
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO VIA MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA BARREIRA MODIFICADA

Vanusa Alves de Sousa*
vsousa@sel.eesc.usp.br

Edméa Cássia Baptista†
baptista@fc.unesp.br

Geraldo R. M. da Costa*
geraldo@sel.eesc.usp.br

*LASEE, Departamento de Engenharia Elétrica
Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP)
Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro, 13566-590, São Carlos, SP, Brasil

†Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências (FC), Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Edmundo C. Coube, 14-01 - Vargem Limpa, CEP 17033-360, Bauru, SP, Brasil

RESUMO

Este artigo apresenta uma nova abordagem para a resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Nesta abordagem, as restrições de desigualdade são tratadas pela associação dos métodos de Barreira Modificada e Primal-Dual Barreira Logarítmica (PDBL). As restrições de desigualdade são transformadas em igualdades introduzindo variáveis de folga positivas e são relaxadas através do parâmetro de barreira. Uma função Lagrangiana é associada ao problema modificado. As condições necessárias de primeira ordem são aplicadas à função Lagrangiana, gerando um sistema de equações não-lineares, o qual é linearizado pelo método de Newton. A relaxação das variáveis de folga resulta na expansão da região factível do problema original, permitindo que os limites das restrições de desigualdade sejam atingidos. Testes numéricos utilizando os sistemas CESP-440kV e SUL-SUDESTE BRASILEIRO e um teste comparativo com o método PDBL indicam que a nova abordagem é eficiente na resolução do problema Fluxo de Potência Ótimo Reativo.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas elétricos de potência, programação não-linear, método Primal-Dual, método de Newton, função Barreira Modificada.

ABSTRACT

This work presents a new approach for the resolution of Optimal Reactive Power Flow problem. In this approach, the inequality constraints are treated by the Modified Barrier and Primal-Dual Logarithmic Barrier (PDLB) methods. The inequality constraints are transformed into equalities by introducing positive slack variables and are perturbed by the barrier parameter. A Lagrangian function is associated to the modified problem. The first-order necessary conditions are applied to the Lagrangian function generating a nonlinear system, which is solved by Newton's method. The perturbation of the slack variables results in an expansion of the feasible set of the original problem, allowing the limits of the inequality constraints to be reached. Numeric tests using the CESP and the SOUTH-SOUTHEAST BRAZILIAN systems and a comparative test with PDLB method indicate that the new approach is efficient in the resolution of Optimal Reactive Power Flow problem.

KEYWORDS: Power System, nonlinear programming, Primal-Dual method, Newton's method, Modified Barrier

Artigo submetido em 27/09/2006
1a. Revisão em 15/08/2007
2a. Revisão em 23/11/2007
Aceito sob recomendação do Editor Associado
Prof. Carlos A. Castro

function.

1 INTRODUÇÃO

O setor elétrico brasileiro vem passando por importantes reformas na sua estrutura, e a principal delas é a mudança do modelo de monopólio para o modelo competitivo, impondo assim novas filosofias de operação e planejamento dos sistemas elétricos, envolvendo a geração, a transmissão e a distribuição de energia elétrica. Esta mudança tem por objetivo beneficiar os consumidores com um aumento na qualidade da energia entregue e na confiabilidade do sistema. Neste contexto, o estudo de potência reativa tem recebido muita atenção das concessionárias de energia elétrica, devido à capacidade limitada do sistema de transmissão para acomodar cargas adicionais e para manter um perfil de tensão e de fluxo de potência adequados aos diferentes cenários de operação. Entretanto, em algumas situações, o ponto de operação do sistema pode não atender a essas condições. Nesses casos, os operadores do sistema devem ajustar as variáveis de controle até que seja obtido um novo ponto de operação que satisfaça às condições da rede. Estas variáveis de controle podem ser ajustadas de forma ótima tal que maximize ou minimize um critério de desempenho do sistema de potência satisfazendo, as restrições de igualdade e de desigualdade. Esse problema de otimização é conhecido como Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Um caso particular deste problema é o FPO Reativo, no qual os controles ativos são fixados e as variáveis de controle relacionadas com a potência reativa como: as magnitudes da tensão dos geradores e dos compensadores síncronos e estáticos de potência reativa e os *taps* dos transformadores são otimizadas em relação à função objetivo.

O FPO é uma ferramenta computacional que tem por finalidade otimizar um determinado desempenho do sistema, satisfazendo às restrições que são regidas por particularidades operacionais e físicas da rede elétrica. Entre as diversas técnicas aplicadas na resolução do problema de FPO, o método de pontos interiores tem sido considerado um dos mais eficientes devido ao seu bom desempenho e robustez para a solução de problemas de programação linear e não-linear. Granville (1994) propôs uma implementação do método de Pontos Interiores aplicado ao problema de Despacho Ótimo de Reativos. Wu et al. (1994) propuseram a aplicação de um algoritmo de Pontos Interiores Primal-Dual que utiliza o método Preditor-Corretor para acelerar o processo de convergência do problema. Nos últimos anos, praticamente todas as pesquisas envolvendo o problema de FPO são baseadas nas variantes dos métodos de Pontos Interiores (Torres e Quintana, 1998; Momoh e Zhu, 1999; Castronuovo et al., 2000; Wu e Debs, 2001; Jabr et al., 2002; Fernandes e Almeida, 2003; Ramos et al., 2005). Ainda, pode-se citar o recente artigo de Baptista et al. (2006) onde é utilizado o método da

função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica na solução do FPO.

