
FILTRAGEM DE KALMAN COM RESTRIÇÕES PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES: REVISÃO E NOVOS RESULTADOS

Bruno O. S. Teixeira*
brunoos@cpdee.ufmg.br

Leonardo A. B. Tôrres*
torres@cpdee.ufmg.br

Luis A. Aguirre*
torres@cpdee.ufmg.br

*Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

ABSTRACT

Constrained Kalman Filtering for Nonlinear Systems: Review and New Results

This paper addresses the state-estimation problem for nonlinear systems for the case in which prior knowledge is available in the form of constraints on the state vector. A review of methods investigated in the literature is presented together with new results. The main contribution of this paper is to categorize the investigated constrained state estimators in five groups according to the way in which the constraint information is enforced, namely, measurement augmentation, estimate projection, sigma point projection, quadratic programming, and truncation. Two illustrative examples are discussed.

KEYWORDS: Kalman filter, state estimation, constraints, unscented Kalman filter.

RESUMO

O presente artigo considera o problema de estimação de estados para sistemas não-lineares para o caso no qual informação a priori está disponível na forma de restrições no vetor de estados. Apresenta-se uma revisão de métodos investigados na literatura junto com novos resultados. A principal contri-

buição deste artigo está na categorização dos estimadores de estado com restrições estudados em cinco classes, de acordo com a maneira em que a informação da restrição é tratada, a saber: abordagem das medições aumentadas, de projeção da estimativa, de projeção dos pontos sigma, de programação quadrática, e de truncamento. Dois exemplos ilustrativos são discutidos.

PALAVRAS-CHAVE: Filtro de Kalman, estimação de estados, restrições, filtro de Kalman unscented.

1 INTRODUÇÃO

Estudos astronômicos, em especial no fim do século XVIII, serviram como um dos principais e pioneiros estímulos ao desenvolvimento da teoria de estimação. Visando a estimar os parâmetros das equações de movimento de planetas e cometas a partir de dados medidos por telescópios, Gauss propôs o método dos mínimos quadrados em 1795 (Sorenson, 1970). Pouco mais de um século e meio depois, incentivado pelo início da corrida espacial, em janeiro de 1959, Rudolf Kalman, por meio de "*um único, gigante e persistente exercício matemático*" (Kalman, 2003) inventou o algoritmo de filtragem (Kalman, 1960), o qual leva seu nome, em reconhecimento ao considerado, por muitos, até hoje, o principal trabalho científico sobre estimação de estados. Atualmente, o filtro de Kalman (KF)¹ é solução de prateleira

Artigo submetido em 17/03/2009 (Id.: 00974)

Revisado em 29/07/2009

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Marco Henrique Terra

¹As siglas utilizadas neste trabalho são definidas em inglês segundo o padrão da literatura internacional.

para muitos problemas do setor aeroespacial (Cipra, 1993).

No cenário brasileiro, várias outras aplicações podem ser citadas como: reconstrução de trajetória e estimação de parâmetros de aeronaves (de Mendonça, Hemerly & Góes, 2007; Teixeira et al., 2005; Curvo, 2000; Curvo & Rios Neto, 2003), robótica (Sandi Lora, Hemerly & Lages, 1998; Kühne, Claro, Suess & Lages, 2004) processos químicos (Maciel Filho, Rodrigues & Zaiat, 1999; Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b), sistemas de potência (Cardoso et al., 2006), engenharia biomédica (Trigo, Lima, & Amato, 2004), detecção de falhas (Quirino & Bottura, 2003), treinamento de redes neurais (Rios Neto, 1997; Cajueiro & Hemerly, 2003), dinâmica não-linear e caos (Bitencourt Jr., Tôrres & Aguirre, 2004; Aguirre, Teixeira & Tôrres, 2005), economia (Pizzinga, 2009) e solução de equações algébricas lineares (Pinto & Rios Neto, 1990; Rios Neto & Rios Neto, 2000). Uma revisão bibliográfica sobre o problema de estimação de dados é encontrada em (Rios Neto & Hemerly, 2007).

Apesar do amplo uso do KF, as premissas de linearidade e Gaussianidade que lhe garantem otimalidade impedem sua aplicação em sistemas não-lineares. Métodos de filtragem de partículas (PF) podem ser empregados para, de forma aproximada, tratar sistemas não-lineares e não-gaussianos (Arulampalam et al., 2002). No entanto, seu elevado custo computacional inviabiliza sua implementação em várias aplicações de tempo real (Daum, 2005). Por outro lado, métodos de aproximação gaussiana contornam tal dificuldade pelo emprego de algoritmos baseados no KF. Desse grupo, o filtro de Kalman estendido (EKF) (Jazwinski, 1970; Maybeck, 1979), cujo cerne está na *linearização analítica ou numérica* do modelo do sistema, é a solução mais usada nas últimas quatro décadas. No entanto, o EKF apresenta algumas limitações como sensibilidade às condições iniciais e à sintonia das matrizes de covariância de ruído, especialmente, para sistemas fortemente não-lineares. Nesse caso, pode-se observar divergência ou mesmo instabilidade do estimador (Reif et al., 1999). Alternativamente, o filtro de Kalman *unscented* (UKF) (Julier & Uhlmann, 2004), um algoritmo da família dos filtros de Kalman de pontos sigma (SPKF) (Lefebvre et al., 2002; van der Merwe et al., 2004), usa uma técnica de *linearização estatística* que emprega um número reduzido de amostras escolhidas deterministicamente (Julier et al., 2000). Vários trabalhos recentes (Julier et al., 2000; Haykin, 2001; van der Merwe et al., 2004; Lefebvre et al., 2004; Romanenko & Castro, 2004; Hovland et al., 2005; Choi et al., 2005; Crassidis, 2006; Teixeira et al., 2008b; Xiong et al., 2007; Arasaratnam & Haykin, 2009) relatam o desempenho superior do UKF comparado ao EKF. Algumas questões práticas sobre implementação, inicialização, sintonia, e convergência de algoritmos de filtragem de Kalman são tratadas em (Rios Neto & He-

merly, 2007; Reif et al., 1999; Xiong et al., 2007) e referências internas e estão fora do escopo do presente trabalho.

A teoria de filtragem de Kalman é baseada no uso de duas fontes de informação incertas, a saber: um *modelo matemático* e as *medições*. Contudo, em alguns casos, *informação adicional* sobre o sistema pode ser conhecida, e essa terceira fonte de informação pode ser útil para melhorar as estimativas de estado. Neste artigo, é considerado o cenário no qual a dinâmica e os distúrbios do sistema são tais que o vetor de estados satisfaz uma *restrição de desigualdade* (Robertson & Lee, 2002; Goodwin et al., 2005) ou uma *restrição de igualdade* (Teixeira et al., 2007; Ko & Bitmead, 2007). Por exemplo, em reações químicas, as concentrações dos reagentes e produtos são não-negativas (Maciel Filho, Rodrigues & Zaiat, 1999; Marcon, Trieiweiler & Secchi, 2002), ao passo que no problema de estimação de atitude representada por quaternio de atitude, o vetor de estado deve ter norma unitária (Crassidis & Markley, 2003; Santos & Waldmann, 2007).

Estimação de estados com restrições tem recebido crescente atenção tanto no ambiente acadêmico quanto na indústria, especialmente, durante os últimos dez anos (Simon, 2008). No presente trabalho, investigam-se e propõem-se métodos de filtragem de Kalman para impor restrições de igualdade e/ou de desigualdade na estimativa de estado. Trata-se do caso de sistemas não-lineares, para os quais propõem-se algoritmos baseados no UKF. A principal contribuição deste artigo está na categorização dos estimadores de estado com restrições estudados em cinco classes, de acordo com o mecanismo utilizado para reforçar a informação provida pelas restrições, a saber: abordagem das *medições aumentadas* (Tahk & Speyer, 1990; Alouani & Blair, 1993; Pizzinga, 2009), de *projeção da estimativa* (Simon & Chia, 2002; Teixeira et al., 2009a), de *projeção dos pontos sigma* (Vachhani et al., 2006; Julier & LaViola Jr., 2007), de *programação quadrática* (Rao et al., 2003; Marcon, Trieiweiler & Secchi, 2002), e de *truncamento da função de densidade de probabilidade* (PDF) (Simon, 2006).

A abordagem das medições aumentadas é uma das técnicas mais populares para o tratamento de restrições de igualdade. Nessa abordagem, o modelo de observação é aumentado com a equação de restrição, a qual é análoga a uma medida sem ruído. Por outro lado, a abordagem de projeção da estimativa propõe que as estimativas de estado sejam projetadas na hipersuperfície definida pelas restrições de igualdade. Caso haja restrições de desigualdade, as estimativas de estado devem ser projetadas na hipersuperfície correspondente somente se elas já não satisfazem tal restrição. A fim de reforçar tanto restrições de igualdade quanto de desigualdade no contexto do UKF, os algoritmos da abordagem de projeção de pontos sigma se baseiam na projeção dos pontos sigma na hipersuperfície definida pelas restrições no lugar da

projeção da estimativa de estado, a qual corresponde à média ponderada dos pontos sigma projetados. A abordagem de programação quadrática permite o tratamento de restrições de igualdade e de desigualdade pela redefinição do problema de estimação de estados como um problema numérico de otimização com restrições. Finalmente, a abordagem de truncamento da PDF é usada para reforçar restrições de desigualdade do tipo intervalar. O procedimento de truncamento remodela a PDF computada pelo algoritmo de filtragem de Kalman, a qual é aproximada pela estimativa de estado e pela covariância do erro de estimação, nas bordas da restrição intervalar.

O objetivo deste tutorial é prover uma visão panorâmica do estado da arte em filtragem de Kalman com restrições e fornecer ao leitor os fundamentos para compreensão de quais tipos de restrições cada abordagem é capaz de tratar e de que maneira a informação provida pelas restrições é reforçada na estimativa de estado e, eventualmente, na covariância do erro de estimação. Para tal, o presente artigo está estruturado da seguinte maneira. O problema de estimação de dados sem restrições para sistemas lineares e não-lineares é revisitado na Seção 2. O caso com restrições é revisto na Seção 3. Na Seção 4, são apresentados novos algoritmos de estimação de estados com restrições baseados no UKF. A Seção 5 resume e compara as principais características de todos os algoritmos revistos e apresentados neste artigo. Dois exemplos ilustrativos são discutidos na Seção 6. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 7. Este trabalho é baseado na pesquisa documentada em (Teixeira, 2008).

2 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS SEM RESTRIÇÕES

2.1 Formulação do Problema

Para o sistema dinâmico modelado em espaço de estados pela seguinte representação não-linear, estocástica e discreta no tempo

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1), \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k, k) + v_k, \quad (2)$$

em que $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, os modelos de processo e de observação, os quais são assumidamente conhecidos, o problema de *estimação de estados* é definido a seguir. Assuma que, para todo $k \geq 1$, são conhecidas as medições $y_k \in \mathbb{R}^m$, as entradas $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$, e as PDFs $\rho_{x_0}(x_0)$, $\rho_{w_{k-1}}(w_{k-1})$ e $\rho_{v_k}(v_k)$, em que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados inicial, $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ é o ruído de processo, representando perturbações desconhecidas, e $v_k \in \mathbb{R}^r$ é o ruído de medição, o qual trata das incertezas nas observações. Defina a função lucro

$$J(x_k) \triangleq \rho(x_k | (y_1, \dots, y_k)), \quad (3)$$

em que $\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k))$ é a PDF condicional a posteriori do vetor de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ condicionada às medições passadas y_1, \dots, y_{k-1} e presente y_k . A solução completa do problema de estimação de estados é dada por $\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k))$ e o maximizador $\hat{x}_{k|k} \in \mathbb{R}^n$ de J é a *estimativa de estados* ótima.

2.2 Filtro de Kalman

Assuma que f e h sejam funções lineares. Dessa forma, (1) e (2) podem ser, respectivamente, reescritas como

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (4)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (5)$$

em que $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $G_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, e $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são conhecidas. Também assuma que, para todo $k \geq 1$, w_{k-1} e v_k são vetores aleatórios brancos, Gaussianos, de média nula, mutuamente independentes, e com covariâncias conhecidas dadas por Q_{k-1} e R_k , respectivamente. Além disso, assuma que vetor aleatório x_0 é Gaussiano com média $\hat{x}_{0|0}$ e covariância $P_{0|0}^{xx} \triangleq E[(x_0 - \hat{x}_{0|0})(x_0 - \hat{x}_{0|0})^T]$, ambas conhecidas.

