NOVOS TESTES DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS LINEARES

Maurício C. de Oliveira*
mauricio@dt.fee.unicamp.br

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Av. Albert Einstein 400, Campinas, SP, 13083-970.

ABSTRACT

This paper shows that several problems in linear systems theory can be solved by combining Lyapunov stability theory with Finsler's Lemma. Using these results, the differential equations that govern the behavior of the system can be seen as constraints. These *dynamic constraints*, which naturally involve the state derivative, are incorporated into the stability analysis conditions through the use of scalar or matrix Lagrange multipliers.

KEYWORDS: Stability, linear systems.

RESUMO

Este artigo mostra como diversos problemas de estabilidade de sistemas lineares podem ser formulados combinando-se a teoria de estabilidade de Lyapunov com o Lema de Finsler. Utilizando-se destes resultados, as equações diferencias que regem os sistemas podem ser vistas como restrições. Estas *restrições dinâmicas*, que naturalmente envolvem as derivadas das variáveis do sistema, são incorporadas às condições de estabilidade por meio de multiplicadores escalares ou matriciais.

PALAVRAS-CHAVE: Estabilidade, sistemas lineares.

Artigo submetido em 20/12/02
1a. Revisão em 22/04/03
Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. Liu Hsu

1 MOTIVAÇÃO

Considere-se o sistema linear contínuo e invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

em que $x(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Defina-se a forma quadrática $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por meio de

$$V(x) := x^T P x, \tag{2}$$

em que $P \in \mathbb{S}^n$. O símbolo $(\cdot)^T$ denota transposição e $\mathbb{S}^n$ denota o espaço das matrizes quadradas reais e simétricas de dimensão n. Se

$$V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0,$$

então a matriz P é dita *definida positiva*. O símbolo $X \succ 0$ ($X \prec 0$) indica que a matriz X é *definida positiva* (*negativa*).

O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (1) é dito (*globalmente*) *assintoticamente estável* se

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \quad \forall x(0) = x_0, \tag{3}$$

em que $x(t)$ é a solução da equação diferencial (1). Se (3) é verdadeira, então, por extensão, o sistema (1) é dito assintoticamente estável. Uma condição necessária e suficiente para que o sistema (1) seja assintoticamente estável é que a matriz A seja *Hurwitz*, isto é, que os autovalores de A tenham parte real negativa. De acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov, o sistema (1) é assintoticamente estável se $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ e

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall \dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \neq 0. \tag{4}$$

Isto é, se existe $P \succ 0$ de tal forma que a derivada em relação ao tempo da forma quadrática (2) é negativa *em todas as trajetórias* do sistema (1). Por outro lado, se o sistema linear (1) é assintoticamente estável, então existe uma matriz $P \succ 0$ que torna (4) factível. Note-se que o termo $\dot{V}(x(t))$ em (4) é uma função somente do estado $x(t)$, o que indica que a *restrição dinâmica* (1) já foi previamente *substituída* em (4). Esta operação provê a condição equivalente

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \left(A^T P + PA\right) x(t) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0. \quad (5)$$

Portanto, a estabilidade assintótica do sistema (1) pode ser verificada por meio do seguinte teste de estabilidade.

Lema 1 (Lyapunov) *O sistema linear contínuo e invariante no tempo (1) é assintoticamente estável se, e somente se,* $\exists\, P \in \mathbb{S}^n : P \succ 0$,

$$A^T P + PA \prec 0.$$

A motivação deste artigo é responder à seguinte questão: *é possível caracterizar o conjunto (4) sem que seja necessário substituir a restrição dinâmica (1) em (4)?* A chave para a resposta é analisar a factibilidade de conjuntos de desigualdades sujeitos a restrições dinâmicas segundo o ponto de vista de *otimização com restrições*. A ferramenta é o Lema de Finslero, que será capaz de caracterizar as condições de existência de solução para esta classe de problemas sem que seja necessário efetuar explicitamente a substituição das restrições dinâmicas, que aparecerão adicionadas às condições de estabilidade por meio de um produto com variáveis auxiliares – multiplicadores. Este procedimento, usual no contexto de otimização, parece nunca ter sido utilizado na caracterização de estabilidade de sistemas dinâmicos da forma proposta.