Em geral, no problema de FPO, os modelos matemáticos utilizados possuem características como não-linearidade, não-convexidade, milhares de restrições e variáveis discretas, o que torna o problema um desafio para os pesquisadores desta área, como Stott et al. (1980) mencionaram. “Apesar de todo o progresso realizado na área, até o presente momento não há nenhuma abordagem realmente robusta, confiável e rápida para a solução do problema de FPO, a qual satisfaça todas as necessidades dos centros de operação das concessionárias de energia elétrica.”

Assim, tendo em vista a relevância do problema de FPO e a necessidade de se buscar métodos mais eficientes para a sua resolução, propõe-se, neste trabalho, uma solução para o problema de FPO por meio do desenvolvimento de uma nova abordagem da função barreira modificada, denominada método da Função Lagrangiana Barreira Modificada (FLBM). Nessa abordagem, os métodos de Pontos Interiores Primal-Dual e de barreira Modificada são associados, com a finalidade de aproveitar as melhores características de cada um.

A teoria de métodos da Função Barreira Modificada (FBM), utilizada neste trabalho, foi desenvolvida por Polyak, em 1992, para resolver problemas de otimização restrita. Tais métodos combinam as melhores propriedades da função barreira clássica (FBC) e da função Lagrangiana clássica. A qualidade mais importante da FBM é a representação explícita de seu multiplicador de Lagrange, pois esse auxilia no processo de convergência do método.

Comparadas com as FBC, as FBM e suas derivadas são definidas na solução e durante o processo de convergência essas funções não crescem para o infinito, sua matriz Hessiana da função Lagrangiana não se torna mal condicionada e o parâmetro de barreira não tende para zero. Além disso, o algoritmo da FBM possui uma propriedade de convergência finita ao invés de uma assintótica como no método da FBC. Isto significa que a solução ótima encontrada no método da FBM pode, de fato, estar na fronteira da região factível, o que não acontece com a FBC, onde a solução somente pode estar próxima a fronteira, mas nunca alcançá-la. Conseqüentemente, as restrições tratadas pela FBM podem ser nulas, diferente da FBC. Uma característica interessante dos métodos baseados na FBM é de não precisarem de uma solução inicial factível ao problema original, ao contrário dos métodos baseados na FBC que possuem essa desvantagem.

No método da FLBM, proposto neste trabalho, as restrições canalizadas são desmembradas em duas desigualdades. Variáveis de folga são acrescentadas, transformando essas desigualdades em igualdades. Essas variáveis de folga são relaxadas e tratadas pela função barreira modificada. Associa-se

a esse problema uma função Lagrangiana. As condições de otimalidade são aplicadas à função Lagrangiana, gerando um sistema de equações não-lineares, cujas raízes são determinadas pelo método de Newton. Esse processo gera um outro sistema de equações lineares no qual a matriz dos coeficientes é esparsa e simétrica. Essa característica é explorada ao utilizar-se uma técnica de esparsidade.

Testes com vários sistemas elétricos foram realizados para verificar a eficiência da abordagem proposta. Os testes foram divididos em três etapas, a primeira é um exemplo ilustrativo com sistema de 3 barras apresentado por Dommel e Tinney (1968); a segunda utiliza os sistemas CESP-440kV e o SUL-SUDESTE BRASILEIRO; e a terceira é um teste comparativo com o método PDBL, este último e sua implementação computacional são apresentados em Sousa et al. (2004).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 descreve-se o problema de FPO Reativo, na seção 3 apresenta-se o método da Função Lagrangiana Barreira Modificada, na seção 4 os testes e resultados e finalmente na seção 5 as conclusões do trabalho.

2 O PROBLEMA DE FPO REATIVO

O problema de FPO Reativo com função objetivo perdas ativa na transmissão é considerado uma das variantes mais difíceis de ser resolvida segundo Monticelli e Liu (1992). Este problema pode ser representado matematicamente por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } g(x) = 0 \\ & h(x) \geq 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \quad (1)$$

O vetor $x \in R^n$ onde $x = (V, \theta, t)$ representa as variáveis de estado e de controle do sistema, \underline{x} e \bar{x} são os seus limites inferiores e superiores, respectivamente, θ é o ângulo de fase da tensão, V a magnitude da tensão e t os taps dos transformadores. A função objetivo $f(x)$ representa as perdas de potência ativa na transmissão; o vetor $g(x) \in R^m$, sendo $m < n$, é o conjunto das equações de balanço do fluxo de potência e $h(x) \in R^p$ é o conjunto das restrições funcionais, que representam as gerações de potência reativa nas barras de controle de reativo.