Nesse caso, $\hat{x}_{k|k}$ é dada pelo KF, cuja etapa de *predição* é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \quad (6)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}^{xx}A_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T \quad (7)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = C_k \hat{x}_{k|k-1}, \quad (8)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = C_k P_{k|k-1}^{xx} C_k^T + R_k, \quad (9)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} C_k^T, \quad (10)$$

em que $P_{k|k-1}^{xx} \triangleq E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T]$, $P_{k|k-1}^{yy} \triangleq E[(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$, e $P_{k|k-1}^{xy} \triangleq E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$, e cuja etapa de *assimilação de dados* é dada por

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1}, \quad (11)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}), \quad (12)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T, \quad (13)$$

em que $P_{k|k}^{xx} \triangleq E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T]$ é a *covariância do erro de estimação* e $K_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz do ganho de Kalman. A notação $\hat{x}_{k|l}$ indica uma estimativa de x_k no tempo k baseada em informação disponível até e incluindo o tempo l . Além disso, $\hat{x}_{j,k|k}$ é o j -ésimo elemento do vetor $\hat{x}_{k|k}$, enquanto $P_{(i,j),k|k}^{xx}$ é o elemento (i,j) da matriz $P_{k|k}^{xx}$.

A informação do modelo matemático em (4) e (5) é usada na etapa de *predição*, ao passo que os dados medidos são injeta-

dos nas estimativas de estado durante a etapa de assimilação de dados.

2.3 Filtragem de Kalman para Sistemas Não-Lineares

Para sistemas não-lineares (1)-(2), a solução para o problema de estimação de estados é complicada devido ao fato de $\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k))$ não ser completamente caracterizada por sua média $\hat{x}_{k|k}$ e covariância $P_{k|k}^{xx}$ (Daum, 2005). Dessa maneira, aproximações baseadas no KF são investigadas neste artigo, especificamente, o EKF e o UKF. Para tal, o EKF e o UKF propagam somente aproximações para $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}^{xx}$ usando a média $\hat{x}_{0|0}$ e a covariância $P_{0|0}^{xx}$ do vetor aleatório x_0 com PDF $\rho(x_0)$, as quais são assumidamente conhecidas. Além disso, assume-se que o maximizador de J é próximo da aproximação da média $\hat{x}_{k|k}$. Assume-se ainda que o ruído de processo w_{k-1} com PDF $\rho(w_{k-1})$ e o ruído de medição v_k com PDF $\rho(v_k)$ tenham médias nulas e covariâncias conhecidas Q_{k-1} e R_k , respectivamente. Também, assume-se que, para todo $k \geq 1$, w_{k-1} , v_k , e x_0 são mutuamente independentes.

2.3.1 Filtro de Kalman Estendido

O cerne do EKF está na linearização analítica ou numérica de (1)-(2) para, então, empregar as equações do KF. Assim, a etapa de predição do EKF é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1), \quad (14)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \hat{A}_{k-1} P_{k-1|k-1}^{xx} \hat{A}_{k-1}^T + \hat{G}_{k-1} Q_{k-1} \hat{G}_{k-1}^T, \quad (15)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}, k), \quad (16)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = \hat{C}_k P_{k|k-1}^{xx} \hat{C}_k^T + R_k, \quad (17)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} \hat{C}_k^T, \quad (18)$$

em que as matrizes Jacobianas de f e h são avaliadas nas estimativas de estado mais recentes como

$$\hat{A}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1}, \quad (19)$$

$$\hat{G}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial w_{k-1}} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1}, \quad (20)$$

$$\hat{C}_k \triangleq \left. \frac{\partial h}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}, k}, \quad (21)$$

enquanto a etapa de assimilação de dados é dada por (11)-(13).

2.3.2 Filtro de Kalman Unscented

No lugar de linearizar analiticamente ou numericamente (1)-(2) e usar (6)-(13), o UKF emprega a transformação *unscented* (UT) (Julier et al., 2000), a qual aproxima a média $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^m$ e a covariância $P_k^{yy} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ do vetor aleatório y_k obtido pela transformação não-linear $y_k = h(x_k)$, em que x_k tem média $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ e covariância $P_k^{xx} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ assumidamente conhecidas. A UT é baseada em um conjunto de vetores escolhidos deterministicamente $\mathcal{X}_{j,k} \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, \dots, 2n$, os quais são conhecidos como *pontos sigma*. Para satisfazer

$$\sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \mathcal{X}_{j,k} = \hat{x}_k \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\mathcal{X}_{j,k} - \hat{x}_k][\mathcal{X}_{j,k} - \hat{x}_k]^T = P_k^{xx} \quad (22)$$

com vetor de pesos $\gamma \in \mathbb{R}^{2n+1}$, cujos elementos são dados por

$$\gamma_0 \triangleq \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad \gamma_j \triangleq \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (23)$$

satisfazendo $\sum_{j=0}^{2n} \gamma_j = 1$, a matriz de pontos sigma $\mathcal{X}_k \triangleq$

$$[\mathcal{X}_{0,k} \quad \mathcal{X}_{1,k} \quad \dots \quad \mathcal{X}_{2n,k}] \in \mathbb{R}^{n \times (2n+1)} \text{ é escolhida como} \quad \mathcal{X}_k = \hat{x}_k \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} + \sqrt{n + \lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} & (P_k^{xx})^{1/2} & - (P_k^{xx})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

em que $(\cdot)^{1/2}$ denota a raiz quadrada matricial, a qual pode ser obtida pela fatoração de Cholesky, $\lambda > -n$ determina o espalhamento dos pontos sigma (Julier & Uhlmann, 2004; Arasaratnam & Haykin, 2009), e $\mathbf{1}_{1 \times (2n+1)}$ é uma matriz em $\mathbb{R}^{1 \times (2n+1)}$ com elementos iguais a 1. Por simplicidade de notação, as equações (23)-(24) serão referidas como

$$[\gamma, \mathcal{X}_k] = \Psi_{UT}(\hat{x}_k, P_k^{xx}, n, \lambda). \quad (25)$$

Em vez de propagar a média e a covariância pelo modelo linearizado, como faz o EKF, no UKF, propaga-se cada ponto sigma por h , produzindo $\mathcal{Y}_{j,k} = h(\mathcal{X}_{j,k})$, $j = 0, \dots, 2n$, tal que

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \mathcal{Y}_{j,k} \quad \text{e} \quad P_k^{yy} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\mathcal{Y}_{j,k} - \hat{y}_k][\mathcal{Y}_{j,k} - \hat{y}_k]^T.$$

Maneiras alternativas de escolher pontos sigma são revisadas em (Julier & Uhlmann, 2004; Arasaratnam & Haykin, 2009).

Considere o vetor aumentado

$$\tilde{x}_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ w_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

em que $\tilde{x}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ e $\tilde{n} \triangleq n + q$, com covariância

$$P_{k-1|k-1}^{\tilde{x}\tilde{x}} \triangleq \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1}^{xx} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & Q_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

A etapa de predição do UKF é dada por

$$[\gamma, \mathcal{X}_{k-1|k-1}] = \Psi_{\text{UT}} \left(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}^{\tilde{x}\tilde{x}}, \tilde{n}, \lambda \right), \quad (28)$$

$$\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x = f(\mathcal{X}_{j,k-1|k-1}^x, u_{k-1}, \mathcal{X}_{j,k-1|k-1}^w, k-1), \quad j = 0, \dots, 2\tilde{n}, \quad (29)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_j \mathcal{X}_{j,k|k-1}^x, \quad (30)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_j [\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1}] \cdot [\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1}]^T, \quad (31)$$

$$\mathcal{Y}_{j,k|k-1} = h(\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x, k), \quad j = 0, \dots, 2\tilde{n}, \quad (32)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_j \mathcal{Y}_{j,k|k-1}, \quad (33)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_j [\mathcal{Y}_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1}] \cdot [\mathcal{Y}_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1}]^T + R_k, \quad (34)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_j [\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1}] \cdot [\mathcal{Y}_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1}]^T, \quad (35)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-1|k-1}^x \\ \mathcal{X}_{k-1|k-1}^w \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{X}_{k-1|k-1}, \quad (36)$$

$\mathcal{X}_{k-1|k-1}^x \in \mathbb{R}^{n \times (2\tilde{n}+1)}$, e $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^w \in \mathbb{R}^{q \times (2\tilde{n}+1)}$, e a etapa de assimilação de dados é dada por (11)-(13).

3 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS COM RESTRIÇÕES: REVISÃO

3.1 Formulação do Problema

Seja o sistema dinâmico modelado por (1)-(2). Considere agora que o vetor de estados x_k esteja sujeito à restrição de igualdade

$$g(x_k, k-1) = d_{k-1}, \quad (37)$$

e/ou à restrição de desigualdade

$$l(x_k, k-1) \leq e_{k-1}, \quad (38)$$

em que se assumem conhecidos $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $d_{k-1} \in \mathbb{R}^s$, $l: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^t$ e $e_{k-1} \in \mathbb{R}^t$. O maximizador $\hat{x}_{k|k}$ de (3) sujeito a (37) e/ou (38) é a *estimativa de estado restrita* ótima.

Assim como a existência de não-linearidades no sistema, a necessidade de satisfazer restrições também aumenta a dificuldade em solucionar o problema de estimação de estados ótima (Rao et al., 2001; Ko & Bitmead, 2007; Teixeira et al., 2009a). Assim, neste trabalho, são estudados algoritmos sub-ótimos baseados no EKF e no UKF que produzem estimativas de estado satisfazendo (aproximadamente) (37) e/ou (38). Além disso, são apresentados métodos para sistemas com restrições intervalares

$$a_k \leq x_k \leq b_k, \quad (39)$$

em que $a_{i,k} < b_{i,k}$, $i = 1, \dots, n$. Note que (39) é um caso especial de (38).

3.2 Algoritmos

3.2.1 Abordagem das Medições Aumentadas

O filtro de Kalman estendido com medições aumentadas (MAEKF) (Alouani & Blair, 1993) é o algoritmo mais empregado para reforçar restrições de igualdade (37) de forma aproximada. Para tal, o MAEKF utiliza o modelo de observação aumentado

$$\tilde{y}_k = \tilde{h}(x_k, k) + \tilde{v}_k, \quad (40)$$

no lugar de (2) em (16)-(18), (21), em que

$$\tilde{h}(x_k, k) \triangleq \begin{bmatrix} h(x_k, k) \\ g(x_k, k-1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}_k \triangleq \begin{bmatrix} y_k \\ d_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{v}_k \triangleq \begin{bmatrix} v_k \\ 0_{s \times 1} \end{bmatrix}.$$

Em (17), R_k é substituída por

$$\tilde{R}_k = \begin{bmatrix} R_k & 0_{m \times s} \\ 0_{s \times m} & \delta R_k \end{bmatrix}, \quad (41)$$

em que $\delta R_k \triangleq \varepsilon_r I_{s \times s}$ e $\varepsilon_r > 0$ é um número pequeno comparado aos elementos de R_k . Para fins de implementação computacional, geralmente escolhe-se $10^{-15} \leq \varepsilon_r \leq 10^{-9}$ para contornar problemas de mau condicionamento numérico relacionados à inversão de $P_{k|k-1}^{yy}$ em (11). O MAEKF é ilustrado na Figura 1a. Note que o MAEKF reforça a versão linearizada da restrição de igualdade (37) e, portanto, não

garante que (37) seja exatamente satisfeita por $\hat{x}_{k|k}$, exceto quando g é uma função linear (Maybeck, 1979). De Geeter e colaboradores (1997) propõem um algoritmo iterativo capaz de melhorar a acurácia do MAEKF na satisfação de restrições não-lineares de igualdade.

