
\cdots & D_wD_m & & \\
\cdots & \delta I & & \\
\left[\begin{array}{cccc}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\
Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\
Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & Q_{34} \\
Q'_{14} & Q'_{24} & Q'_{34} & Q_{44}
\end{array} \right] > 0 \\
\delta > 0
\end{array} \tag{16}$$

7 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Neste exemplo considera-se um sistema linear invariante no tempo de terceira ordem e projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,0895 & -0,286 & 0 \\ -0,0439 & -0,272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0,0145 \\ -0,0122 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0,0069 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um sinal de perturbação acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até 10 rad/s), então é proposto o filtro $W_1(s)$ com ordem igual ao dobro da ordem do sistema, a fim de que se possa determinar uma realização mínima para o sistema aumentado.

$$W_1(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \text{num}(s) &= 40 \\ \text{den}(s) &= 1 \times 10^{-9}s^6 + 3 \times 10^{-7}s^5 + 3,3 \times 10^{-5}s^4 \\ &+ 0,0016s^3 + 0,033s^2 + 0,3s + 1 \end{aligned}$$

O diagrama de Bode de W_1 ilustrado na Figura 5 demonstra que o filtro projetado atende as especificações de projeto.

Utilizando-se a estrutura dada na Figura 1 para o sistema descrito em (17), projeta-se um controlador K para minimizar a norma \mathcal{H}_2 de $w(t)$ para $y(t)$ utilizando-se a equação (8), depois um estimador de estados de Kalman e na seqüência projeta-se o rastreador para baixas frequências de até 10 rad/s minimizando-se norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando o projeto de modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito em (16).

O compensador \mathcal{H}_2 projetado para este sistema, bem como o ganho L do estimador de Kalman são:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} -0,0025 & -0,0462 & -112,27 \end{bmatrix} \times 10^5 \\ L &= \begin{bmatrix} -243,0110 \\ 1,7081 \\ 0,0058 \end{bmatrix} \times 10^5 \end{aligned} \quad (18)$$

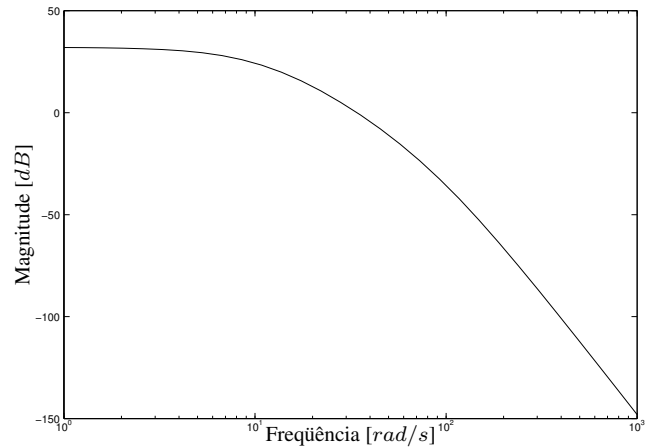


Figura 5: Diagrama de Bode do filtro $W_1(s)$.

A norma \mathcal{H}_2 de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é $6,5449 \times 10^{-13}$, o que implica em uma grande atenuação do sinal de perturbação. A Figura 6 ilustra a resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$, módulo sem uso de dB.

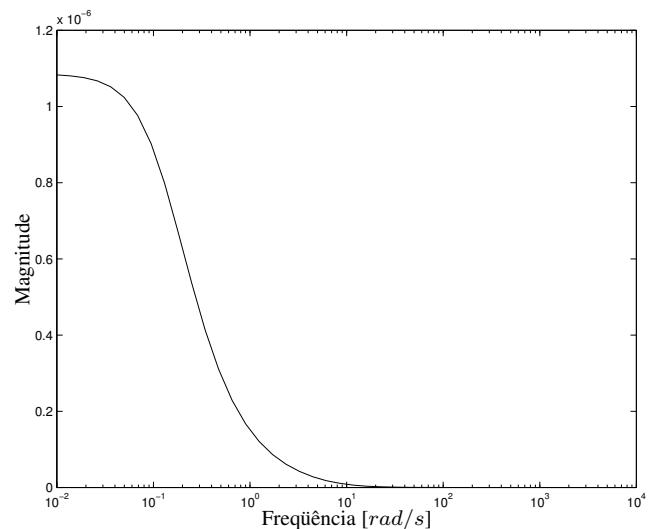


Figura 6: Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$.