A condição de estabilidade (4) envolve, naturalmente, a variável de estado $x(t)$ e sua derivada $\dot{x}(t)$. Já a condição de estabilidade (5), produzida após substituição da equação dinâmica (1) em (4), envolve apenas $x(t)$. Como será visto mais adiante, para que se possa trabalhar diretamente no espaço dos vetores $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ (*espaço aumentado*) é necessário introduzir variáveis adicionais. Esta aparente desvantagem se reverte, no entanto, na obtenção de problemas matemáticos mais simples. Esta simplicidade permite que problemas sem solução possam ser resolvidos em espaços aumentados.

A técnica a ser introduzida provê novas possibilidades de aproveitamento da *estrutura* dos sistemas dinâmicos em estudo. O autor acredita que este aspecto tem o potencial de apontar novas direções para a solução de problemas na área de sistemas e controle como, por exemplo, controle descentralizado (Siljak, 1990), controle de ordem reduzida (Syrmos et al., 1997), projeto integrado da planta e do controlador (Grigoriadis et al., 1996), sistemas descritores singulares (Cobb, 1984), etc. Nestes temas, os testes de estabilidade baseados na teoria de estabilidade revelaram-se muito complexos, sendo de difícil solução. Espera-se que esta nova técnica possa revelar caminhos mais fáceis de exploração destes difíceis problemas.

Além do aspecto inovador, a técnica apresentada permite um nova leitura dos resultados clássicos, além de prover uma base comum e consistente de interpretação para os recentes resultados em análise de estabilidade (Geromel et al., 1998; de Oliveira, Geromel e Hsu, 1999; de Oliveira, Bernussou e Geromel, 1999)s e em síntese de controladores e filtros (de Oliveira et al., 2002; Geromel et al., 1999). Todos estes trabalhos podem ser vistos como aplicações particulares do método descrito neste artigo.

O principal objetivo deste artigo é divulgar o uso desta técnica inovadora de análise, não pretendendo esgotar completamente todas as possibilidades de aplicação. Os leitores interessados devem consultar as referências, em especial os artigos (de Oliveira e Skelton, 2001; de Oliveira e Skelton, 2002; de Oliveira, 2004), para obtenção de material mais completo. Estas referências aprofundam os resultados apresentados aqui em diversos aspectos, incluíndo o tratamento de sistemas discretos (equações a diferenças) e a análise do problema dual associado à metodologia proposta.

2 O MÉTODO DE LYAPUNOV COM MULTIPLICADORES

Considere-se a condição de estabilidade (4). Defina-se a forma quadrática $\dot{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) := x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t), \quad (6)$$

que é a derivada em relação ao tempo da forma quadrática (2), expressa em função dos vetores $x(t)$ e $\dot{x}(t)$. Não se substitua a expressão para $\dot{x}(t)$ proveniente de (1) em (6) e construa-se o conjunto

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \quad \forall \dot{x}(t) = Ax(t), \quad (x(t), \dot{x}(t)) \neq 0. \quad (7)$$

O objetivo desta seção é caracterizar estabilidade por meio de (7) em vez de (4). Isto é formalmente possível, embora o teste (4) requeira apenas $x(t) \neq 0$ enquanto (7) exige $(x(t), \dot{x}(t)) \neq 0$. Um argumento similar ao encontrado em (Boyd et al., 1994), p. 62–63, pode demostrar a equivalência entre (4) e (7). Para tal basta se verificar que o conjunto

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \quad \forall \dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) = 0, \quad \dot{x}(t) \neq 0 \quad (8)$$

é vazio. E isto é verdadeiro pois, a partir de (6), não é possível obter $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0$ com $x(t) = 0$, o que mostra que (8) é, de fato, vazio. Além do mais, $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t))$ nunca é estritamente negativa para todo valor de $(x(t), \dot{x}(t)) \neq 0$ sem que se considere a restrição dinâmica (1).

A vantagem de se trabalhar com (7) em vez de (4) é que o conjunto de soluções factíveis para o conjunto (7) pode ser caracterizado por meio do seguinte lema, que é originalmente atribuído a Finsler Uhlig.