3.2.2 Abordagem de Projeção da Estimativa

A abordagem de projeção da estimativa propõe que a estimativa $\hat{x}_{k|k}$ obtida na etapa de assimilação de dados em (12) seja projetada na hipersuperfície definida por (37). Semelhante ao MAEKF, o filtro de Kalman estendido projetado (PEKF) (Simon & Chia, 2002) impõe a restrição de igualdade linearizada

$$\hat{D}_{k-1}x_k = \hat{d}_{k-1}, \quad (42)$$

em que

$$\hat{D}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}, k-1}, \quad (43)$$

$$\hat{d}_{k-1} \triangleq d_{k-1} + \hat{D}_{k-1}\hat{x}_{k|k} - g(\hat{x}_{k|k}, k-1), \quad (44)$$

para a qual a linearização é feita em torno da estimativa de estado mais recente dada por $\hat{x}_{k|k}$ (12). Usando (42), a etapa de *projeção* do PEKF é dada por

$$\hat{d}_{k-1|k} = g(\hat{x}_{k|k}, k-1), \quad (45)$$

$$P_{k|k}^{dd} = \hat{D}_{k-1}W_k\hat{D}_{k-1}^T + \delta R_k, \quad (46)$$

$$P_{k|k}^{xd} = W_k\hat{D}_{k-1}^T, \quad (47)$$

$$K_k^P = P_{k|k}^{xd}(P_{k|k}^{dd})^{-1}, \quad (48)$$

$$\hat{x}_{k|k}^P = \hat{x}_{k|k} + K_k^P(d_{k-1} - \hat{d}_{k-1|k}), \quad (49)$$

$$P_{k|k}^{xxP} = P_{k|k}^{xx} - K_k^P(P_{k|k}^{dd})(K_k^P)^T, \quad (50)$$

em que W_k é uma matriz de ponderação positiva definida. Em (Simon & Chia, 2002), recomenda-se escolher $W_k = P_{k|k}^{xx}$, em que $P_{k|k}^{xx}$ é dada por (13). Note que δR_k é usado em (46) para contornar problemas de condicionamento numérico em (48). Assim, o PEKF é formado pelas etapas de predição (14)-(18), assimilação de dados (11)-(13), e projeção (45)-(50). É importante esclarecer que a estimativa projetada $\hat{x}_{k|k}^P$ não é utilizada na etapa de predição da iteração seguinte em (14) (Simon & Chia, 2002); veja Figura 1b.

O PEKF pode ser modificado para impor restrições de desigualdade (38) além de (37) (Simon & Simon, 2006). Nesse caso, em vez de usar (45)-(50), o seguinte problema de programação quadrática com restrições é resolvido

$$\hat{x}_{k|k}^P = \arg \min_{\{x_k: g(x_k, k-1)=d_{k-1}, l(x_k, k-1) \leq e_{k-1}\}} J_p(x_k), \quad (51)$$

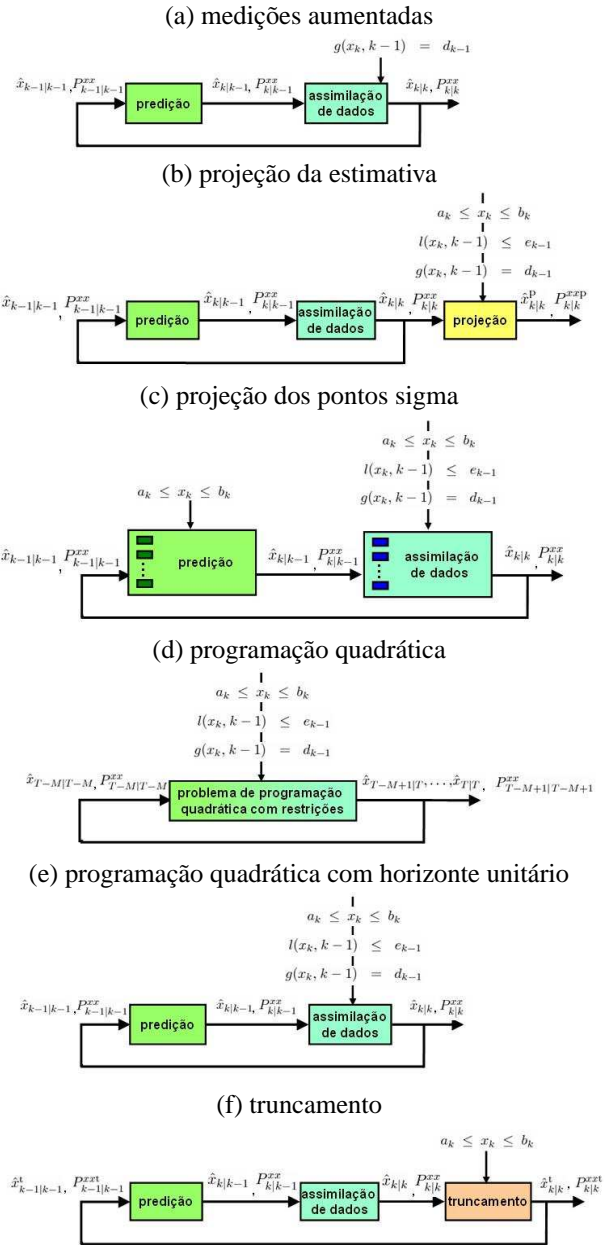


Figura 1: Diagrama comparativo dos métodos de (a) medições aumentadas (MAEKF), (b) projeção da estimativa (PEKF), (c) projeção dos pontos sigma (SIUKF), (d) programação quadrática (MHE), (e) caso especial de programação quadrática com horizonte unitário (CEKF), e (f) truncamento (TEKF). Ao contrário da etapa de projeção do PEKF, a etapa de truncamento do TEKF é conectada à etapa de predição por realimentação recursiva. Além disso, ao contrário da etapa de assimilação de dados do CEKF, a etapa de assimilação de dados do MAEKF incorpora a informação da restrição na covariância além da estimativa de estado.

em que

$$J_p(x_k) \triangleq (x_k - \hat{x}_{k|k})^T W_k^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k}). \quad (52)$$

Note que (45)-(50) minimiza a função de custo (52) sujeita a (42).

No caso linear, métodos de projeção do sistema (Ko & Bitmead, 2007) e projeção do ganho de Kalman (Gupta & Hauser, 2007; Teixeira et al., 2008b) também são considerados na literatura.

3.2.3 Abordagem de Projeção dos Pontos Sigma

No contexto de filtragem *unscented*, são apresentados na literatura dois algoritmos que se baseiam na projeção dos pontos sigma na hipersuperfície definida pela restrição no lugar da projeção da estimativa de estado propriamente dita. São eles: o filtro de Kalman *unscented* projetado de duas etapas (TPUKF) (Julier & LaViola Jr., 2007), o qual é proposto exclusivamente no contexto de restrições de igualdade (37), e o filtro de Kalman *unscented* intervalar de pontos sigma (SIUKF)² (Vachhani et al., 2006), o qual é proposto no contexto de restrições intervalares (39) na etapa de predição e restrições de igualdade (37) e desigualdade (38) na etapa de assimilação de dados. Ambos TPUKF e SIUKF reforçam a informação adicional provida pelas restrições em duas etapas. Por serem mais gerais, apenas as equações do SIUKF são apresentadas neste artigo.

Na etapa de predição, o SIUKF utiliza a transformação *unscented* com restrições intervalares (ICUT) no lugar da UT (25) do UKF. Considere a transformação não-linear h estudada na Seção 2.3.2. A fim de satisfazer

$$a_k \leq \mathcal{X}_{j,k} \leq b_k, \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (53)$$

A ICUT gera a matriz de pontos sigma \mathcal{X}_k como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_k &= \hat{x}_k \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} \\ &+ \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & \theta_{1,k} \text{col}_1[(P_k^{xx})^{1/2}] & \dots & \theta_{n,k} \text{col}_n[(P_k^{xx})^{1/2}] \\ -\theta_{n+1,k} \text{col}_{n+1}[(P_k^{xx})^{1/2}] & \dots & -\theta_{2n,k} \text{col}_{2n}[(P_k^{xx})^{1/2}] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (54)$$

em que, para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, 2n$,

$$\theta_{j,k} \triangleq \min(\text{col}_j(\Theta)), \quad (55)$$

$$\Theta_{(i,j)} \triangleq \begin{cases} \sqrt{n+\lambda}, & \text{se } S_{(i,j)} = 0, \\ \min\left(\sqrt{n+\lambda}, \frac{b_{i,k} - \hat{x}_{i,k}}{S_{(i,j)}}\right), & \text{se } S_{(i,j)} > 0, \\ \min\left(\sqrt{n+\lambda}, \frac{a_{i,k} - \hat{x}_{i,k}}{S_{(i,j)}}\right), & \text{se } S_{(i,j)} < 0, \end{cases} \quad (56)$$

²SIUKF é chamado de reconciliador de dados recursivo *unscented* de sistemas dinâmicos não-lineares (URNDDR) em (Vachhani et al., 2006).

$$S \triangleq \begin{bmatrix} (P_k^{xx})^{1/2} & -(P_k^{xx})^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

com vetor de pesos $\gamma_k \in \mathbb{R}^{2n+1}$, para $j = 1, \dots, 2n$,

$$\gamma_{0,k} \triangleq \beta_k, \quad \gamma_{j,k} \triangleq \alpha_k \theta_{j,k} + \beta_k \quad (58)$$

satisfazendo $\sum_{j=0}^{2n} \gamma_{j,k} = 1$, em que

$$\alpha_k \triangleq \frac{2\lambda - 1}{2(n+\lambda) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{j,k} - (2n+1)\sqrt{n+\lambda} \right)}, \quad (59)$$

$$\beta_k \triangleq \frac{1}{2(n+\lambda)} - \frac{2\lambda - 1}{(2\sqrt{n+\lambda}) \left(\sum_{j=1}^n \theta_{j,k} - (2n+1)\sqrt{n+\lambda} \right)}. \quad (60)$$

Por simplicidade, as equações (54)-(60) serão referidas como

$$[\gamma_k, \mathcal{X}_k] = \Psi_{\text{ICUT}}(\hat{x}_k, P_k^{xx}, n, a_k, b_k, \lambda). \quad (61)$$

Note que no caso particular em que $a_{i,k} \rightarrow -\infty$ e $b_{i,k} \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, n$, a ICUT se reduz à UT (25), pois $\theta_{j,k} = \sqrt{n+\lambda}$ para todo instante $k \geq 1$ e $j = 1, \dots, 2n$. A Figura 2 ilustra como os pontos sigma da ICUT são escolhidos em comparação à UT. Observe que, sempre que um ponto sigma viola (53), tal ponto sigma é projetado no limite mais próximo $\mathcal{X}_{j,k} = a_k$ ou $\mathcal{X}_{j,k} = b_k$. Essa idéia também é empregada pelo TPUKF para impor restrições de igualdade (37) e, analogamente, poderia ser estendida para reforçar restrições de desigualdade (38). Usando o procedimento de projeção, ao contrário da UT, os pontos sigma gerados por (54) não são necessariamente simétricos em torno de \hat{x}_k tal que sua média ponderada e covariância ponderada podem não ser, respectivamente, iguais a \hat{x}_k e P_k^{xx} como em (22).

A etapa de predição do SIUKF é dada por

$$[\gamma_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1|k-1}] = \Psi_{\text{ICUT}}\left(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}^{\hat{x}\hat{x}}, \tilde{n}, a_k, b_k, \lambda\right), \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{j,k|k-1} &= f(\mathcal{X}_{j,k-1|k-1}^x, u_{k-1}, \\ &\mathcal{X}_{j,k-1|k-1}^w, k-1), \quad j = 0, \dots, 2\tilde{n}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_{j,k-1} \mathcal{X}_{j,k|k-1}^x, \quad (64)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_{j,k-1} [\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1}] \cdot [\mathcal{X}_{j,k|k-1}^x - \hat{x}_{k|k-1}]^T, \quad (65)$$

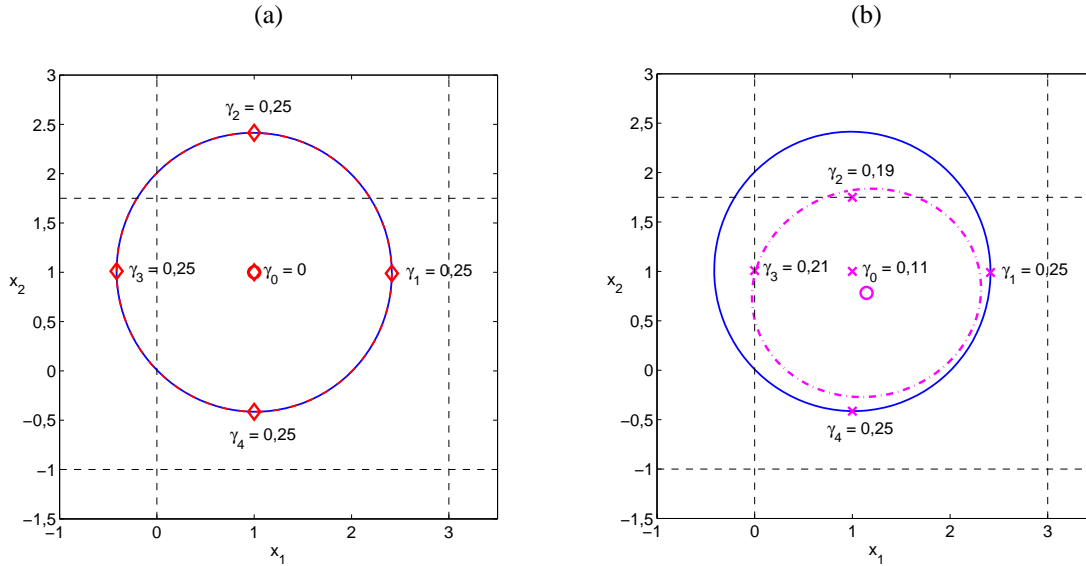


Figura 2: Pontos sigma gerados pela (a) UT (\diamond) em comparação aos pontos sigma gerados pela (b) ICUT (\times) e pesos correspondentes para o exemplo no qual $x_k \in \mathbb{R}^2$, $\hat{x}_k = [1 \ 1]^T$, $P_k^{xx} = I_{2 \times 2}$, $a_k = [0 \ -1]^T$, $b_k = [3 \ 1,75]^T$, e $\lambda = 0$. O círculo (\circ) representa a média ponderada dos pontos sigma, a linha ponto-tracejada ($-\cdot-$) refere-se a covariância correspondente, e a linha contínua ($—$) é a covariância verdadeira. Para a UT, essas linhas se sobrepõem.