3 MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA BARREIRA MODIFICADA

Ao problema (1) acrescentam-se variáveis de folga positivas para transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } g(x) = 0 \\ & h(x) - s_1 = 0 \\ & x + s_2 = \bar{x} \\ & x - s_3 = \underline{x} \\ & s_1 \geq 0 \\ & s_2 \geq 0 \\ & s_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

sendo os vetores $s_1 \in R^p$, s_2 e $s_3 \in R^n$. As variáveis s_1 , s_2 e s_3 são denominadas de variáveis de folga.

Na seqüência, aplica-se uma relaxação, nas condições de não-negatividade do problema (2), usando o parâmetro de barreira. Essa relaxação resulta na expansão da região factível do problema original.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } g(x) = 0 \\ & h(x) - s_1 = 0 \\ & x + s_2 = \bar{x} \\ & x - s_3 = \underline{x} \\ & s_1 \geq -\mu \\ & s_2 \geq -\mu \\ & s_3 \geq -\mu \end{aligned} \quad (3)$$

sendo $\mu > 0$ o parâmetro de barreira.

O método proposto por Polyak (1992) é utilizado para transformar o problema (3) no seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } g(x) = 0 \\ & h(x) - s_1 = 0 \\ & x + s_2 = \bar{x} \\ & x - s_3 = \underline{x} \\ & \mu \ln(\mu^{-1}s_1 + 1) \geq 0 \\ & \mu \ln(\mu^{-1}s_2 + 1) \geq 0 \\ & \mu \ln(\mu^{-1}s_3 + 1) \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Associa-se ao problema (4) a seguinte função Lagrangiana:

$$L = f(x) - \mu \left(\sum_{i=1}^p u_{1i} \ln(\mu^{-1} s_{1i} + 1) + \sum_{j=1}^n u_{2j} \ln(\mu^{-1} s_{2j} + 1) + \sum_{j=1}^n u_{3j} \ln(\mu^{-1} s_{3j} + 1) \right) - \lambda^T g(x) - \pi_1(h(x) - s_1) - \pi_2(x + s_2 - \bar{x}) - \pi_3(x - s_3 - \underline{x}) \quad (5)$$

sendo $u_1 \in R^p$, u_2 e $u_3 \in R^n$, $\lambda \in R^m$, $\pi_1 \in R^p$, π_2 e $\pi_3 \in R^n$ os vetores dos multiplicadores de Lagrange. A função (5) é denominada função Lagrangiana barreira modificada. A condição de otimalidade é aplicada sobre a função Lagrangiana barreira modificada (5), gerando um sistema de equações não-lineares:

$$\nabla L(x, s_1, s_2, s_3, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (6)$$

sendo:

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x) - J(x)^T \lambda - J_1(x)^T (\pi_1) - (\pi_2) - (\pi_3) \\ -\frac{u_1}{\mu^{-1} s_{11} + 1} + \pi_1 \\ -\frac{u_2}{\mu^{-1} s_{21} + 1} - \pi_2 \\ -\frac{u_3}{\mu^{-1} s_{31} + 1} + \pi_3 \\ -g(x), \\ -(h(x) - s_1) \\ -(x + s_2 - \bar{x}) \\ -(x - s_3 - \underline{x}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

com:

$$J(x)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x)),$$

e

$J_1(x)^T = (\nabla_x h_1(x), \nabla_x h_2(x), \dots, \nabla_x h_p(x))$, as quais são denominadas matrizes Jacobianas.

As raízes do sistema de equações não-lineares (7) são determinadas através do método de Newton. O método de Newton gera as direções de busca $(\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3)$, as quais serão usadas para a atualização das variáveis do sistema. O método gera um sistema de equações lineares que na forma matricial pode ser representado como:

$$W \Delta d = -\nabla L \quad (8)$$

em que:

$$\Delta d^T = (\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3)$$

e

$$W = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & 0 & 0 & 0 & -J(x)^T & -J_1(x)^T & -I & -I \\ 0 & \mu^{-1} S_1 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} S_2 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} S_3 & 0 & 0 & 0 & I \\ -J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

é a matriz Hessiana da função Lagrangiana, sendo

$$\nabla_{xx}^2 L = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{xx}^2 g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_{1j} \nabla_{xx}^2 h_j(x),$$

e as submatrizes S_1 , S_2 e S_3 são dadas por:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{u_{11}}{(\mu^{-1} s_{11} + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u_{1p}}{(\mu^{-1} s_{1p} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{u_{21}}{(\mu^{-1} s_{21} + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u_{2n}}{(\mu^{-1} s_{2n} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{u_{31}}{(\mu^{-1} s_{31} + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u_{3n}}{(\mu^{-1} s_{3n} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

Os vetores das variáveis x , s , λ e π são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p \Delta x^k \\
s_1^{k+1} &= s_1^k + \alpha_p \Delta s_1^k \\
s_2^{k+1} &= s_2^k + \alpha_p \Delta s_2^k \\
s_3^{k+1} &= s_3^k + \alpha_p \Delta s_3^k \\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d \Delta \lambda^k \\
\pi_1^{k+1} &= \pi_1^k + \alpha_d \Delta \pi_1^k \\
\pi_2^{k+1} &= \pi_2^k + \alpha_d \Delta \pi_2^k \\
\pi_3^{k+1} &= \pi_3^k + \alpha_d \Delta \pi_3^k
\end{aligned} \tag{10}$$

em que α_p e α_d são os passos utilizados na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente.