Lema 2 (Finsler) *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{S}^n$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de tal forma que* $\operatorname{posto}(\mathcal{B}) < n$. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $x^T \mathcal{Q} x < 0, \quad \forall \mathcal{B}x = 0, \quad x \neq 0.$

ii) ${\mathcal{B}^{\perp}}^T \mathcal{Q} \mathcal{B}^{\perp} \prec 0.$

iii) $\exists\, \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} \prec 0.$

iv) $\exists\, \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0.$

Existem inúmeras provas deste lema disponíveis na literatura. Por exemplo, (de Oliveira e Skelton, 2001; Skelton et al., 1997). No Lema 2, o item $i)$ apresenta uma forma quadrática com uma restrição linear, na qual o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é confinado ao espaço nulo da matriz $\mathcal{B}$. Em outras palavras, o vetor x pode ser parametrizado por meio de $x = \mathcal{B}^{\perp} y$, $y \in \mathbb{R}^r$, $r := \operatorname{posto}(\mathcal{B}) < n$, em que $\mathcal{B}^{\perp}$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$. O item $ii)$ corresponde à operação de substituição desta restrição em $i)$, o que provê uma forma quadrática sem restrições no espaço *reduzido* $\mathbb{R}^r$. Finalmente, itens $iii)$ e $iv)$ apresentam formas quadráticas no espaço *aumentado* $\mathbb{R}^n$, nas quais as restrições foram incorporadas por meio de multiplicadores. Em $iii)$ o multiplicador é o escalar μ enquanto em $iv)$, é a matriz $\mathcal{X}$. Neste sentido, as formas quadráticas dos itens $iii)$ e $iv)$ podem ser identificadas como funções *Lagrangeanas*.

O Lema de Finsler tem sido utilizado freqüentemente em teoria de controle, porém com a finalidade quase exclusiva de *eliminar* variáveis. Por esta razão, chega até mesmo a ser chamado de *Lema da Eliminação* (Boyd et al., 1994). Neste contexto, a maioria das aplicações começa pelo item $iv)$ e usa lema para obter o item $ii)$, portanto *eliminando* a variável (multiplicador) $\mathcal{X}$.

Lembrando-se de que $V(x(t)) > 0$, $\forall x(t) \neq 0$ pode ser escrito como $P \succ 0$, e reescrevendo-se (7)

$$\begin{pmatrix} x(t)^T & \dot{x}(t)^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} < 0,$$
$$\forall \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = 0, \; \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \neq 0,$$

fica claro que o Lema 2 pode ser aplicado a (7).

Teorema 3 (Estabilidade) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O sistema linear contínuo e invariante no tempo (1) é assintoticamente estável.

ii) $\exists\, P \in \mathbb{S}^n : P \succ 0, \quad A^T P + PA \prec 0.$

iii) $\exists\, P \in \mathbb{S}^n, \mu \in \mathbb{R} : P \succ 0,$

$$\begin{bmatrix} -\mu A^T A & \mu A^T + P \\ \mu A + P & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0.$$

iv) $\exists\, P \in \mathbb{S}^n, F, G \in \mathbb{R}^{n\times n} : P \succ 0,$

$$\begin{bmatrix} A^T F^T + FA & A^T G^T - F + P \\ GA - F^T + P & -G - G^T \end{bmatrix} \prec 0.$$

Prova: Item $i)$ pode ser reescrito como $P \succ 0$ e (7). Aplica-se o Lema 2 com as variáveis

$$x \leftarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \; \mathcal{Q} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \; \mathcal{B}^T \leftarrow \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{X} \leftarrow \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}, \; \mathcal{B}^{\perp} \leftarrow \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}.$$

a (7) para se obter os itens de $ii)$ a $iv)$. □

Note-se que o item $ii)$ do Teorema 3, gerado como aplicação do Lema de Finsler, reproduz exatamente o teste de estabilidade enunciado no Lema 1. Os itens $iii)$ e $iv)$ são novas condições de estabilidade. No caso em que a matriz A é constante e precisamente conhecida, as condições $ii)$ a $iv)$ são LMIs (Linear Matrix Inequalities). Isto significa que os conjuntos de factibilidade destas condições são conjuntos convexos (veja Boyd et al.). Note-se também que o primeiro bloco da segunda desigualdade na condição $iii)$ é $\mu A^T A \succ 0$, o que implica que $\mu > 0$ e que A deve ser não singular. Isso reflete a ausência de pólos no eixo imaginário, condição necessária para que A seja estável.