em que \tilde{x}_{k-1} e $P_{k-1|k-1}^{\tilde{x}}$ são dados por (26) e (27), respectivamente, e $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$ é particionado como em (36). A etapa de assimilação de dados do SIUKF é dada por

$$\hat{\mathcal{X}}_{j,k|k}^x = \arg \min_{\{\mathcal{X}_{j,k}^x: g(\mathcal{X}_{j,k}^x, k-1)=d_{k-1}, l(\mathcal{X}_{j,k}^x, k-1) \leq c_{k-1}\}} J_{\text{sp}}(\mathcal{X}_{j,k}^x), \quad j = 0, \dots, 2\tilde{n}, \quad (66)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_{j,k-1} \hat{\mathcal{X}}_{j,k|k}^x, \quad (67)$$

$$P_{k|k}^{xx} = \sum_{j=0}^{2\tilde{n}} \gamma_{j,k-1} \left[\hat{\mathcal{X}}_{j,k|k}^x - \hat{x}_{k|k} \right] \left[\hat{\mathcal{X}}_{j,k|k}^x - \hat{x}_{k|k} \right]^T, \quad (68)$$

em que

$$J_{\text{sp}}(\mathcal{X}_{j,k}^x) \triangleq \left[(y_k - h(\mathcal{X}_{j,k}^x, k))^T R_k^{-1} (y_k - h(\mathcal{X}_{j,k}^x, k)) + (\mathcal{X}_{j,k}^x - \mathcal{X}_{j,k|k-1}^x)^T (P_{k|k-1}^{xx})^{-1} (\mathcal{X}_{j,k}^x - \mathcal{X}_{j,k|k-1}^x) \right],$$

e cada coluna de $\hat{\mathcal{X}}_{k|k}^x \triangleq [\hat{\mathcal{X}}_{0,k|k}^x \ \hat{\mathcal{X}}_{1,k|k}^x \ \dots \ \hat{\mathcal{X}}_{2n,k|k}^x] \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times (2\tilde{n}+1)}$ é a solução do problema de otimização (66). O SIUKF é ilustrado na Figura 1c.

Note que o SIUKF reforça (39) na etapa de predição em (56) e reforça (37)-(39) na etapa assimilação de dados em (66). Portanto, não somente $\hat{x}_{k|k-1}$ e $\hat{x}_{k|k}$ como também $P_{k|k-1}^{xx}$ e $P_{k|k}^{xx}$ assimilam a informação das restrições.

3.2.4 Abordagem de Programação Quadrática

Ao contrário dos algoritmos recursivos revisados nas Seções 3.2.1, 3.2.2, e 3.2.3, o estimador de horizonte móvel (MHE) (Rao et al., 2001) resolve um problema de programação quadrática com restrições para o horizonte móvel $[k-M+1, k]$, em que k é o instante presente e $M \geq 1$ é o tamanho do horizonte. Mesmo no caso linear, o MHE é um estimador sub-ótimo (Rao et al., 2001; Rao et al., 2003). Para o caso não-linear, aproximações baseadas nos algoritmos MHE e EKF podem usadas (Rao et al., 2003).

Por simplicidade, assuma que (1) seja aproximada por

$$x_k = \bar{f}(x_{k-1}, u_{k-1}, k-1) + \bar{G}_{k-1} w_{k-1}, \quad (69)$$

em que

$$\bar{G}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial w_{k-1}} \right|_{\hat{x}_{T-1|T-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1} \quad (70)$$

e $\hat{x}_{T-1|T-1}$ é a estimativa de estado mais recente dada pelo MHE como mostrado a seguir. O MHE é um estimador de única etapa que, para o horizonte móvel $k = T - M + 1, \dots, T$, em que T é o instante de tempo presente, soluci-

ona o problema de programação quadrática dado por

$$\begin{aligned} \hat{x}_{T-M+1|T}, \dots, \hat{x}_{T|T} = \\ \arg \min \Phi_{\text{mhe}}(x_{T-M+1}, \dots, x_T), \\ \{x_k : g(x_k, k-1) = d_{k-1}, l(x_k, k-1) \leq e_{k-1}\} \end{aligned} \quad (71)$$

em que o funcional de custo Φ_{mhe} é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mhe}}(x_{T-M+1}, \dots, x_T) \triangleq & \mathcal{Z}_{T-M}(x_{T-M}) \\ & + \sum_{k=T-M+1}^T \left[(y_k - h(x_k, k))^T R_k^{-1} (y_k - h(x_k, k)) \right. \\ & \left. + (x_k - \bar{f}(x_{k-1}, u_{k-1}, k-1))^T (\bar{G}_{k-1} Q_{k-1} \bar{G}_{k-1}^T)^{-1} \right. \\ & \left. (x_k - \bar{f}(x_{k-1}, u_{k-1}, k-1)) \right], \end{aligned} \quad (72)$$

com custo de chegada $\mathcal{Z}_{T-M}(x_{T-M})$ aproximado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Z}}_{T-M}(x_{T-M}) = (x_{T-M} - \hat{x}_{T-M|T-M})^T \\ (P_{T-M|T-M}^{xx})^{-1} (x_{T-M} - \hat{x}_{T-M|T-M}), \end{aligned} \quad (73)$$

em que $P_{T-M|T-M}^{xx}$ é obtido usando as equações do EKF (15), (17)-(18), (11), (13). Observe em (71)-(72) que o MHE utiliza as M medições y_{T-M+1}, \dots, y_T para produzir estimativas de estado $\hat{x}_{T-M+1|T}, \dots, \hat{x}_{T|T}$ na janela de tempo $[T-M+1, T]$. O MHE é ilustrado na Figura 1d.

O tamanho do horizonte M é escolhido considerando a relação de compromisso entre a acurácia das estimativas e o custo computacional. Se $M = 1$, então é obtido como caso especial o filtro de Kalman estendido com restrições (CEKF) (Marcon, Trieiweiler & Secchi, 2002; Rao et al., 2003; Vachhani et al., 2006), cuja etapa de predição é dada por (14)-(15), (17)-(18) e cuja etapa de assimilação de dados é dada por

$$\hat{x}_{k|k} = \arg \min_{\{x_k : g(x_k, k-1)=d_{k-1}, l(x_k, k-1) \leq e_{k-1}\}} J_{\text{cekf}}(x_k), \quad (74)$$

junto com (11) e (13), em que

$$\begin{aligned} J_{\text{cekf}}(x_k) \triangleq & (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T (P_{k|k-1}^{xx})^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ & + (y_k - h(x_k, k))^T R_k^{-1} (y_k - h(x_k, k)). \end{aligned} \quad (75)$$

O CEKF é ilustrado na Figura 1. Note que, sob as premissas de ruído Gaussiano e modelo linear, maximizar (3) é equivalente a minimizar (75) (Teixeira et al., 2009a, Lemma 4.1). Detalhes sobre a implementação computacional do MHE e do CEKF são fornecidos em (Rao et al., 2001; Rao et al., 2003) e em suas referências.

3.2.5 Abordagem de Truncamento da PDF

Sejam $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}^{xx}$, dados por (12) e (13) respectivamente, as aproximações para a média e covariância de $\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k))$ obtidas usando o EKF ou o UKF. Objetiva-se truncar $\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k))$ nas n bordas dadas pelas restrições intervalares (39), produzindo a média truncada $\hat{x}_{k|k}^t$ com covariância $P_{k|k}^{xxt}$. Esse procedimento é chamado de *truncamento da PDF* (Simon, 2006) e é revisado no Apêndice A. Por exemplo, considere o caso no qual, embora $\hat{x}_{k|k} = [1 \ 1]^T$ satisfaça a restrição intervalar (39) com parâmetros $a_k = [0 \ -1]^T$ e $b_k = [3 \ 1,75]^T$, $P_{k|k}^{xx} = I_{2 \times 2}$ tenha área significativa fora da região delimitada por (39); conforme mostra a linha contínua da Figura 3. Assim, $\hat{x}_{k|k}^t = [1,23 \ 0,67]^T$ é obtido pelo deslocamento de $\hat{x}_{k|k}$ em direção ao centroide da PDF truncada e $P_{k|k}^{xxt} = \text{diag}(0,52, 0,45)$ é obtido pela redução de incerteza em $P_{k|k}^{xx}$ devido à informação a priori fornecida por (39).

O filtro de Kalman estendido truncado (TEKF) (Simon, 2006) é obtido pela combinação das equações do EKF com o procedimento de truncamento descrito acima. Ou seja, o TEKF é um estimador de três etapas, cuja etapa de predição é dada por (14)-(18), em que $\hat{x}_{k-1|k-1}$ e $P_{k-1|k-1}^{xx}$ são substituídas por $\hat{x}_{k-1|k-1}^t$ e $P_{k-1|k-1}^{xxt}$ em (14) e (15), respectivamente, cuja etapa de assimilação de dados é dada por (11)-(13), e cuja etapa de *truncamento* é dada por (106); veja

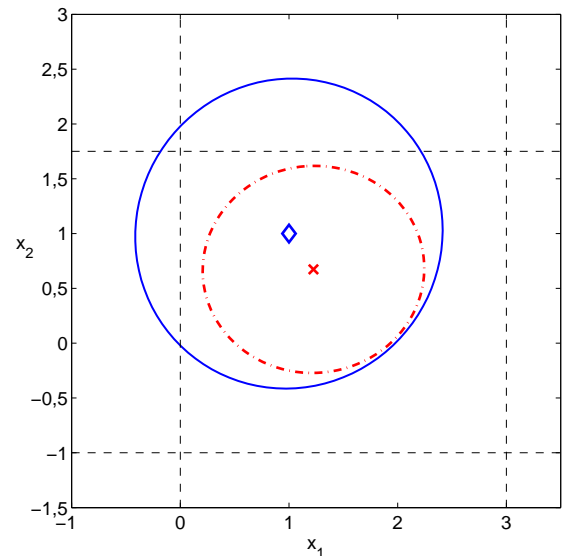


Figura 3: A estimativa sem restrições $\hat{x}_{k|k}$ (\diamond) satisfazendo a restrição intervalar (39) (---) e sua covariância $P_{k|k}^{xx}$ (—) com área significativa fora de (39), em comparação com a estimativa truncada $\hat{x}_{k|k}^t$ (\times) e covariância $P_{k|k}^{xxt}$ (- · -).

o Apêndice A. O TEKF é ilustrado na Figura 1f.

Note que, ao contrário dos algoritmos PEKF, CEKF, e MHE, o estimador TEKF assimila a informação de restrição intervalar tanto na estimativa de estado $\hat{x}_{k|k}^t$ quanto na sua covariância $P_{k|k}^{xxt}$. Além disso, a abordagem de truncamento não requer a solução numérica de um problema de otimização. A abordagem de truncamento da PDF também pode ser usada para impor restrições lineares de igualdade na etapa de truncamento (Simon, 2006).

4 NOVOS RESULTADOS EM FILTRAGEM DE KALMAN UNSCENTED COM RESTRIÇÕES

Nesta seção, são apresentados algoritmos de filtragem de Kalman não-linear com restrições baseados no UKF, o qual, conforme discutido na Seção 1, apresenta desempenho semelhante ou superior comparado ao EKF, sem a necessidade de cálculo de matrizes Jacobianas. Tais algoritmos compreendem a versão *unscented* dos algoritmos revistos na Seção 3.2.