Na modificação de zeros minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$ para sinais de baixa frequência (até 10 rad/s), sendo $e(t)$ o erro entre a saída e a entrada, afim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma \mathcal{H}_∞ do sistema tomando com base todo o espectro de frequência é 6,68; enquanto para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi 0,02, isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

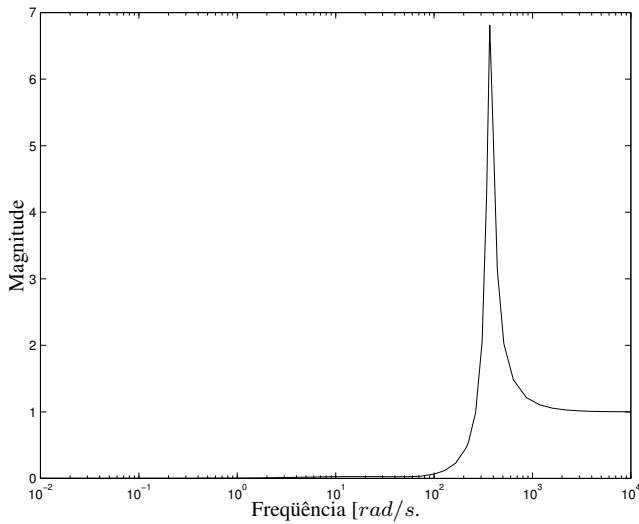


Figura 7: Resposta em frequência da função de transferência $E(s)/R(s)$ descrito em (7).

A Figura 7 ilustra a resposta em frequência de $E(s)/R(s)$ descrito em (7) e pode-se verificar que a norma \mathcal{H}_∞ do projeto na faixa de frequência de operação (até 10 rad/s) atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} -146,6118 \\ 132,9610 \\ -0,0035 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ e } N = -109,09 \times 10^5 \quad (19)$$

O problema foi formulado de forma a alcançar o ótimo global que proporcionou uma elevadíssima atenuação da perturbação. Para isto, os ganhos K , L , N e M são elevados. Para se obter ganhos menores, deve-se utilizar uma otimização subótima que ainda é objeto de pesquisas dos autores.

A resposta em frequência de $Y(s)/R(s)$ é ilustrado na Figura 8. Este diagrama é outra forma de verificar o funcionamento do rastreador para baixas frequências, pois observa-se que o sistema apresenta ganho unitário para a faixa de frequência especificada em projeto. A Figura 8 também apresenta o diagrama de fase, onde constata-se que o sistema não possui deslocamento de fase para sinais de baixa frequência (até 10 rad/s).

Para efeito de comparação, ilustra-se na Figura 9 a resposta em frequência da função de transferência de $E(s)/R(s)$ para duas situações de projeto para o rastreador: em princípio considera-se o peso na frequência através da presença do filtro, (16), e em seguida, projeta-se o controlador sem a inclusão do filtro, (13), ou seja, sem peso na frequência.

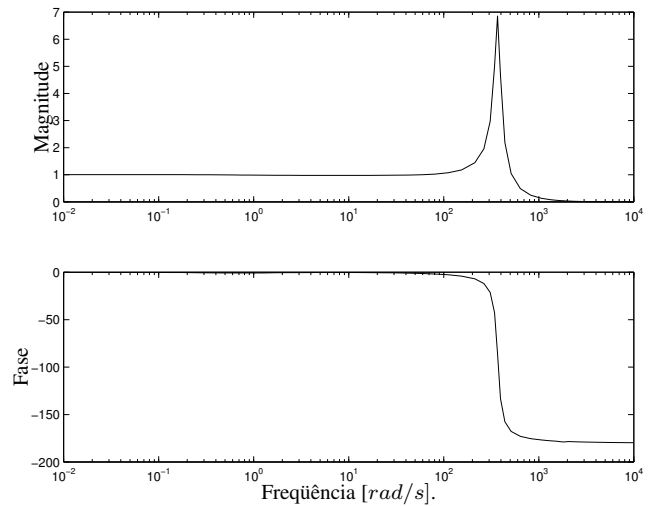


Figura 8: Resposta em frequência da função de transferência $Y(s)/R(s)$.