Os multiplicadores μ, F e G representam graus de liberdade extra que podem ser explorados, por exemplo, na análise de estabilidade de sistemas com incertezas ou na síntese de controladores com algum tipo de estrutura particular. Em alguns casos, a estrutura desejada dos controladores pode ser obtida por meio de restrições adicionais destes multiplicadores. Em geral – veja (de Oliveira et al., 2002) para maiores detalhes –, esta estratégia se revela menos conservadora do que a imposição de restrições diretamente sobre a matriz de Lyapunov. Em alguns casos, restrições nos multiplicadores podem ser impostas sem que haja perda de generalidade. Por exemplo, no Teorema 3, o multiplicador $\mathcal{X}$ pode ser feito igual[1] a $-(\mu/2)\mathcal{B}^T$ sem perda de generalidade. Como outro exemplo, a escolha particular dos multiplicadores

$$F = F^T = P, \quad G = \epsilon I,$$

não incorre em perda de generalidade, uma vez que sempre existirá um valor suficientemente pequeno de $\epsilon > 0$ de tal forma a garantir necessidade e suficiência da condição $iv)$ com estas restrições. Este comportamento é semelhante ao demonstrado pelas condições de estabilidade introduzidas em (Geromel et al., 1998). De fato, pode-se mostrar que o item $iv)$ é um caso particular do estudo de estabilidade feito em (Geromel et al., 1998), que foi obtido como resultado da aplicação da propriedade de positividade real.

A introdução de *variáveis adicionais*, aqui identificadas como multiplicadores de Lagrange, é o ingrediente principal dos recentes trabalhos (Geromel et al., 1998; de Oliveira, Geromel e Hsu, 1999; de Oliveira, Bernussou e Geromel, 1999), que investigam estabilidade robusta com *funções de Lyapunov paramétricas*[2]. Pode-se estabelecer uma relação entre estes resultados e o método proposto neste artigo considerando-se que a matriz A do sistema (1) não é precisamente conhecida, mas tem seus valores dados em um poliedro convexo e limitado $\mathcal{A}$. Este poliedro é descrito por meio da combinação convexa de N vértices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, N$, segundo a relação

$$\mathcal{A} := \left\{ A(\xi) : A(\xi) = \sum_{i=1}^{N} A_i \xi_i, \quad \xi \in \Xi \right\},$$

em que

$$\Xi := \left\{ \xi = (\xi_i) : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1, \, \xi_i \geq 0, \, i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Nesta definição, o parâmetro ξ não é conhecido. Se todas as matrizes em $\mathcal{A}$ forem Hurwitz então o sistema (1) é dito *robustamente estável em $\mathcal{A}$*. O seguinte teorema pode ser derivado como uma extensão do Teorema 3.

Teorema 4 (Robustez) *Se ao menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:*

i) $\exists\, P \in \mathbb{S}^n : P \succ 0,\ A_i^T P + P A_i \prec 0,$

ii) $\exists\, F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}, P_i \in \mathbb{S}^n : P_i \succ 0,$

$$\begin{bmatrix} A_i^T F^T + F A_i & A_i^T G^T - F + P_i \\ G A_i - F^T + P_i & -G - G^T \end{bmatrix} \prec 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, N$, então o sistema linear contínuo e invariante no tempo (1) é robustamente estável em $\mathcal{A}$.

O Teorema 4 ilustra como os graus de liberdade adicionais obtidos com a introdução dos multiplicadores podem ser explorados na geração de condições de estabilidade robusta menos conservadoras. Note-se que, embora os itens $ii)$ e $iv)$ do Teorema 3 sejam equivalentes, os itens $i)$ e $ii)$ do Teorema 4 não o são. No item $i)$, uma única matriz P testa a estabilidade em todo o domínio de incerteza. Portanto, a condição $i)$ é uma condição de *estabilidade quadrática* (Barmish, 1985). Por outro lado, a função de Lyapunov usada no item $ii)$ depende do parâmetro incerto, ou seja, é uma *função de Lyapunov paramétrica* (Feron et al., 1996). Versões "robustas" de todos os resultados apresentados neste artigo podem ser obtida seguindo-se esta linha de raciocínio. Vale a pena ressaltar que esta mesma abordagem produz também resultados para sistemas lineares discretos no tempo (veja de Oliveira e Skelton) sem que seja necessário introduzir modificação alguma.