4.1 Abordagem das Medições Aumentadas

O filtro de Kalman *unscented* com medições aumentadas (MAUKF) (Teixeira et al., 2009a) é a extensão *unscented* do MAEKF (Seção 3.2.1).

O MAUKF é um estimador de duas etapas que, a fim de reforçar a restrição de igualdade (37), utiliza o modelo de observação aumentado \tilde{h} (40) no lugar de h em (32) e substitui R_k por \tilde{R}_k (41) em (34). O diagrama da Figura 1a também ilustra a estrutura do MAUKF. Semelhante ao MAEKF, o MAUKF não garante que (37) seja exatamente satisfeita pela estimativa de estado $\hat{x}_{k|k}$.

4.2 Abordagem de Projeção da Estimativa

Objetivando impor exclusivamente restrições de igualdade (37), as equações de projeção (45)-(50) do PEKF são agora estendidas para a abordagem *unscented*. Para tal, são escolhidos pontos sigma e pesos associados como

$$[\gamma, \mathcal{X}_{k|k}^x] = \Psi_{UT}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}^{xx}, n, \lambda), \quad (76)$$

em que Ψ_{UT} é dado por (25) e $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}^{xx}$ são obtidos na etapa de assimilação de dados (11)-(13). Os pontos sigma $\mathcal{X}_{j,k|k}^x \in \mathbb{R}^n, j = 0, \dots, 2n$, são propagados por (37), produzindo

$$\mathcal{D}_{j,k|k} = g(\mathcal{X}_{j,k|k}^x, k-1), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (77)$$

tal que $\hat{d}_{k-1|k}$, $P_{k|k}^{dd}$, e $P_{k|k}^{xd}$ são dados por

$$\hat{d}_{k-1|k} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \mathcal{D}_{j,k|k}, \quad (78)$$

$$P_{k|k}^{dd} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\mathcal{D}_{j,k|k} - \hat{d}_{k-1|k}] [\mathcal{D}_{j,k|k} - \hat{d}_{k-1|k}]^T + \delta R_k, \quad (79)$$

$$P_{k|k}^{xd} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j [\mathcal{X}_{j,k|k}^x - \hat{x}_{k|k}] [\mathcal{D}_{j,k|k} - \hat{d}_{k-1|k}]^T, \quad (80)$$

em que δR_k é definido como discutido na Seção 3.2.1, e K_k^p , $\hat{x}_{k|k}^p$, e $P_{k|k}^{xpp}$ são dados por (48), (49), e (50), respectivamente. Note que, embora (76)-(80), diferente do PEKF, empregue a restrição de igualdade não-linear, tal procedimento não garante que (37) seja exatamente satisfeita.

Anexando a etapa de projeção (76)-(80), (48)-(50) ao UKF (28)-(35), (11)-(13) sem realimentação recursiva (conforme mostra a Figura 1b), é obtido o filtro de Kalman *unscented* projetado (PUKF) (Teixeira et al., 2009a).

Se a etapa de projeção (76)-(80), (48)-(50) for anexada ao UKF por realimentação recursiva, então é obtido o filtro de Kalman *unscented* com restrições de igualdade (ECUKF) (Teixeira et al., 2009a). O ECUKF é ilustrado na Figura 4. As equações do PUKF e do ECUKF são apresentadas com detalhes em (Teixeira et al., 2009a).

A fim de reforçar restrições intervalares (39) além de restrições de igualdade (37), é possível combinar a etapa de predição do SIUKF dada por (62)-(65), (32)-(35) (com $\gamma_{j,k-1}$ substituindo γ_j), a qual faz uso da ICUT para reforçar restrições intervalares, com as etapas de assimilação de dados (11)-(13) e projeção (76)-(80), (48)-(50) do PUKF. Ao algoritmo resultante, dá-se o nome de filtro de Kalman *unscented* intervalar projetado (PIUKF) (Teixeira et al., 2009b).

O PUKF também pode ser modificado para impor restrições de desigualdade (38)-(39) (Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b). Para tal, em vez de usar (76)-(80), (48)-(50), emprega-se uma abordagem de programação quadrática, para a qual o problema de otimização com restrições

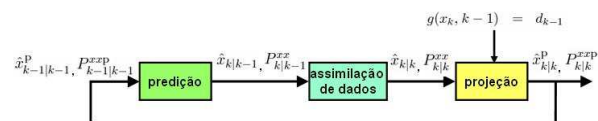


Figura 4: Diagrama do ECUKF. Ao contrário do PUKF (Figura 1b), a etapa de projeção do ECUKF é conectada por realimentação recursiva à etapa de predição.

(51) é resolvido. Nesse caso, as restrições de igualdade são satisfeitas com precisão numérica de máquina.

4.3 Abordagem de Projeção dos Pontos Sigma

Dois versões simplificadas do SIUKF (Seção 3.2.3) são agora apresentadas, a saber: o filtro de Kalman *unscented* intervalar (IUKF) e o filtro de Kalman *unscented* de pontos sigma (SUKF) (Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b).

O IUKF permite reforçar exclusivamente restrições intervalares (39) durante a etapa de predição. Para tal, a etapa de predição do IUKF é dada por (62)-(65), (32)-(35) (com $\gamma_{j,k-1}$ substituindo γ_j) e sua etapa de assimilação de dados é dada por (11)-(13). Ou seja, as equações de predição do SUKF são semelhantes às equações de predição do SIUKF, as quais usam a ICUT.

Por outro lado, o SUKF é usado para reforçar restrições de igualdade (37) e de desigualdade (38) em cada ponto sigma na etapa de assimilação de dados. Sua etapa de predição dada por (28)-(31) é semelhante à etapa de predição do UKF, enquanto sua etapa de assimilação de dados dada por (66)-(68) é igual à etapa de assimilação de dados do SIUKF.

Para o caso de restrições de igualdade usando o SUKF ou o SIUKF, observe que, embora cada ponto sigma $\hat{\mathcal{X}}_{j,k|k}^x$ satisfaça a restrição (37) em (66), não é possível garantir que a estimativa de estado $\hat{x}_{k|k}$ dada por (67) também satisfaça (37). Em (Julier & LaViola Jr., 2007), é apresentada uma discussão sobre as diferenças entre impor restrições de igualdade nos pontos sigma individualmente e as impor na estimativa de estado, a qual corresponde à média ponderada dos pontos sigma.

4.4 Abordagem de Programação Quadrática

O filtro de Kalman *unscented* com restrições (CUKF) (Teixeira et al., 2009a; Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b) é a modificação do CEKF baseada no UKF. O CUKF combina a UT na etapa de predição com a atualização com restrições por otimização do CEKF na etapa de assimilação de dados, durante a qual os três tipos de restrições (37)-(39) podem ser reforçadas apenas na estimativa de estado $\hat{x}_{k|k}$. Portanto, o CUKF é um estimador de duas etapas, cuja etapa de predição é dada por (28)-(35) e cuja etapa de assimilação de dados é dada por (74), (11), e (13).

Por outro lado, a fim de reforçar restrições intervalares (39) na etapa de predição, o filtro de Kalman *unscented* intervalar com restrições (CIUKF) (Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b) combina a ICUT do SIUKF na etapa de predição,

dada por (62)-(65), (32)-(35), com a etapa de atualização do CEKF, dada por (74), (11), e (13).

Observe que a etapa de assimilação de dados dos estimadores CUKF e CIUKF pode ser vista como uma versão simplificada da etapa de assimilação de dados do SIUKF, para a qual um único ponto sigma é propagado.

4.5 Abordagem de Truncamento da PDF

O filtro de Kalman *unscented* truncado (TUKF) (Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b) é a modificação do TEKF baseada no UKF. O TUKF é obtido anexando por realimentação recursiva o procedimento de truncamento da PDF (106) às equações do UKF (28)-(35), (11)-(13); veja a Figura 1f.

Note que o TUKF reforça a informação provida pelas restrições intervalares (39) apenas na etapa de truncamento. Combinando a ICUT do SIUKF com o procedimento de truncamento (106), é possível reforçar tal informação também na etapa de predição. Assim, obtém-se o filtro de Kalman *unscented* intervalar truncado (TIUKF) (Teixeira et al., 2008c; Teixeira et al., 2009b).

5 ALGORITMOS: RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS

Ao longo das Seções 3.2 e 4, os algoritmos revistos e apresentados são comparados com relação a sua estrutura. Tais algoritmos são classificados em cinco categorias de acordo com a abordagem utilizada para impor restrições, a saber: medições aumentadas, projeção da estimativa, projeção de pontos sigma, programação quadrática, e truncamento da PDF; veja as Figuras 1 e 4. A Tabela 1 resume a estrutura de cada algoritmo discutido neste trabalho, explicitando qual abordagem é usada em cada etapa (predição, assimilação de dados, e projeção ou truncamento). Os algoritmos das abordagens de projeção da estimativa e de truncamento são estimadores de três etapas, ao passo que os demais estimadores, com exceção do MHE que tem etapa única, são estimadores de duas etapas.

Note que alguns algoritmos podem ser classificados em mais de uma categoria. O SIUKF e o SUKF também podem ser classificados como métodos da abordagem de programação quadrática, pois, durante a etapa de assimilação de dados, $2n + 1$ problemas de otimização devem ser resolvidos numericamente. Semelhantemente, para o caso de sistemas com restrições de desigualdade (38)-(39), os algoritmos PEKF, PUKF, e PIUKF também podem ser categorizados como estimadores da abordagem de programação quadrática, pois, durante a etapa de projeção, um problema de otimização é resolvido numericamente por cada método. Além disso, por fazer uso da ICUT, os estimadores PIUKF, CIUKF, e TIUKF

Tabela 1: Comparação de estrutura de algoritmos de filtragem de Kalman não-linear sem e com restrições. São explicitados o procedimento usado na etapa de predição (por coluna) como também o tipo de mecanismo utilizado na etapa de assimilação de dados (por linha). Note que, para os algoritmos de três etapas, a terceira etapa (projeção ou truncamento) é classificada junto com a etapa de assimilação de dados. Dentro dos parênteses, é citada a seção na qual o algoritmo é revisado da literatura (*) ou apresentado pelos autores deste artigo.

assimilação de dados \ predição	Linearização	UT	ICUT
atualização clássica do KF	EKF* (2.3.1)	UKF* (2.3.2)	IUKF (4.3)
atualização com restrições por otimização	CEKF*/MHE* (3.2.4)	CUKF (4.4)	CIUKF (4.4)
atualização de pontos sigma com restrições	–	SUKF (4.3)	SIUKF* (3.2.3)
atualização clássica do KF mais projeção	PEKF* (3.2.2)	PUKF/ECUKF (4.2)	PIUKF (4.2)
atualização clássica do KF mais truncamento	TEKF* (3.2.5)	TUKF (4.5)	TIUKF (4.5)

Tabela 2: Resumo das características de algoritmos de filtragem de Kalman não-linear com restrições. É mostrado se a estimativa de estado e a covariância do erro de estimação assimilam a informação da restrição em cada etapa do algoritmo (predição, assimilação de dados, e projeção/truncamento) e em cada instante de tempo k . Além disso, é explicitado qual tipo de restrição cada algoritmo é capaz de tratar, a saber: igualdade \star ou \blackstar (37), desigualdade \blacksquare (38), e intervalar \square (39). \star indica que, se a restrição de igualdade é não-linear, então o método não garante que a estimativa de estado satisfaça exatamente a restrição, ao passo que \blackstar indica que a restrição não-linear é atendida com precisão numérica de máquina devido ao emprego de algum algoritmo de otimização. NA indica “não se aplica” devido à inexistência da etapa. Também é indicado o tamanho do problema de otimização com restrições (POR) que é resolvido em cada instante de tempo, em que n é a dimensão do vetor de estados e M é o tamanho do horizonte móvel. O símbolo * indica que é possível impor os três tipos de restrições (37)-(39) usando a abordagem de projeção da estimativa, somente se o problema de otimização (51) for usado no lugar da etapa de projeção dada por (45)-(50) no contexto do EKF ou (76)-(80), (48)-(50) no contexto *unscented*. Usando as últimas equações, é possível impor apenas (37) e de maneira aproximada \star .