Neste trabalho, adotou-se para o cálculo do passo máximo uma adaptação da estratégia utilizada por Granville (1994), Torres e Quintana (2001), entre outros. O passo primal é determinado pelo menor valor entre os componentes das variáveis de folga positivas e o valor 1. O objetivo do passo primal é garantir que as variáveis primais obedecem seus limites na solução e é dado por:

$$\alpha_p = \min \left\{ \left(\min_{\Delta s_1 < 0 \text{ e } s_1 > 0} \frac{-s_1}{\Delta s_1}, \min_{\Delta s_2 < 0 \text{ e } s_2 > 0} \frac{-s_2}{\Delta s_2}, \min_{\Delta s_3 < 0 \text{ e } s_3 > 0} \frac{-s_3}{\Delta s_3} \right), 1 \right\} \tag{11}$$

O passo dual é calculado de forma que cada componente dos vetores duais λ , π_1 , π_2 e π_3 permaneçam com seus respectivos sinais, isto é:

$$\alpha_d = \min \left\{ \left(\min_{\Delta \pi_1 < 0 \text{ e } \pi_1 > 0} \frac{-\pi_1}{\Delta \pi_1}, \min_{\Delta \pi_2 > 0 \text{ e } \pi_2 < 0} \frac{\pi_2}{\Delta \pi_2}, \min_{\Delta \pi_3 < 0 \text{ e } \pi_3 > 0} \frac{-\pi_3}{\Delta \pi_3} \right), 1 \right\} \tag{12}$$

O parâmetro de barreira é atualizado segundo Melman e Polyak (1996), como segue:

$$\mu^{k+1} = \mu^k \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \right) \tag{13}$$

em que r é o número de restrições de desigualdade do problema e

$$\sigma = \max \left(\frac{1}{\mu^{-1} s_j + 1} \right), \quad j = 1, \dots, r \text{ para } s_j > 0$$

O vetor dos multiplicadores de Lagrange, u , é atualizado pela regra de Polyak (1992), da seguinte forma:

$$u^{k+1} = \frac{u^k \mu^{k+1}}{s^{k+1} + \mu^{k+1}} \tag{14}$$

3.1 Algoritmo

O algoritmo proposto para resolver o problema de FPO Relativo via método da função Lagrangiana barreira modificada consiste dos seguintes passos:

1. Dado o problema (1), construa a função Lagrangiana barreira modificada (5);
2. Faça $k=0$ e obtenha uma estimativa inicial $parad^k = (x^k, s^k, \lambda^k, \pi^k), u^k > 0$, e $\mu^k > 0$;
3. Determine o gradiente e a matriz Hessiana da função Lagrangiana, e resolva o sistema (8);
4. Calcule os passos primais e duais. Atualize as variáveis do problema. Faça $k=k+1$;
5. Atualize μ e os multiplicadores de Lagrange, u , utilizando (13) e (14) respectivamente;
6. Se o critério de parada é satisfeito então **pare**. Caso contrário, volte ao passo 3;

A FBM [$\ln(\mu^{-1}s + 1)$] expande a região factível do problema original permitindo a escolha de um ponto inicial infactível ($s > -\mu$) e também atingir os limites das restrições de desigualdade ($s = 0$). Na solução as condições $s \geq 0$ e $\pi_1 \geq 0$, $\pi_2 \leq 0$ e $\pi_3 \geq 0$ devem ser satisfeitas.

No método FLBM o parâmetro de barreira e os multiplicadores de Lagrange associados a FBM, u , são direcionados iterativamente para um ponto ótimo (x^*) do problema original. Polyak (1992) mostrou que, se os multiplicadores de Lagrange iniciais, u , são positivos e o parâmetro de barreira é menor que um valor limite $\bar{\mu}$, o método da FBM converge.