3 SISTEMAS COM ENTRADAS E SAÍDAS

A metodologia introduzida nas seções anteriores pode ser estendida para sistemas com entradas e saídas. Por exemplo, considere-se o seguinte sistema linear contínuo e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), \quad x(0) = 0, \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Neste caso, para que se possa analisar a estabilidade deste sistema deve-se, primeiramente, caracterizar-se o sinal de entrada $w(t)$. Aqui, presume-se que o sinal $w(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua por partes no espaço $\mathcal{L}_2$, isto é,

$$\|w\|_{\mathcal{L}_2} := \left(\int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau)\, d\tau \right)^{1/2} < \infty.$$

O sistema (9) é dito *estável em $\mathcal{L}_2$* se o sinal de saída $z(t) \in \mathbb{R}^p$ também pertencer ao espaço $\mathcal{L}_2$ para qualquer $w(t) \in \mathcal{L}_2$. Esta condição de estabilidade pode ser testada, por exemplo, avaliando-se o chamado *ganho $\mathcal{L}_2$ para $\mathcal{L}_2$*

$$\gamma_\infty := \sup_{w(t)\in\mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}}.$$

Sempre que o sistema linear contínuo e invariante no tempo (9) for estável pode-se mostrar que

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty := \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|H_{wz}(j\omega)\|_2 = \gamma_\infty,$$

em que $H_{wz}(s)$ é a função de transferência da entrada $w(t)$ para a saída $z(t)$, e $\|\cdot\|_2$ denota o valor singular máximo.

[1] Esta escolha simplesmente converte a condição dada no item $iv)$ na condição $iii)$.

[2] Do inglês, *parameter dependent Lyapunov functions*.

Defina-se então a mesma função de Lyapunov $V(x(t)) > 0$, $\forall x(t) \neq 0$ considerada na Seção 2, e a seguinte condição de estabilidade

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \quad \gamma^2 w(t)^T w(t) \le z(t)^T z(t), \\ \forall (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \text{ satisfazendo } (9), \\ (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \neq 0, \quad (10)$$

para um dado escalar $\gamma > 0$. Estas desigualdades estão associadas à análise de estabilidade do sistema (9) submetido à realimentação

$$w(t) := \Delta(t) z(t), \quad \forall \Delta(t) : \|\Delta(t)\|_2 \le \gamma^{-1}.$$

Segundo (Boyd et al., 1994), p. 62–63, o procedimento-S[3] produz a condição de estabilidade [4,5]

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < \gamma^2 w(t)^T w(t) - z(t)^T z(t), \\ \forall (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \text{ satisfazendo } (9), \\ (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \neq 0. \quad (11)$$

Se as condições acima forem satisfeitas, pode-se concluir que

$$0 < V(x(t)) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau \\ < \int_0^t \gamma^2 w(\tau)^T w(\tau) - z(\tau)^T z(\tau)\, d\tau,$$

que vale $\forall\, t > 0$. Em especial, para $t \to \infty$,

$$\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 < \gamma^2 \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2,$$

o que implica que $\gamma > \gamma_\infty$. Em outras palavras, a factibilidade de (11) provê um limitante superior para $\|H_{wz}(s)\|_\infty$. Para o sistema (9), é sabido que

$$\gamma_\infty = \inf \gamma : (11).$$

Portanto, se (11) for factível para algum $0 < \gamma < \infty$ então o sistema (9) é estável em $\mathcal{L}_2$. Além do mais, a condição (11) também garante que (9) é *internamente*[6] assintoticamente estável.

[3]Do inglês, *S-procedure*.

[4]Neste caso particular, o procedimento-S produz um teste de estabilidade necessário e suficiente. Este resultado pode ser visto como uma versão do Lema de Finsler no qual a restrição é uma forma quadrática (veja Boyd et al., p. 23–24).

[5]Como em (Boyd et al., 1994), p. 63, a função $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t))$ é homogênea em P de tal modo que o escalar introduzido pelo procedimento-S pode ser feito igual a 1 sem perda de generalidade.

[6]Quando a realização do sistema (9) é mínima, i.e., controlável e observável, estas duas noções de estabilidade coincidem. Se a minimalidade não se aplica, o sistema (9) pode ser estável em $\mathcal{L}_2$ mas internamente instável, e neste caso o conjunto definido por (11) é vazio.