Algoritmo	Seção	predição		assimilação de dados		projeção / truncamento		POR
		$\hat{x}_{k k-1}$	$P_{k k-1}^{xx}$	$\hat{x}_{k k}$	$P_{k k}^{xx}$	$\hat{x}_{k k}^{p/t}$	$P_{k k}^{xxp/t}$	
Abordagem das Medições Aumentadas								
MAEKF	3.2.1			\star	\star		NA	0
MAUKF	4.1			\star	\star		NA	0
Abordagem da Projeção da Estimativa								
PEKF*	3.2.2					\blackstar \blacksquare \square		1
PUKF*	4.2					\blackstar \blacksquare \square		1
PIUKF*	4.3	\square	\square			\blackstar \blacksquare \square		1
ECUKF	4.2					\star	\star	0
Abordagem da Projeção dos Pontos Sigma								
SIUKF	3.2.3	\square	\square	\star \blacksquare \square	\star \blacksquare \square		NA	$2n + 1$
SUKF	4.3			\star \blacksquare \square	\star \blacksquare \square		NA	$2n + 1$
IUKF	4.3	\square	\square				NA	0
Abordagem da Programação Quadrática								
MHE	3.2.4		NA	\blackstar \blacksquare \square			NA	M
CEKF	3.2.4			\blackstar \blacksquare \square			NA	1
CUKF	4.4			\blackstar \blacksquare \square			NA	1
CIUKF	4.4	\square	\square	\blackstar \blacksquare \square			NA	1
Abordagem de Truncamento da PDF								
TEKF	3.2.5					\square	\square	0
TUKF	4.5					\square	\square	0
TIUKF	4.5	\square	\square			\square	\square	0

também se enquadram na abordagem de projeção dos pontos sigma.

A Tabela 2 indica, para cada algoritmo, se a estimativa de estado e a correspondente covariância do erro de estimação são afetadas pela informação provida pelas restrições (37)-(39) em cada etapa do estimador. Além disso, é indicado na Tabela 2 o tamanho do problema de otimização que deve ser resolvido numericamente por cada método em cada instante de tempo k .

Observe na Tabela 2 que, para o caso de sistemas com restrições de igualdade (37), existem métodos sub-ótimos que não requerem o uso de pacotes numéricos de otimização, por exemplo: os métodos das abordagens de medições aumentadas e de projeção da estimativa. Para o cenário de sistemas com restrições de desigualdade (38)-(39), com exceção da abordagem de truncamento, todos os algoritmos são baseados na solução numérica de problemas de otimização. Tal observação é coerente com o fato de que o problema de estimação de estados com restrições de desigualdade é mais complicado do que o problema de estimação de estados com restrições de igualdade, já que para o primeiro, mesmo no caso linear, as hipóteses de ruído Gaussiano e existência de restrições de desigualdade são mutuamente excludentes (Goodwin et al., 2005; Rao et al., 2001; Rao et al., 2003).

Nesse momento, no contexto de sistemas com restrições intervalares (39), é importante destacar a semelhança dos resultados obtidos pelas abordagens de projeção dos pontos sigma e de truncamento da PDF. De acordo com as Figuras 2 e 3, semelhante ao procedimento de truncamento, a abordagem de projeção dos pontos sigma também diminui a incerteza associada a estimativa de estado sempre que a mesma encontra-se próxima dos limites definidos por (39).

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 Estimação de Atitude usando Quatérnios

Estimação de atitude é o problema de determinar a orientação de um veículo no espaço com relação a algum sistema referencial (Crassidis & Markley, 2003). Esse problema está presente em diversas áreas, tais como robótica, aeronáutica, e astronáutica. A orientação de um veículo pode ser parametrizada usando quatérnios. Nesse caso, a equação cinemática de atitude do veículo é

$$\dot{e}(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)e(t), \quad (81)$$

em que $e(t) = [e_0(t) \ e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t)]^T$ é o vetor de atitude, a matriz $\Omega(t)$ é dada por

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & r(t) & -q(t) & p(t) \\ -r(t) & 0 & p(t) & q(t) \\ q(t) & -p(t) & 0 & r(t) \\ -p(t) & -q(t) & -r(t) & 0 \end{bmatrix},$$

e o vetor de velocidade angular $u(t) = [p(t) \ q(t) \ r(t)]^T$ corresponde a entradas conhecidas. Uma vez que $\|e(0)\|_2 = 1$ e $\Omega(t)$ é anti-simétrica, tem-se que, para todo $t > 0$,

$$\|e(t)\|_2 = 1. \quad (82)$$

Para resolver o problema de estimação de atitude, assume-se que

$$\check{u}_{k-1} = u((k-1)T) + \beta_{k-1} + w_{k-1}^u$$

é medida por girômetros, em que T é o intervalo de discretização, $w_{k-1}^u \in \mathbb{R}^3$ é ruído branco Gaussiano de média nula, e $\beta_{k-1} \in \mathbb{R}^3$ é erro de polarização. O modelo em tempo discreto equivalente de (81) e aumentado pelo modelo da polarização dos girômetros é dado por (Crassidis & Markley, 2003)

$$\begin{bmatrix} e_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k-1} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k-1} \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ w_{k-1}^\beta \end{bmatrix}, \quad (83)$$

em que $e_k \triangleq e(kT)$, $w_{k-1}^\beta \in \mathbb{R}^3$ é ruído de processo associado ao modelo de polarização dos girômetros, $x_k \triangleq \begin{bmatrix} e_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7$ é o vetor de estados, $w_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} w_{k-1}^u \\ w_{k-1}^\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ é o ruído de processo, e

$$A_{k-1} \triangleq \cos(s_{k-1})I_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \frac{T \text{sen}(s_{k-1})}{s_{k-1}} \Omega_{k-1},$$

$$\Omega_{k-1} \triangleq \Omega((k-1)T),$$

$$s_{k-1} \triangleq \frac{T}{2} \|\check{u}_{k-1} - \beta_{k-1} - w_{k-1}^u\|_2.$$

A restrição de igualdade (82) também é válida para (83), ou seja,

$$x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + x_{4,k}^2 = 1. \quad (84)$$

Considerando c sensores de direção, as observações vetoriais $y_k^{[i]} \in \mathbb{R}^3$, para $i = 1, \dots, c$, são dadas por (Crassidis & Markley, 2003)

$$y_k^{[i]} = C_k r^{[i]} + v_k^{[i]}, \quad (85)$$

em que $r^{[i]} \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de direção de referência, o qual é assumidamente conhecido, e C_k é a matriz de atitude do

veículo em relação ao sistema de referência e relaciona-se com o quaternião de atitude por meio de

$$C_k = \begin{bmatrix} x_{1,k}^2 - x_{2,k}^2 - x_{3,k}^2 + x_{4,k}^2 \\ 2(x_{1,k}x_{2,k} - x_{3,k}x_{4,k}) \\ 2(x_{1,k}x_{3,k} + x_{2,k}x_{4,k}) \\ 2(x_{1,k}x_{2,k} + x_{3,k}x_{4,k}) & 2(x_{1,k}x_{3,k} - x_{2,k}x_{4,k}) \\ -x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 - x_{3,k}^2 + x_{4,k}^2 & 2(x_{1,k}x_{4,k} + x_{2,k}x_{3,k}) \\ 2(-x_{1,k}x_{4,k} + x_{2,k}x_{3,k}) & -x_{1,k}^2 - x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 + x_{4,k}^2 \end{bmatrix}$$

Assume-se que pelo menos duas direções são medidas em cada instante de tempo (Crassidis & Markley, 2003; Santos & Waldmann, 2007). Por exemplo, em determinação de atitude de satélites, possíveis medidas de atitude são fornecidas por sensor de estrela, magnetômetro de três eixos, e sensor solar, dentre outros.

Portanto, o sistema modelado pelas equações (83)-(85) caracteriza um problema de estimação de estados não-linear com restrição não-linear de igualdade.

Em seguida, apresenta-se um exemplo em que se considera $e(0) = [0,9603 \ 0,1387 \ 0,1981 \ 0,1387]^T$,

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0,03\text{sen}\left(\frac{2\pi}{600}t\right) & 0,03\text{sen}\left(\frac{2\pi}{600}t - 300\right) \\ 0,03\text{sen}\left(\frac{2\pi}{600}t - 600\right) \end{bmatrix}^T,$$

$T = 0,1$ s, $\beta_{k-1} = [0,001 \ -0,001 \ 0,0005]^T$ rad/s, $Q_{k-1} = \text{diag}(10^{-5}I_{3 \times 3}, 10^{-10}I_{3 \times 3})$, $r^{[1]} = [1 \ 0 \ 0]^T$, $r^{[2]} = [0 \ 1 \ 0]^T$, e $R_k = 10^{-4}I_{6 \times 6}$. Assume-se que as medições de direção são fornecidas a uma taxa mais lenta, especificamente, a 1 Hz, a qual corresponde a um intervalo de amostragem de 10T s. Este exemplo é adaptado de (Teixeira et al., 2009a).

Usando (83)-(85), foram implementados os seguintes estimadores de estado: EKF, PEKF, UKF, ECUKF, PUKF, MAUKF, e CUKF. Os algoritmos foram inicializados com $\hat{x}_{0|0} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $P_{0|0}^{xx} = \text{diag}(0,5I_{4 \times 4} \ 0,01I_{3 \times 3})$. A etapa de projeção foi implementada usando (45)-(50) para o PEKF e (76)-(80), (48)-(50) para o PUKF. Foi usada a função do Matlab `fmincon` na implementação do CUKF.

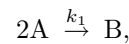
A Tabela 3 compara os resultados obtidos a partir de uma simulação de Monte Carlo com 100 realizações. São usados três índices de desempenho: (i) o erro quadrático médio (RMSE) de cada estimativa de estado $\hat{x}_{j,k|k,l}$

$$\text{RMSE}_j = \frac{1}{100} \sum_{l=1}^{100} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_{j,k} - \hat{x}_{j,k|k,l})^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (86)$$

em que N é o instante final de tempo e o subscrito l indica a l -ésima realização; (ii) o erro quadrático médio (RMS) da restrição; e (iii) o tempo médio de processamento da CPU por instante de tempo T_{CPU} , o qual é apenas uma métrica simples e aproximada para mensurar a carga computacional do algoritmo e depende da implementação e do computador utilizado. Note que a restrição de igualdade (84) é rastreada mais precisamente sempre que um estimador com restrições é empregado; veja Figura 5. Erros percentuais em torno de 0,0007% são obtidos para os algoritmos PUKF, MAUKF, e ECUKF, esse último exibindo o menor erro de restrição entre os três algoritmos. Note que as estimativas de estado produzidas pelo CUKF satisfazem a restrição de norma unitária com precisão em nível de máquina, mas a um tempo de processamento cerca de duas vezes maior para a implementação utilizada neste trabalho. A melhoria na satisfação da restrição de igualdade (84) é acompanhada de um ligeiro aumento no índice RMSE pelos algoritmos ECUKF e MAUKF. Tal aumento significa uma perda aproximada de 5% na acurácia das estimativas em comparação ao UKF. Por outro lado, o PUKF e o CUKF produzem estimativas tão acuradas quanto o UKF. A Tabela 3 também mostra que o EKF e o PEKF produzem resultados piores que os obtidos com os estimadores *unscented*.

6.2 Reator em Batelada

Considere a reação química gasosa



com taxa de reação $k_1 = 0.16$, acontecendo em um reator em batelada isotérmico, de volume constante, e bem misturado

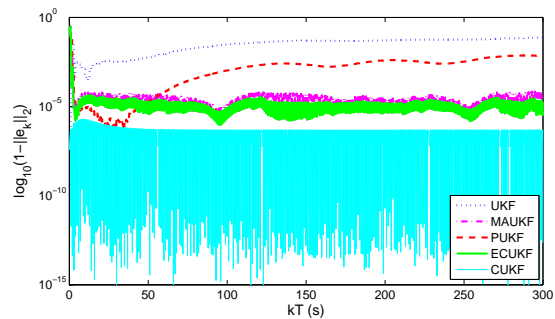


Figura 5: Erro de estimação da norma do vetor de quaterniões (84) usando os estimadores UKF (· · ·), ECUKF (— grossa), PUKF (— — —), MAUKF (— · —), e CUKF (— fina). As estimativas obtidas pelo ECUKF e pelo MAUKF quase coincidem, enquanto o erro de restrição para o PUKF é maior que o erro de restrição para o ECUKF e o MAUKF. As estimativas do CUKF satisfazem a restrição de igualdade (84) com precisão numérica de máquina em quase todo instante de tempo.

Tabela 3: Resultados das simulações de Monte Carlo com 100 realizações para avaliação dos estimadores UKF, MAUKF, PUKF, ECUKF, CUKF, EKF, e PEKF, aplicados ao problema de estimação de atitude usando quatérnios.