O critério de parada é um teste para verificar a convergência do algoritmo, como apresentado por Torres e Quintana (1998), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\nu_1^k &\leq \xi_1 \\
\nu_2^k &\leq \xi_2 \\
\nu_3^k &\leq \xi_3
\end{aligned} \quad \text{ou} \quad \left\| g(x^k) \right\|_{\infty} \leq \xi_1$$

em que:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \|g(x)\|_\infty, \\ \nu_2 &= \frac{|f(x^k) - f(x^{k-1})|}{1 + |f(x^k)|}, \\ \nu_3 &= \max \{h_j(x)\}, j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Se os critérios $\nu_1^k \leq \xi_1$, $\nu_2^k \leq \xi_2$ e $\nu_3^k \leq \xi_3$ estão satisfeitos, então a factibilidade primal e dual escalar estão garantidas, o que significa que na iteração k tem-se uma solução que satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) com precisão ξ_1 . Quando problemas numéricos impedem a verificação destas, o algoritmo pára assim que a factibilidade das restrições de igualdade é alcançada e as mudanças no valor da função objetivo e das variáveis são desprezíveis. Valores típicos para as tolerâncias são $\xi_1=10^{-3}$, $\xi_2=10^{-2}$ e $\xi_3=10^{-1}$.

3.2 Implementação

O maior esforço do algoritmo é na solução do sistema (8). A matriz Hessiana da função Lagrangiana, W , tem uma estrutura que facilita a aplicação de técnicas de esparsidade. A matriz W é simétrica e esparsa, sendo necessário calcular e armazenar somente metade da fatoração LU devido à simetria. A estrutura dessa matriz é constante em todas as iterações, e a ordenação e análise simbólica são feitas somente uma vez para criar a estrutura estática dos dados. Então a fatoração numérica é realizada a cada iteração de forma eficiente pela sub-rotina Ma57 (MA57 - HSL, www.cse.clrc.ac.uk/nag/hsl/).

4 TESTES E RESULTADOS

A aplicação da abordagem proposta, FLBM, ao problema de FPO Reativo será detalhada num sistema exemplo de 3 barras e apresentada de forma resumida nos sistemas CESP e o SUL-SUDESTE BRASILEIRO. Estes últimos serão utilizados em um teste comparativo com o método PDBL para verificar a eficiência do método FLBM.

Os algoritmos dos métodos da FLBM e do PDBL foram implementados com estruturas computacionais semelhantes para permitir uma melhor comparação. Os programas foram desenvolvidos em linguagem de programação FORTRAN, usando dupla precisão aritmética em um microcomputador Pentium (R) 4 – 3,4 GHz, com 2 GB de memória RAM. A função objetivo minimizada foi as perdas de potência ativa na transmissão, a qual é não-linear, não convexa e não separável. Essas características dificultam a resolução do problema (Monticelli e Liu, 1992). As restrições consideradas foram: as equações de balanço de potência; os limites de tensão; os tap dos transformadores e as gerações de potência reativa. O critério de parada apresentado na seção 4.1 foi utilizado nos dois métodos.

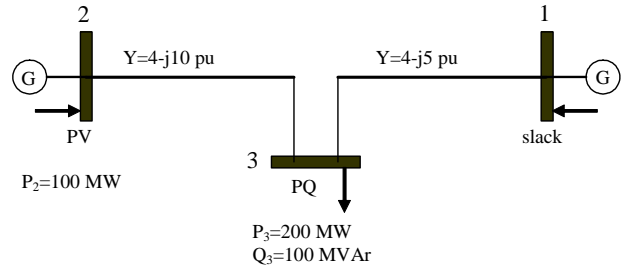


Figura 1: Sistema de 3 barras.

Em todos os testes as variáveis de folga e os multiplicadores de Lagrange iniciais foram determinados através das equações: $s_2 = y - y_{min}$; $s_3 = y_{max} - y$; $\pi_2 = u_2 / (\mu^{-1} s_2 + 1)$; $\pi_3 = -u_3 / (\mu^{-1} s_3 + 1)$; respectivamente, onde y pode ser o valor de uma tensão, tap ou geração de reativo e y_{max} ou y_{min} são os limites inferiores e superiores dessas variáveis ou restrições, respectivamente.

4.1 Exemplo ilustrativo do MFLBM

O sistema exemplo de 3 barras apresentado por Dommel e Tinney (1968), será utilizado para detalhar a abordagem proposta FLBM. A Fig. 1 apresenta os dados do sistema.

No modelo do problema de FPO reativo associado ao sistema da Fig. 1, tem-se para a barra de controle de reativo (2), uma equação de balanço da rede (ΔP_2). Para a barra de carga (3) têm-se duas equações de balanço da rede (ΔP_3 e ΔQ_3). Para a barra de controle de reativo, tem-se a restrição canalizada de geração de potência reativa ($Q_2(V, \theta)$). Todas as magnitudes de tensão são canalizadas, possuindo limites mínimos e máximos. O problema pode ser representado como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(V, \theta) \\ & \text{sujeito a } \Delta P_2 = 0 \\ & \Delta P_3 = 0 \\ & \Delta Q_3 = 0 \\ & \underline{Q}_2 \leq Q_2(V, \theta) \leq \overline{Q}_2 \\ & \underline{V}_1 \leq V_1 \leq \overline{V}_1 \\ & \underline{V}_2 \leq V_2 \leq \overline{V}_2 \\ & \underline{V}_3 \leq V_3 \leq \overline{V}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

sendo:

$$\begin{aligned} f(V, \theta) &= g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) + \\ &+ g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1 \cos \theta_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta P_2 &= P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i}) \\ \Delta P_3 &= P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i}) \\ \Delta Q_3 &= Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i})\end{aligned}$$

$$Q_2(V, \theta) = V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \sin \theta_{2i} - b_{2i} \cos \theta_{2i})$$

em que:

g e b são a condutância e a susceptância, respectivamente;

P^G e P^C são as potências ativas, geradas e consumidas, respectivamente;

Q^G e Q^C são as potências reativas, geradas e consumidas, respectivamente.