Uma versão generalizada de (11) pode ser obtida considerando-se restrições nos sinais de entrada e saída na forma

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \ge 0,$$

em que $Q \in \mathbb{S}^p$, $R \in \mathbb{S}^m$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Aplicando-se o procedimento-S a esta desigualdade obtem-se o teste de estabilidade

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < -\begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \\ \forall (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \text{ satisfazendo } (9), \\ (x(t), \dot{x}(t), w(t), z(t)) \neq 0, \quad (12)$$

Fica claro que o Lema de Finsler pode ser aplicado igualmente a esta condição de estabilidade. O resultado completo, na forma de um teorema, encontra-se em (de Oliveira e Skelton, 2001).

4 SISTEMAS DESCRITOS POR FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Nesta seção, aplicar-se-á o Lema de Finsler a sistemas descritos por funções de transferência. Considere-se o sistema linear com uma entrada e uma saída descrito pela função de transferência

$$H_{wz}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (13)$$

Os resultados apresentados podem ser generalizados para se tratar sistemas com múltiplas entradas e saídas de qualquer ordem. Estabilidade assintótica de (13) pode ser analisada considerando-se a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0 \quad (14)$$

A estabilidade desta equação pode ser testada pela função de Lyapunov quadrática

$$V(x(t)) := x(t)^T P x(t), \quad P := \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \succ 0,$$

que produz a condição de estabilidade associada

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0, \\ \forall (x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \neq 0 \text{ satisfazendo } (14).$$

Argumentos similares aos apresentados na Seção 2 prestam-se a mostrar que a condição acima, juntamente com $P \succ 0$, caracterizam completamente a estabilidade da equação diferencial (14) e, por extensão, do sistema (13).

Teorema 5 (Estabilidade) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O sistema linear contínuo e invariante no tempo (13) é assintoticamente estável.

ii) $\exists\, P \in \mathbb{S}^2 : P \succ 0, \quad A^T P + PA \prec 0$*, em que*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix},$$

iii) $\exists\, P \in \mathbb{S}^2, \mu \in \mathbb{R} : P \succ 0, \quad \mathbf{U}(P) - \mu\, \mathbf{a}\mathbf{a}^T \prec 0$*, em que*

$$\mathbf{U}(P) := \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 2p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iv) $\exists\, P \in \mathbb{S}^2, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : P \succ 0,\ \mathbf{U}(P) + \mathbf{f}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mathbf{f}^T \prec 0.$

Surpreendentemente, o item $ii)$ do Teorema 5 equivale ao resultado do item $ii)$ do Teorema 3 aplicado à realização de estado da equação (14) na forma *companheira*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Os itens $iii)$ e $iv)$ são condições de estabilidade inéditas. Note-se que as condições $iii)$ e $iv)$ não são iguais às condições $iii)$ e $iv)$ do Teorema 3 para a realização (15).

Também os resultados da Seção 3 podem ser generalizados para funções de transferências. Considere-se novamente o sistema (13), e definam-se as seguintes restrições dinâmicas

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) &= w(t), \\ b_2\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0 x(t) &= z(t) \end{aligned} \tag{16}$$

Pode-se mostrar que o análogo da condição (12) para este sistema é

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) < -\begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} q & s \\ s & r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$
$$\forall (x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), w(t), z(t)) \neq 0 \text{ satisfazendo } (16),$$

em que $q, s, r \in \mathbb{R}$. A forma da restrição dinâmica (16) merece comentários. Em primeiro lugar, (16) é baseada na realização de variáveis de fase[7], em que o sistema (13) é *realizado* como

$$H_{wz}(s) = Z(s)/W(s),$$
$$Z(s) = b(s)\xi(s), \quad a(s)\xi(s) = W(s).$$

[7]Do inglês, *phase-variable realization*.

No entanto, para que (16) possa ser representada na forma de estado, a segunda equação deve ter o termo $\ddot{x}$ substituído utilizando-se a primeira equação. Esta operação produz a realização

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) &= w(t), \\ c_1\dot{x}(t) + c_0 x(t) &= z(t) - b_2 w(t) \end{aligned}$$

em que $c_i := (b_i - b_2 a_i),\ i = 0, 1$. O Lema de Finsler pode tratar ambas as formas, sem dificuldades. Veja em (de Oliveira e Skelton, 2001) as expressões resultantes.