UKF	MAUKF	PUKF	ECUKF	CUKF	EKF	PEKF
Erro quadrático médio da restrição (84) ($\times 10^{-4}$)						
254,1	6,50	8,31	6,49	0,58	11561	659,3
RMSE _i (86) para $e_0, e_1, e_2, e_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ($\times 10^{-3}$)						
1,331	1,398	1,334	1,398	1,332	7,498	10,88
1,366	1,434	1,365	1,433	1,365	26,16	29,42
1,320	1,377	1,320	1,376	1,318	24,04	24,29
1,319	1,374	1,315	1,374	1,313	20,83	22,54
0,124	0,130	0,124	0,130	0,124	1,072	1,069
0,119	0,125	0,119	0,125	0,119	0,929	0,933
0,120	0,126	0,120	0,125	0,120	5,725	5,698
T_{CPU} (ms)						
9,02	9,19	10,8	9,21	17,4	4,54	6,82

(Rawlings & Bakshi, 2006). O vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}_+^2$ é dado pelas pressões parciais dos gases A e B, com dinâmica dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 x_1^2(t) \\ k_1 x_1^2(t) \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Assume-se que a pressão do reator é medida

$$y_k = [1 \quad 1]x_k + v_k, \quad (88)$$

em que $R_k = 0,01$ é a variância de $v_k \in \mathbb{R}$. Deseja-se obter estimativas de estado satisfazendo a restrição intervalar (39) de não-negatividade, em que $a_k = 0_{2 \times 1}$ e $b_k = \infty_{2 \times 1}$. Ou seja, trata-se de um problema de estimação de estados não-linear com restrições intervalares.

Para implementar estimação de estados usando os estimadores UKF, SIUKF, CUKF, CIUKF, IUKF, SUKF, TUKF, TIUKF, PUKF, e PIUKF, o modelo de processo (87) é integrado numericamente com $T = 0,1$ s e $x(0) = [3 \quad 1]^T$ usando o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem tal que $x_k \triangleq x(kT)$. Escolhe-se $Q_{k-1} = 10^{-6} I_{2 \times 2}$ para ajudar a convergência das estimativas do UKF (Xiong et al., 2007) com $\hat{x}_{0|0} = x_0$. Esse valor é também usado para os demais algoritmos. Os algoritmos supracitados são inicializados com $\hat{x}_{0|0} = [0,1 \quad 4,5]^T$ e $P_{0|0}^{xx} = 36 I_{2 \times 2}$. Este exemplo é adaptado de (Teixeira et al., 2009b). Para os algoritmos SIUKF, CUKF, CIUKF, SUKF, PUKF, e PIUKF, como o modelo de observação (88) é linear, a função do Matlab `quadprog` é usada para resolver numericamente o problema de otimização com restrições correspondente. Embora este exemplo seja simples, ele é frequentemente investigado na literatura para testar estimadores de estado com restrições. Para fins de comparação com outros métodos, o leitor interessado pode consultar as seguintes referências: EKF (Kandepu et al., 2008), CEKF (Ungarala et al., 2007), e filtro de partículas (Rawlings & Bakshi, 2006).

A Figura 6 mostra uma comparação de desempenho para os algoritmos supracitados para uma simulação de Monte Carlo com 100 realizações. São considerados os índices RMSE (86) e T_{CPU} . Note que o UKF produz as estimativas menos acuradas. Uma ligeira melhoria com relação a RMSE é observada para o CUKF e o PUKF. É importante lembrar que esses dois algoritmos não reforçam a informação da restrição de não-negatividade na covariância do erro de estimação. Os estimadores TIUKF, TUKF, SIUKF, SUKF, CIUKF, PIUKF, e IUKF produzem os melhores resultados. Tais estimadores têm em comum a característica de reforçar a restrição não somente na estimativa de estado como também na covariância do erro de estimação. Em se tratando de tempo de processamento, os algoritmos IUKF, TIUKF, e TUKF são parecidos com o UKF, o qual é cerca de 20% mais lento do que o EKF para este exemplo. Além disso, os algoritmos CUKF, CIUKF, PIUKF, e PUKF apresentam tempo de processamento intermediário, ao passo que o SUKF e o SIUKF são mais de sete vezes mais lentos do que o UKF.

7 CONCLUSÕES

O presente artigo tratou do problema de estimação de estados com restrições para sistemas não-lineares. Foram revisitos e apresentados diversos estimadores de estado baseados no EKF e no UKF. Tais estimadores foram categorizados de acordo com a abordagem utilizada para tratar restrições de igualdade, de desigualdade, e intervalares, a saber: abordagem das medições aumentadas, de projeção da estimativa, de projeção de pontos sigma, de programação quadrática, e de truncamento da PDF; veja Tabelas 1 e 2 e Figuras 1 e 4. Além disso, os métodos diferem com relação à capacidade de reforçar ou não a informação fornecida pela restrição na covariância do erro de estimação, além de fazê-lo na estimativa de estado propriamente dita.

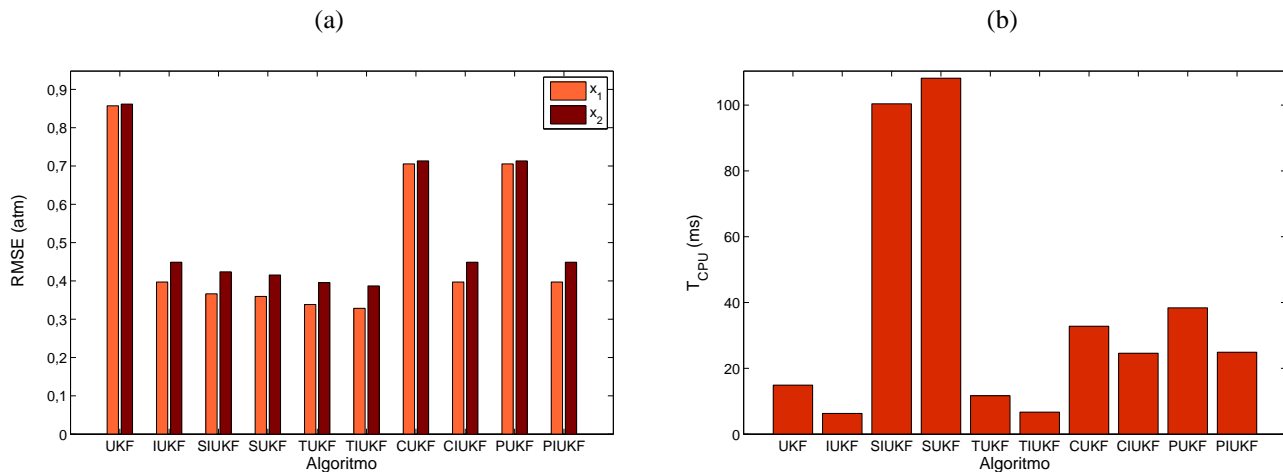


Figura 6: (a) RMSE (86) e (b) T_{CPU} para uma simulação Monte Carlo de 100 realizações para o reator em batelada usando os estimadores UKF, IUKF, SIUKF, SUKF, TUKF, TIUKF, CUKF, CIUKF, PUKF, e PIUKF.

Dois exemplos foram apresentados para ilustrar o uso dos algoritmos investigados. O primeiro exemplo tratou do problema de estimação de atitude com parametrização em quaternions. O segundo exemplo considerou o problema de estimação de estados em um reator em batelada, para o qual o vetor de estados apresenta a propriedade de não-negatividade. Considerando que os métodos investigados neste trabalho são aproximações para sistemas não-lineares, não é evidente a definição de qual é o melhor método. Na verdade, parece que a escolha do método depende da aplicação. Todavia, tendo em vista a relação de compromisso entre a acurácia das estimativas e o tempo de processamento/facilidade de implementação do algoritmo, os autores deste artigo sugerem o uso do ECUKF para o caso exclusivo de estimação de estados com restrições de igualdade, bem como o uso do TIUKF para tratar exclusivamente de restrições intervalares. Em ambos os casos, os métodos citados não apenas reforçam a informação da restrição na estimativa de estado como também na covariância do erro de estimação, sem a necessidade de resolver numericamente um problema de otimização. Finalmente, para o caso geral, sugere-se a escolha do CUKF ou do CIUKF.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Prof. Dennis Bernstein, do Departamento de Engenharia Aeroespacial da University of Michigan, Estados Unidos, pelas valiosas discussões e contribuições durante o desenvolvimento da tese de doutorado (Teixeira, 2008) e publicações decorrentes de tal trabalho, incluindo o presente.

Os autores também agradecem ao CNPq e à FAPEMIG pelo

apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L. A., Teixeira, B. O. S. & Tôres, L. A. B. (2005). Using data-driven discrete-time models and the unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems, *Physical Review E* **72**(2): 026226.
- Alouani, A. T. & Blair, W. D. (1993). Use of a Kinematic Constraint in Target Tracking Constant Speed, Maneuvering Targets, *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(7): 1107–1111.
- Arasaratnam, I. & Haykin, S. (2009). Cubature Kalman Filters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(6): 1254–1269.
- Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N. & Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing* **50**(2): 174–188.
- Bernstein, D. S. (2005). *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton, USA: Princeton University Press.
- Bitencourt Jr., H., Tôres, L. A. B. & Aguirre, L. A. (2004). Estimação conjunta de estados e parâmetros com o filtro de Kalman unscented: Um estudo de caso usando o circuito de Chua, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, Brasil.
- Cajueiro, D. O. & Hemerly, E. M. (2003). Direct adaptive control using feedforward neural networks, *SBA Controle & Automação* **14**(4): 348–358.

- Cardoso, R., de Camargo, R. F., Pinheiro, H. & Gründling, H. A. (2006). Estruturas de sincronismo monofásica e trifásica baseadas no filtro de Kalman, *SBA Controle & Automação* **17**(4): 493–513.
- Choi, J., Yeap, T. H. & Bouchard, M. (2005). Online State-Space Modeling using Recurrent Multilayer Perceptrons with Unscented Kalman Filter, *Neural Processing Letters* **22**(1): 69–84.
- Cipra, B. (1993). Engineer's look to Kalman filtering for guidance, *SIAM News* **26**(5).
- Crassidis, J. L. (2006). Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **42**(2): 750–756.
- Crassidis, J. L. & Markley, F. L. (2003). Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **26**(4): 536–542.
- Curvo, M. (2000). Estimation of aircraft aerodynamic derivatives using extended Kalman filter, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, **22**(2): 133–148.
- Curvo, M. & Rios Neto, A. (2003). A new filter error method applied to aircraft parameter identification, *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, São José dos Campos, Brasil, v. 2.
- Daum, F. (2005). Nonlinear filters: Beyond the Kalman filter, *IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine* **20**(8): 57–69.
- De Geeter, J., van Brussel, H. & De Schutter, J. (1997). A smoothly constrained Kalman filter, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **19**(10): 1171–1177.
- de Mendonça, C. B., Hemerly, E. M. & Góes, L. C. S. (2007). Adaptive stochastic filtering for online aircraft flight path reconstruction, *Journal of Aircraft* **44**(5): 1546–1558.
- Goodwin, G. C., Seron, M. M. & de Doná, J. A. (2005). *Constrained Control and Estimation: An Optimisation Approach*, Springer, London, England.
- Gupta, N. & Hauser, R. (2007). Kalman filtering with equality and inequality state constraints, *Technical Report 07/18*, Numerical Analysis Group, Oxford University Computing Laboratory, University of Oxford. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0709.2791>.
- Haykin, S. (ed.) (2001). *Kalman Filtering and Neural Networks*, Wiley Publishing, New York City, EUA.
- Hovland, G. E., von Hoff, T. P., Gallestey, E. A., Antoine, M., Farruggio, D. & Paice, A. D. B. (2005). Nonlinear estimation methods for parameter tracking in power plants, *Control Engineering Practice* **13**(11): 1341–1355.
- Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, Inc., New York City, EUA; reeditado pela Dover Publications, 2007.
- Julier, S. J. & LaViola Jr., J. J. (2007). On Kalman filtering with nonlinear equality constraints, *IEEE Transactions on Signal Processing* **55**(6): 2774–2784.
- Julier, S. J. & Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE* **92**(3): 401–422.
- Julier, S. J., Uhlmann, J. K. & Durrant-Whyte, H. F. (2000). A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(3): 477–482.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering* **82**: 35–45.
- Kalman, R. E. (2003). Discovery and invention: The newtonian revolution in systems technology, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **26**(6): 833–837.
- Kandepu, R., Foss, B. & Imsland, L. (2008). Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation, *Journal of Process Control* **18**(7–8): 753–768.
- Ko, S. & Bitmead, R. R. (2007). State estimation for linear systems with state equality constraints, *Automatica* **43**(8): 1363–1368.
- Kühne, F., Claro, C. A. H., Suess, S. R., & Lages, W. F. (2004). Estimacão e Controle de Posicão de um Robô Móvel Utilizando Filtro de Kalman Descentralizado, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, Brasil.
- Lefebvre, T., Bruyninckx, H. & De Schutter, J. (2002). Comment on "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators", *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(8): 1406–1408.
- Lefebvre, T., Bruyninckx, H. & De Schutter, J. (2004). Kalman filters for nonlinear systems: A comparison of performance, *International Journal of Control* **77**(7): 639–653.
- Maciel Filho, R., Rodrigues, J. A. D., & Zaiat, M. (1999). State estimation and parameter identification in a feed-batch penicilium production process, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, **16**(1), 41–52.