A resolução do problema (15) pelo método FLBM exige que as restrições de desigualdade sejam transformadas em igualdade através da adição de variáveis de folga positivas, as quais serão relaxadas usando o parâmetro de barreira. Desta forma o problema (15) passa a ser reescrito como:

$$\begin{aligned}L &= f(V, \theta) - u_{12} \mu \ln(\mu^{-1} s_{12} + 1) - u_{22} \mu \ln(\mu^{-1} s_{22} + 1) \\ &- \mu \sum_{i=1}^3 u_{3i} \ln(\mu^{-1} s_{3i} + 1) - \mu \sum_{i=1}^3 u_{4i} \ln(\mu^{-1} s_{4i} + 1) \\ &- \lambda p_2 (P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i})) + \\ &- \lambda p_3 (P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i})) + \\ &- \lambda q_3 (Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i})) + \\ &- \pi_{12} (Q_2(V, \theta) + s_{12} - \bar{Q}_2) - \pi_{22} (Q_2(V, \theta) - s_{22} - \underline{Q}_2) + \\ &- \pi_{31} (V_1 + s_{31} - \bar{V}_1) - \pi_{41} (V_1 - s_{41} - \underline{V}_1) + \\ &- \pi_{32} (V_2 + s_{32} - \bar{V}_2) - \pi_{42} (V_2 - s_{42} - \underline{V}_2) + \\ &- \pi_{33} (V_3 + s_{33} - \bar{V}_3) - \pi_{43} (V_3 - s_{43} - \underline{V}_3)\end{aligned}$$

A tabela 1 apresenta o estado inicial do sistema e os limites para as restrições de tensão e reativo.

Os valores iniciais atribuídos para o parâmetro de barreira μ e o multiplicador de Lagrange u foram $\mu_V=0,004$; $\mu_Q=0,01$;

Tabela 1: Estado inicial e limites para tensões e reativos para o sistema de 3 barras.

Barra k	V_k (p.u.)	Ang_k (°)	\underline{V}_k (p.u.)	\bar{V}_k (p.u.)	\underline{Q}_k (MVar)	\bar{Q}_k (MVar)
1	1,00	0,00	0,95	1,10	-9999	9999
2	1,00	-2,00	0,95	1,20	-9999	9999
3	1,00	-5,00	1,00	1,00	-	-

Tabela 2: Variáveis do sistema de 3 barras no ponto de operação.

Barra k	V_k (p.u.)	Ang_k (°)	$Q_k(V, \theta)$ (p.u.)
1	1,07	0,00	-
2	1,13	4,20	1,04
3	1,00	-1,50	-

Tabela 3: Processo de otimização do sistema de 3 barras.

It.	Perdas (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)	Passo primal	Passo dual
0	4,14	117,11	159,11	-	-
1	13,48	14,32	4,62	1,00	0,44
2	12,89	0,14	0,19	1,00	1,00
3	12,92	0,00	0,00	1,00	1,00

$u_V=1$ e $u_Q=1$. Os índices V e Q indicam restrições de tensão e de geração de potência reativa, respectivamente. Verificou-se que diferentes estimativas do μ e u para tensão e reativo melhoram o processo de convergência. O sistema convergiu em 3 iterações. A tabela 2 apresenta os valores das tensões, ângulos e reativo na solução do sistema.

Na tabela 3 encontra-se um resumo do processo de otimização, sendo que os símbolos ΔP e ΔQ representam o erro máximo para as equações de balanço da potência ativa e reativa, respectivamente.

O ponto de operação obtido atingiu a mesma solução do método proposto por Dommel e Tinney (1968), com uma precisão de 10^{-6} p.u. para as equações do fluxo de potência. Na solução do problema, todas as restrições de igualdade e desigualdade e as condições de KKT estão satisfeitas.

4.2 Sistema CESP-440kV

O sistema brasileiro CESP-440kV de geração e transmissão é composto por 53 barras, sendo: 1 barra *slack*, 44 barras

Tabela 4: Processo de otimização do sistema CESP.