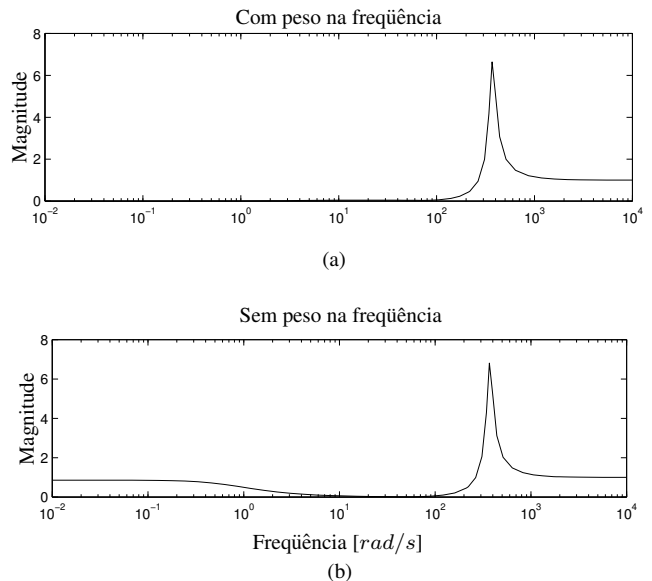


Figura 9: Resposta em frequência de $E(s)/R(s)$: (a) projeto com peso na frequência, (b) projeto sem peso na frequência.

Para simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = \text{sen}(10t)$ e um sinal de perturbação $w(t)$ que apresenta amplitudes aleatórias e para a simulação considera-se que a máxima amplitude deste sinal é $10,0$.

Para o sinal de perturbação presente no sistema foi projetado em (8) o compensador \mathcal{H}_2 , dado em (18), que atenuou totalmente o sinal de perturbação, anulando o seu efeito no sistema. Utilizando a modificação de zeros projetou-se um rastreador de sinal para as entradas: $r(t)$ e $w(t)$, cujo M e N são dados em (19). Tem-se o resultado de simulação ilus-

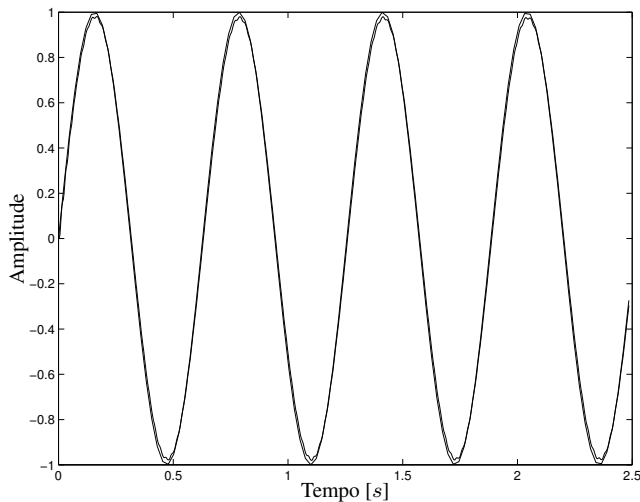


Figura 10: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

trado na Figura 10.

Para este exemplo os zeros do sistema são: $-0,14$; $-6,629$; $-289,17 \pm j289,36$ e os pólos em malha fechada: $-0,14$; $-6,469$; $-26,47 \pm j369,15$; $-289,17 \pm j289,21$.

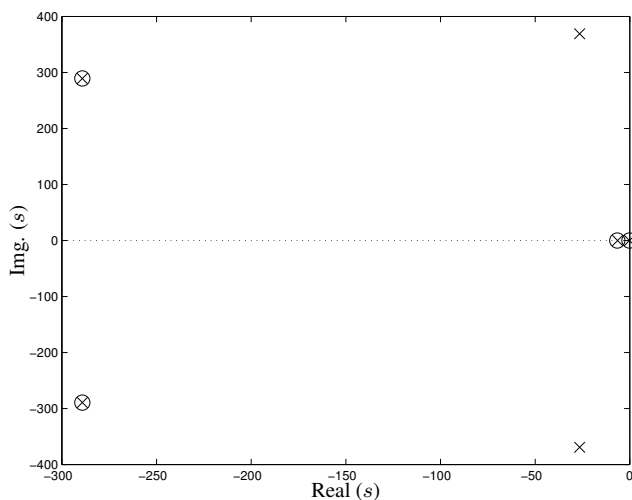


Figura 11: Mapeamento de pólos e zeros com modificação de zeros, não ocorre cancelamento.

Note na Figura 11 que os quatro zeros praticamente cancelaram quatro pólos. A solução ótima do problema de rastreamento, na forma como foi formulada, levou a estes cancelamentos. Ainda, se a função de transferência de $R(s)$ para $Y(s)$ for igual a 1 (na faixa de frequência), este seria o rastreamento ideal.