- Marcon, S. M., Trierweiler, J. O., & Secchi, A. R. (2002). EKF e CEKF: Comparação entre Duas Formulações do Filtro de Kalman Estendido, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, Brasil, pp. 739–744.
- Maybeck, P. S. (1979). *Stochastic Models, Estimation, and Control*, v. 1, Academic Press, Inc., New York City, EUA; reimpresso pela Dover, 2007.
- Pinto, R. L. F. & Rios Neto, A. (1990). An optimal linear estimation approach to solve systems of linear algebraic equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **33**(3), 261–268.
- Pizzinga, A. (2009). Further investigation into restricted Kalman filtering, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 264–269.
- Quirino, R. B. & Bottura, C. P. (2003). A method for composite fault detection and isolation using overlapping decomposition, *SBA Controle & Automação* **14**(3): 245–253.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B. & Lee, J. H. (2001). Constrained Linear State Estimation - A Moving Horizon Approach, *Automatica* **37**(10): 1619–1628.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B. & Mayne, D. Q. (2003). Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(2): 246–258.
- Rawlings, J. B. & Bakshi, B. R. (2006). Particle filtering and moving horizon estimation, *Computers and Chemical Engineering* **30**(10–12): 1529–1541.
- Reif, K., Günther, S., Yaz, E. & Unbehauen, R. (1999). Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(4): 714–728.
- Rios Neto, A. (1997). Stochastic optimal linear parameter estimation and neural nets training in systems modelling, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences* **19**(2): 138–146.
- Rios Neto, A. & Hemerly, E. M. (2007). Observadores de estado e filtro de Kalman. Em: Aguirre, L. A., da Silva, A. P. A., Campos, M. F. M., & W. C. Amaral (Ed.), *Enciclopédia da Automática: Controle e Automação*, v. 3, cap. 6, pp. 158–181, São Paulo, Brasil: Editora Edgar Blücher.
- Rios Neto, A. & Rios Neto, W. (2000). An Optimal Linear Estimation Approach to the Parallel Solution of Linear Algebraic Systems of Equations, *SBA Controle e Automação* **11**(1): 61–67.
- Robertson, D. G. & Lee, J. H. (2002). On the use of constraints in least squares estimation and control, *Automatica* **38**(7): 1113–1123.
- Romanenko, A. & Castro, J. A. A. M. (2004). The unscented filter as an alternative to the EKF for nonlinear state estimation: a simulation case study, *Computers and Chemical Engineering* **28**(3): 347–355.
- Sandi Lora, F. A., Hemerly, E. M. & Lages, W. F. (1998). Sistema para Navegação e Guiagem de Robôs Móveis Autônomos, *SBA Controle & Automação* **9**(3): 107–118.
- Santos, D. A. & Waldmann, J. (2007). Satellite Attitude and Angular Velocity Estimation Using Kalman Filter, *Anais do V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial*, Rio de Janeiro, Brasil, v. 1, pp. 18–22.
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches*, Wiley-Interscience, Hoboken, EUA.
- Simon, D. (2008). Kalman filtering with state constraints – how an optimal filter can become even better (submetido), *IEEE Control Systems Magazine*. Disponível em: <http://academic.csuohio.edu/simond/ConstrKF/>.
- Simon, D. & Chia, T. (2002). Kalman filtering with state equality constraints, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **38**(1): 128–136.
- Simon, D. & Simon, D. L. (2006). Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications* **153**(3): 371–378.
- Sorenson, H. W. (1970). Least-squares estimation: from Gauss to Kalman, *IEEE Spectrum* **7**: 63–68.
- Tahk, M. & Speyer, J. L. (1990). Target tracking problems subject to kinematic constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(3): 324–326.
- Teixeira, B. O. S. (2008). *Constrained State Estimation for Linear and Nonlinear Dynamic Systems*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Teixeira, B. O. S., Chandrasekar, J., Palanthandalam-Madapusi, H. J., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A. & Bernstein, D. S. (2008a). Gain-constrained Kalman filtering for linear and nonlinear systems, *IEEE Transactions on Signal Processing* **56**(9): 4113–4123.

Teixeira, B. O. S., Chandrasekar, J., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A. & Bernstein, D. S. (2007). State estimation for equality-constrained linear systems, *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, EUA, pp. 6220–6225.

Teixeira, B. O. S., Chandrasekar, J., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A. & Bernstein, D. S. (2009a). State estimation for linear and non-linear equality-constrained systems, *International Journal of Control* **82**(5):918–936.

Teixeira, B. O. S., Santillo, M. A., Erwin, R. S. & Bernstein, D. S. (2008b) Spacecraft Tracking using Sampled-data Kalman Filters, *IEEE Control Systems Magazine*, **28**(4):78–94.

Teixeira, B. O. S., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A., & Bernstein, D. S. (2008c) Unscented Filtering for Interval-Constrained Nonlinear Systems. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, México, pp. 5116–5121.

Teixeira, B. O. S., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A. & Bernstein, D. S. (2009b). On unscented Kalman filtering with state interval constraints (submetido), *Journal of Process Control*.

Teixeira, B. O. S., Tôrres, L. A. B., Iscold, P. H. A. O. & Aguirre, L. A. (2005). Flight path reconstruction using the unscented Kalman filter algorithm, *18th International Congress of Mechanical Engineering*, Ouro Preto, Brasil, n. 0610.

Trigo, F. C., Lima, R. G., & Amato, M. B. P. (2004). Electrical impedance tomography using the Extended Kalman Filter, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **51**(1): 72–81.

Ungarala, S., Dolence, E. & Li, K. (2007). Constrained extended Kalman filter for nonlinear state estimation, *Proceedings of the 8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, Vol. 2, Cancun, México, pp. 63–68.

Vachhani, P., Narasimhan, S. & Rengaswamy, R. (2006). Robust and reliable estimation via Unscented Recursive Nonlinear Dynamic Data Reconciliation, *Journal of Process Control* **16**(10): 1075–1086.

van der Merwe, R., Wan, E. A. & Julier, S. J. (2004). Sigma-point Kalman filters for nonlinear estimation and sensor-fusion – applications to integrated navigation, *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation & Control Conference*, Providence, EUA, n. 2004-5120.

Xiong, K., Zhang, H. & Chan, C. (2007). Author’s reply to “comments on ‘performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering’”, *Automatica* **43**(3): 569–570.

APÊNDICE A: PROCEDIMENTO DE TRUNCAMENTO DA PDF

Neste apêndice, são revisadas as equações do procedimento de truncamento da PDF; veja (Simon, 2006, pp. 218–222) e (Teixeira, 2008, pp. 101–105).

O procedimento de truncamento da PDF é executado em i passos, em que $i = 1, \dots, n$. Sejam $\hat{x}_{k|k,i}^t$ e $P_{k|k,i}^{xxt}$ os valores da estimativa de estado e respectiva covariância calculados após a imposição das $i - 1$ primeiras linhas da restrição intervalar (39).

Primeiramente, em $i = 1$, inicialize

$$\hat{x}_{k|k,1}^t = \hat{x}_{k|k} \quad \text{e} \quad P_{k|k,1}^{xxt} = P_{k|k}^{xx} \quad (89)$$

em que $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}^{xx}$ são, respectivamente, dados por (12) e (13).

Em seguida, para $i = 1, \dots, n$, execute o seguinte laço de quatro passos: (i) encontre a matriz ortogonal $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, aplicando a decomposição de Schur (Bernstein, 2005, pp. 171–174) em $P_{k|k,i}^{xxt}$, tal que

$$SDS^T = P_{k|k,i}^{xxt} \quad (90)$$

em que $P_{k|k,i}^{xxt}$ é simétrica por definição; (ii) a partir da ortogonalização de Gram-Schmidt, encontre a matriz ortogonal $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo

$$\Theta D^{1/2} \text{col}_i(S^T) = \left[\sqrt{P_{(i,i),k|k,i}^{xxt}} \quad 0_{1 \times (n-1)} \right]^T,$$

a qual é dada por

$$\text{row}_l(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k|k,i}^{xxt}}} \text{row}_i(S) D^{1/2}, & l = 1, \\ \left(e_l - \sum_{q=1}^{l-1} \left(e_l^T \text{col}_q(\Theta^T) \right) \text{col}_q(\Theta^T) \right)^T & l = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (91)$$

em que $e_l \triangleq \text{col}_l(I_{n \times n})$, se $\text{row}_l(\Theta) = 0_{1 \times n}$, então corrija

$$\text{row}_l(\Theta) = \left(e_l - \sum_{q=1}^{l-1} \left(e_l^T \text{col}_q(\Theta^T) \right) \text{col}_q(\Theta^T) \right)^T; \quad (92)$$

além disso, normalize

$$\text{row}_l(\Theta) = \frac{1}{\|\text{row}_l(\Theta)\|_2} \text{row}_l(\Theta), \quad l = 1, \dots, n; \quad (93)$$

(iii) encontre os parâmetros da restrição intervalar $c_{k,i} \leq z_{i,k,i} \leq d_{k,i}$, em que $c_{k,i} < d_{k,i} \in \mathbb{R}$ são dados por

$$c_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k|k,i}^{xxt}}} (a_{i,k} - x_{i,k|k,i}^t), \quad (94)$$

$$d_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k|k,i}^{xxt}}} (b_{i,k} - x_{i,k|k,i}^t), \quad (95)$$

e $z_{k,i} \triangleq \Theta D^{-1/2} S^T (x_k - \hat{x}_{k|k,i}^t) \in \mathbb{R}^n$ com média

$$\hat{z}_{k,i} = [\mu_i \quad 0_{1 \times (n-1)}]^T \quad (96)$$

e covariância

$$P_{k,i}^{zz} = \text{diag}(\sigma_i^2, 1_{1 \times (n-1)}), \quad (97)$$

em que

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \left[\text{erf} \left(\frac{d_{k,i}}{\sqrt{2}} \right) - \text{erf} \left(\frac{c_{k,i}}{\sqrt{2}} \right) \right]}, \quad (98)$$

$$\mu_i = \alpha_i \left[\exp \left(\frac{-c_{k,i}^2}{2} \right) - \exp \left(\frac{-d_{k,i}^2}{2} \right) \right], \quad (99)$$

$$\sigma_i^2 = \alpha_i \left[\exp \left(\frac{-c_{k,i}^2}{2} \right) (c_{k,i} - 2\mu_i) - \right. \quad (100)$$

$$\left. \exp \left(\frac{-d_{k,i}^2}{2} \right) (d_{k,i} - 2\mu_i) \right] + \mu_i^2 + 1, \quad (101)$$

em que

$$\text{erf}(t) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-\tau^2) d\tau$$

é a função erro; e (iv) calcule a transformação inversa

$$\hat{x}_{k|k,i+1}^t = SD^{1/2} \Theta^T \hat{z}_{k,i} + \hat{x}_{k|k,i}^t, \quad (102)$$

$$P_{k|k,i+1}^{xxt} = SD^{1/2} \Theta^T P_{k,i}^{zz} \Theta D^{1/2} S^T. \quad (103)$$

Finalmente, em $i = n$, faça

$$\hat{x}_{k|k}^t = \hat{x}_{k|k,n+1}^t, \quad (104)$$

$$P_{k|k}^{xxt} = P_{k|k,n+1}^{xxt}. \quad (105)$$

Por simplicidade, o procedimento de truncamento da PDF dado pelas equações (89)-(105) é referido como

$$\left[\hat{x}_{k|k}^t, P_{k|k}^{xxt} \right] = \Gamma_{\text{trunc}} \left(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}^{xx}, n, a_k, b_k \right) \quad (106)$$