It.	Perdas (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)	Passo primal	Passo dual
0	228,90	618,22	846,50	–	–
1	214,51	20,07	54,66	0,95	0,48
2	208,29	4,93	8,25	1,00	0,19
3	203,67	6,92	0,41	1,00	0,31
4	203,38	0,06	0,00	1,00	0,06

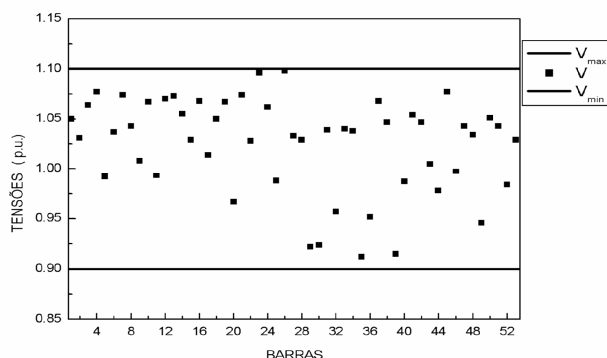


Figura 2: Magnitude das tensões nas 53 barras do sistema.

de carga, 8 barras de controle de potência reativa, 65 linhas de transmissão e 19 *taps* variáveis. Os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão para todas as barras do sistema foram de 0,9 p.u. e 1,1 p.u., respectivamente.

Os parâmetros iniciais para do sistema foram $\mu_V=0,001$; $\mu_Q=0,0001$; $\mu_t=0,2$; $u_V=1$; $u_Q=1$ e $u_t=100$. O índice *t* indica restrições de *taps*. O FPO convergiu em 4 iterações com um total de geração de potência reativa de 2088,39 MVar e um total de perdas de potência ativa de 203,38 MW. O processo de otimização está resumido na tabela 4. O tempo de processamento foi de 0,12 segundos.

Na Fig. 2 tem-se a magnitude das tensões na última iteração. Nota-se que no ponto de convergência duas magnitudes de tensão estão muito próximas aos seus limites superiores e as demais apresentam-se dentro dos limites predefinidos.

Na Fig. 3 tem-se para a última iteração os *taps* variáveis do sistema. Observa-se da figura que no ponto de convergência todos os *taps* estão dentro dos limites predefinidos.

No estado final do sistema CESP todas as tensões, *taps* e potências reativas estão dentro de seus limites e uma restrição de geração de reativo está ativa. O sistema satisfaz as restrições de igualdade com uma precisão de 10^{-3} p.u.

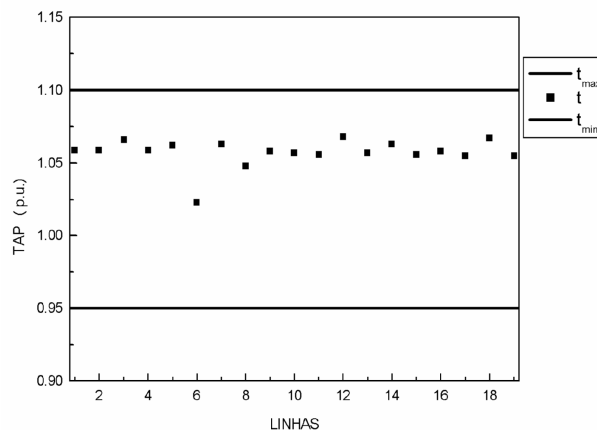


Figura 3: *Taps* variáveis do sistema CESP-440kV.

Tabela 5: Processo de otimização do sistema SUL-SUDESTE BRASILEIRO.

It.	Perdas (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)	Passo primal	Passo dual
0	1815,47	3599,77	1733,97	–	–
1	1758,54	2441,35	1158,69	0,32	0,21
2	1711,35	1311,92	613,81	0,43	0,45
3	1698,68	626,25	291,21	0,52	0,24
4	1695,34	376,89	176,99	0,39	0,55
5	1700,40	106,04	50,07	0,72	0,51
6	1673,55	31,34	15,82	0,68	0,51
7	1657,80	10,15	5,24	0,67	0,61
8	1636,03	0,99	0,26	0,93	0,80
9	1631,24	0,58	0,07	0,77	0,59

4.3 Sistema SUL-SUDESTE BRASILEIRO

O sistema SUL-SUDESTE BRASILEIRO é composto por 787 barras, sendo: 1 barra *slack*, 676 barras de carga, 110 barras de controle de potência reativa, 1065 linhas de transmissão e 86 *taps* variáveis. Os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão para todas as barras do sistema foram de 0,9 e 1,1 p.u., respectivamente.

Os parâmetros iniciais do sistema foram $\mu_V=0,001$; $\mu_Q=0,0001$; $\mu_t=0,11$; $u_V=10$; $u_Q=4,1$ e $u_t=2500$. O processo convergiu em 9 iterações com um total de geração de potência reativa de 2124,98 MVar e um total de perdas de potência ativa de 1631,24 MW. O processo de otimização está resumido na tabela 5. O tempo de processamento foi de 7,05 segundos.

Tabela 6: Tabela comparativa com o método PDBL.