Esta mesma abordagem se presta a funções de transferência de ordem mais elevada ou para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Por exemplo, considere-se um sistema com m entradas e p saídas

$$H_{wz}(s) = Z(s)W(s)^{-1},$$
$$Z(s) = N(s)\xi(s), \quad D(s)\xi(s) = W(s). \tag{17}$$

As matrizes racionais $N(s)$ e $D(s)$ são fatores *coprimos* de $H_{wz}(s)$. Outra possibilidade de generalização destes resultados é para sistemas descritos por equações diferenciais *vetoriais* como, por exemplo, sistemas mecânicos de segunda ordem, em geral descritos na forma

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = Bw(t).$$

Uma versões do Teorema 5 especializada para esta classe de sistemas permitiria considerar incertezas em todas as matrizes do sistema, incluindo-se a matriz de *massa* M.

O trabalho (de Oliveira e Skelton, 2001) discute diversos problemas que podem ser abordados com a metodologia discutida neste artigo. Os leitores interessados ficam convidados a folheá-lo.

5 CONCLUSÃO

Neste artigo, combina-se a teoria de estabilidade de Lyapunov com o Lema de Finsler para obtenção de condições de estabilidades para sistemas lineares. A metodologia proposta se aplica a sistemas lineares descritos por equações diferenciais, não necessariamente em forma de estado, cuja condição de estabilidade possa ser descritas por formas quadráticas das variáveis do sistema e suas derivadas. A equação dinâmica é incorporada às condições de estabilidade por meio do Lema de Finsler em três diferentes formas. Em duas destas formas introduzem-se variáveis adicionais, multiplicadores de Lagrange, que são capazes de tratar o problema de estabilidade sem que haja necessidade de substituição da equação dinâmica do sistema nas condições de estabilidade. Como ilustração, abordam-se o problema de estabilidade de sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo, com ou sem incertezas nas matrizes do sistema, o problema de estabilidade de sistemas descritos por funções de transferência, e o problema de estabilidade com restrição integrais quadráticas.

A metodologia pode ser resumida, em poucas palavras, na seguinte *receita*:

1. Identificar as condições de estabilidade com a teoria de Lyapunov no espaço de todas as variáveis de suas derivadas (espaço aumentado).
2. Identificar as equações do sistema (restrições dinâmicas).
3. Aplicar o Lema de Finsler para incorporar as restrições dinâmicas às condições de estabilidade no espaço aumentado.

O passo 3 provê três testes de estabilidade equivalentes: a) utilizando-se do espaço nulo das restrições dinâmicas, b) utilizando-se de um multiplicador de Lagrange escalar, e c) utilizando-se de um multiplicador de Lagrange matricial. A introdução dos multiplicadores traz graus adicionais de liberdade que podem ser utilizados na análise de problemas que se revelam de difícil solução pelas técnicas usuais. Espera-se que esta nova metodologia possa contribuir para a solução de problemas abertos em teoria de sistemas e controle.

REFERÊNCIAS

Barmish, B. R. (1985). Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system, *JOTA* **46**: 399–408.

Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.

Cobb, D. (1984). Controllability, observability, and duality in descriptor systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **29**: 1076–1082.

de Oliveira, M. C. (2004). Investigating duality on stability conditions. A ser publicado na Systems & Control Letters.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Hsu, L. (1999). LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case, *Linear Algebra and Its Applications* **296**(1-3): 27–38.

de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, *in* S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, pp. 241–257. ISBN: 1852334525.

de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2002). On stability tests for linear systems, *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, pp. 3021–3026.

Feron, E., Apkarian, P. e Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(7): 1041–1046.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. e Bernussou, J. (1999). Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, pp. 570–575.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. e Hsu, L. (1998). LMI characterization of structural and robust stability, *Linear Algebra and Its Applications* **285**(1-3): 69–80.

Grigoriadis, K. M., Zhu, G. e Skelton, R. E. (1996). Optimal redesign of linear systems, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control : transactions of the ASME* **118**(3): 598–605.

Siljak, D. D. (1990). *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, London, UK.

Skelton, R. E., Iwasaki, T. e Grigoriadis, K. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Control Design*, Taylor & Francis, London, UK.

Syrmos, V. L., Abdallah, C. T., Dorato, P. e Grigoriadis, K. (1997). Static output feedback — a survey, *Automatica* **33**(2).

Uhlig, F. (1979). A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey, *Linear Algebra and Its Applications* **25**: 219–237.