Neste exemplo foi abordado um rastreador para sinais de baixa frequência, mas a metodologia proposta neste trabalho permite executar projetos para sistemas rastreadores em qualquer outra faixa de frequência, utilizando-se um filtro passa-faixa no projeto, ou rastreadores para sinais de alta frequência, utilizando-se um filtro passa-alta no projeto (Andrea, 2002).

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho é proposta uma metodologia para o problema de um rastreador de sinais em sistemas de controle. Considerando-se o sistema ilustrado na Figura 1, pode-se otimizar a norma \mathcal{H}_2 de $w(t)$ para $y(t)$ e também a norma de \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$. Como existe uma atenuação do sinal de perturbação no sistema através do compensador \mathcal{H}_2 , e minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro, de modo que esta norma atinja valores de pequenas grandezas, cria-se um rastreador de frequência.

No projeto do rastreador ótimo com rejeição a perturbação, os pólos são responsáveis pela atenuação do sinal de perturbação, enquanto os zeros proporcionam o rastreamento, estando desacoplado o primeiro processo do segundo.

A inclusão de peso na frequência para o projeto do rastreador é importante, pois permite ao projetista criar um seguidor de referência que funcione em uma faixa de frequência desejada, inclusas nas especificações de projeto, o que não ocorre em projetos sem peso na frequência, por exemplo no projeto via modelo interno (Dorf, 2001).

A questão da robustez do rastreamento frente a variações paramétricas, que é contemplado no projeto via modelo interno, está sendo investigado pelos autores tendo em vista que o método proposto baseia-se em LMIs e permite a inclusão de incertezas paramétricas.

O projeto do filtro é de extrema importância neste trabalho, pois o mesmo determina as frequências que serão mais importantes na construção do rastreador.

Os métodos de projeto são equacionados na forma de LMIs, eliminando a natureza não-linear do problema (Pierri, 1999). Assim, este projeto pode ser facilmente resolvido utilizando-se algoritmos de convergência polinomial (Gahinet et al., 1995), (Oliveira et al., 1997)) disponíveis na literatura.

9 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos revisores pelos comentários úteis e construtivos e também à FAPESP, ao CNPq e à FUNDU-NEP pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Andrea, C. Q. (2002). *Controle Ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com Alocação de Zeros para o Problema de Rastreamento usando LMIs*, Dissertação de Mestrado, Unesp, Ilha Solteira, SP.
- Assunção, E., Andrea, C. Q., Teixeira, M. C. M. e Marchesi, E. F. (2002). Alocação de Zeros em um Sistema de Controle Aplicado ao Micromotor PM, *XIV Congresso Brasileiro de Automática-CBA* pp. 2190–2195.
- Assunção, E. e Peres, P. (2001). Otimização Global para os Problemas de Redução \mathcal{H}_2 de Modelos e Redução \mathcal{H}_2 da Ordem do Controlador, *Revista Controle e Automação* **12**(2): 93–101.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2001). *Sistemas de Controle Modernos*, oitava edição edn, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, Brasil.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. e Emami-Naeini, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, USA.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks Inc., USA.
- Hauksdóttir, A. S. (2000). Optimal zeros for model reduction of continuous-time system, *39th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 1889–1893.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of ASME - Journal of Basic Engineering* **82**: 35–45.
- Liao, F., Wang, J. L. e Yang, G. (2002). Reliable robust flight tracking control: an LMI approach, *IEEE Transactions on Control System Technology* **10**(1): 76–90.
- Moore, K. L. e Bhattacharyya, S. P. (1990). A Technique for Choosing Zero Locations for Minimal Overshoot, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(5): 577–580.
- Murdoch, P. (1975). Pole and zero assignment by state vector feedback, *Automatica* **11**: 199–201.
- Murdoch, P. (1977). Assignment of pole and zeros in a scalar transfer-function by state vector feedback, *Control System Design by Pole-Zero Assignment*, Academic Press, New York pp. 137–144.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Oliveira, M. C. d., Farias, D. P. e Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas, SP. Disponível em <http://www.dt.fee.unicamp.br/mauricio/lmisol10.html>.
- Peres, P. L. D. (1997). *Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de Livre Docência, UNICAMP, Campinas, SP.
- Pierri, P. S. (1999). *Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle*, Tese de Doutorado, USP, São Paulo, SP.
- Schmidt, D. K. e Benson, D. (1995). Loop Shaping and a Zero-Placement Technique as Applied to the Benchmark Problem, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **5**: 33–51.
- Valentin, C. e Duc, G. (1997). LMI-Base Algorithms For Frequency Weight Optimal \mathcal{H}_2 - Norm Model Reduction, *36th Conference on Decision and Control* pp. 767–772.