Método		Sistemas	
		CESP	SUL-SUDESTE
PDBL	Perdas (MW)	203,37	1631,04
	Iterações	5	16
	Tempo CPU (seg)	0,15	13,11
FLBM	Perdas (MW)	203,38	1631,24
	Iterações	4	9
	Tempo CPU (seg)	0,12	7,05

No ponto de operação encontrado para o sistema todas as tensões, *taps* e potências reativas estão dentro de seus limites e as restrições do fluxo de potência foram satisfeitas com uma precisão de 10^{-2} p.u.

4.4 Teste Comparativo

A tabela 6 apresenta os resultados dos testes comparativos entre os métodos PDBL e FLBM utilizando os sistemas CESP-440kV e SUL-SUDESTE BRASILEIRO com as mesmas condições iniciais e os mesmos limites para as tensões, *taps* e restrições de geração de reativos.

Na solução do sistema SUL-SUDESTE BRASILEIRO o método PDBL apresenta 45 magnitudes de tensão e 10 restrições de geração de potência reativa próximas aos seus limites, enquanto que o método da FLBM possui 24 magnitudes de tensão e 5 restrições de geração de potência reativa ativas. Esse resultado mostra que o ponto de operação encontrado, pelo método da FLBM, permite uma melhor margem de operação para o sistema.

Com base nos resultados mostrados na tabela 6 conclui-se que o método da FLBM teve um melhor desempenho que o PDBL quanto ao número de iterações e tempo de processamento. Assim, pode-se afirmar que método proposto é eficiente para solução do problema de FPO Reativo.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se uma nova abordagem denominada Função Lagrangiana Barreira Modificada para a resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Nesta abordagem as restrições de desigualdade são relaxadas através do parâmetro de barreira. A condição de otimalidade da função Lagrangiana barreira modificada é resolvida pelo método de Newton. Os resultados dos testes com os sistemas

CESP-440kV e o SUL-SUDESTE BRASILEIRO e a comparação destes com o método PDBL mostraram o bom desempenho da abordagem proposta. As principais características do método da FLBM são: o processo de otimização poder iniciar-se fora da região factível do problema original e poder atingir, de fato, o limite das restrições de desigualdade. O método da FLBM pode ser aplicado a outros problemas da área de sistemas elétricos de potência como, por exemplo, colapso de tensão, máximo carregamento, entre outros.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Baptista, E. C.; Belati, E. A.; Sousa, V. A. and Da Costa, G.R.M. (2006). Primal-Dual Logarithmic Barrier and Augmented Lagrangian Function to the Loss Minimization in Power Systems. *Electric Power Components & Systems*, Vol. 32, No. 7, pp. 775-784.
- Castronuovo, E. D.; Campagnolo, J. M. and Salgado R. (2000). A largest-step central-path algorithm applied to the optimal power flow problem. *SBA Controle & Automação*, Vol. 11, No. 3, pp. 176-181.
- Dommel, H. W. and Tinney, W. F. (1968). Optimal Power Flow Solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 87, No. 10, pp. 1866-1876.
- Fernandes, T. S. P. and Almeida, K. C. (2003). Methodology for Optimal Power Dispatch Under a Pool-Bilateral Market. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 1, pp. 182-190.
- Granville, S. (1994). Optimal Reactive Dispatch through Interior Point Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 9, No. 1, pp. 136-146.
- Jabr, R.A.; Coonick, A.H. and Cory, B.J. (2002). A Primal-Dual Interior Point Method for Optimal Power Flow Dispatching. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 654-662.
- Melman, A. and Polyak, R.A. (1996). The Newton Modified Barrier Method for QP Problems. *Annals of Operations Research*, Vol. 54, pp. 465-519.
- Momoh, J.A. and Zhu, J.Z. (1999). Improved Interior Point for OPF Problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 14, No. 3, pp. 1114-1120.

-
- Monticelli, A. and Liu, W.H.E. (1992). Adaptive Movement Penalty Method for Newton Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 334-341.
- Polyak, R.A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, Vol. 54, No. 2, pp. 177–222.
- Sousa, V.A.; Baptista, E.C. and Costa, G.R.M. (2004). Modified Barrier Method for Optimal Power Flow Problem. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. CD Rom ISBN 0-7803-8466-0. Denver - CO, USA.
- Stott, B.; Alsac, O. and Marinho, J. L. (1980). The Optimal Power Flow Problem. In *Electric Power Problems: The Mathematical Challenge*, A.M.Erisman et al. (editors). SIAM, pp. 327-351.
- Torres, G. L. and Quintana, V. H. (1998). An Interior Point Method for Nonlinear Optimal Power Flow Using Voltage Rectangular Coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 4, pp. 1211-1218.
- Torres, G. L. and Quintana, V. H. (2001). On a Nonlinear Multiple-Centrality-Corrections Interior-Point Method for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 16, No. 2, pp. 222-228.
- Ramos, J. L. M.; Expósito, A. G. and Quintana, V. H. (2005). Transmission power loss reduction by interior-point methods: implementation issues and practical experience. *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, Vol. 152, No. 1, pp. 90-98.
- Wu, Y.; Debs, A.S.; Marsten, R.E. (1994). A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 9, pp. 876-883.