
CONTROLADORES ROBUSTOS H_∞ NÃO FRÁGEIS

M. V. Moreira*

moreira@pee.coppe.ufrj.br

J. C. Basilio*

basilio@dee.ufrj.br

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE - Departamento de Engenharia Elétrica
Escola de Engenharia - Departamento de Eletrotécnica, Cidade Universitária - Ilha do Fundão
21.945-970 - Rio de Janeiro - R. J. - Brazil

ABSTRACT

In a recent paper, Keel and Bhattacharyya suggest, by means of simple examples taken from the literature, that H_∞ robust controllers can be fragile in the sense that a minute perturbation in the controller parameters can make the closed-loop system unstable. Subsequent works have related this problem to controller implementation and suggested that modern H_∞ design methodology (*e.g.* McFarlane-Glover) where more than one design criteria is considered should be used. However, is it true that robust controllers, designed for the simple optimization criteria presented by Keel and Bhattacharyya, are necessarily fragile? In this paper this question is answered and it will be shown that the fragility problem can not be associated to H_∞ optimization, since it is possible to find controllers that are non-fragile and also lead to a cost value close to the optimal value obtained in the H_∞ optimization problem.

KEYWORDS: H_∞ control, robust control, fragility, linear systems.

RESUMO

Em um artigo recente, Keel e Bhattacharyya sugerem, a partir de exemplos simples extraídos da literatura, que os controladores robustos H_∞ podem ser frágeis no sentido de que uma pequena perturbação nos seus parâme-

tros pode instabilizar o sistema realimentado. Trabalhos subsequentes ligaram este problema à forma de implementação dos controladores e sugeriram a utilização de métodos mais modernos de projeto de controladores H_∞ (McFarlane-Glover, por exemplo) onde mais de um objetivo de projeto é considerado simultaneamente. Mas, será verdade que controladores robustos, projetados para os simples critérios de otimização apresentados por Keel e Bhattacharyya, são necessariamente frágeis? Neste artigo esta questão será respondida e será mostrado que o problema de fragilidade não pode ser associado à otimização H_∞ , uma vez que é possível encontrar controladores que são não frágeis e também levam o valor do custo próximo ao valor ótimo obtido no problema de otimização H_∞ .

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de controle H_∞ , controle robusto, fragilidade, sistemas lineares.

1 INTRODUÇÃO

Em um artigo recente (Keel and Bhattacharyya, 1997), foi levantado o problema da fragilidade de controladores, *i.e.*, a sensibilidade do sistema em malha fechada a variações nos parâmetros do controlador. Por meio de alguns exemplos simples extraídos da literatura, Keel e Bhattacharyya sugerem que diversas técnicas de controle robusto e ótimo podem levar a controladores ‘frágeis’. Uma das metodologias consideradas neste artigo foi a conhecida teoria de controle robusto H_∞ em que, para os casos considerados, os controladores H_∞ , ao sofrerem pequenas perturbações, levavam o sistema em

Artigo submetido em em 25/10/02

1a. Revisão em 14/03/03; 2a. Revisão em 08/07/03

Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. José R. Piqueira

malha fechada à instabilidade. Por esta razão estes controladores foram denominados ‘frágeis’. Como medida para a fragilidade dos controladores foi utilizada a margem de estabilidade paramétrica (Bhattacharyya et al., 1995).

Desde então, diversos trabalhos têm sido realizados na tentativa de solucionar o problema proposto em Keel and Bhattacharyya (1997), como por exemplo em Haddad and Corrado (2000), Yang et al. (2000), Famularo et al. (2000), Yang and Wang (2001) e Ho et al. (2001). Nestes artigos, basicamente o que é feito é formular o problema de robustez do sistema realimentado em termos da perturbação nos parâmetros do controlador e, então, verificar a tolerância a perturbações em relação aos parâmetros da planta. Outros trabalhos, porém, foram feitos na tentativa de apontar falhas na formulação do problema sugerido em Keel and Bhattacharyya (1997). Para tratar o problema de fragilidade levantado por Keel and Bhattacharyya (1997), Mäkilä (1998) e Paattilampi and Mäkilä (2000) associaram a fragilidade do controlador à forma em que este é implementado. Além disso, é comentado nesses trabalhos que controladores obtidos através de técnicas modernas de controle robusto e ótimo são, em geral, ‘não frágeis’, sugerindo inclusive o uso do método de projeto de McFarlane-Glover. Os exemplos considerados por Keel e Bhattacharyya não são analisados por Mäkilä e Paattilampi sob a justificativa de que em uma situação real, outros objetivos de controle deveriam ser também considerados, o que reduziria a sua fragilidade.

Neste artigo o problema da fragilidade de controladores robustos H_∞ é novamente considerado e será mostrado que o problema de fragilidade não está necessariamente associado à otimização H_∞ , podendo ser evitado perturbando-se adequadamente os parâmetros do controlador considerado nominal. O procedimento consiste basicamente dos seguintes passos: primeiro, reduzir a ordem do controlador subótimo H_∞ por truncamento balanceado; segundo, obter a melhor direção de perturbação do controlador H_∞ nominal de forma a maximizar a margem de estabilidade paramétrica relativa, com menor variação sobre os parâmetros do controlador nominal.

Este artigo está estruturado da seguinte forma. Na seção 2 apresenta-se uma breve revisão de margem de estabilidade paramétrica e na seção 3 apresenta-se o projeto de controladores H_∞ não frágeis. Os resultados desse artigo serão ilustrados na seção 4 através dos mesmos exemplos considerados em Keel and Bhattacharyya (1997).

2 MARGEM DE ESTABILIDADE PARAMÉTRICA

2.1 Definição

Considere o sistema com realimentação unitária negativa da figura 1, onde

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \alpha_i s^i}{\sum_{j=0}^{n_1} \beta_j s^j}$$

e

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m_2} \epsilon_k s^k}{\sum_{q=0}^{n_2} \phi_q s^q}$$

denotam as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente, e suponha que $K(s)$ estabiliza $G(s)$. Defina $\underline{p}^0 = [p_1^0 \ p_2^0 \ \dots \ p_l^0]^T$ ($l \leq m_2 + n_2 + 2$) como o vetor de parâmetros nominal formado por um subconjunto do conjunto $\mathcal{P} = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{m_2}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n_2}\}$ de parâmetros do controlador e que são escolhidos entre aqueles que podem sofrer alguma perturbação. Defina, também, $\Delta \underline{p} = \underline{p} - \underline{p}^0 = [p_1 - p_1^0 \ p_2 - p_2^0 \ \dots \ p_l - p_l^0]^T$, o vetor de perturbação nos parâmetros de $K(s)$, e introduza uma norma $\|\cdot\|$ no espaço de parâmetros (em geral é utilizada a norma Euclidiana). A margem de estabilidade paramétrica (ρ) pode ser então definida como o menor valor de $\|\Delta \underline{p}\|_2$ para o qual o sistema realimentado se torna instável. É importante ressaltar que nessa definição está implícita a idéia de que os parâmetros do controlador irão variar, enquanto que os parâmetros da planta permanecerão constantes.

2.2 Cálculo da margem de estabilidade paramétrica

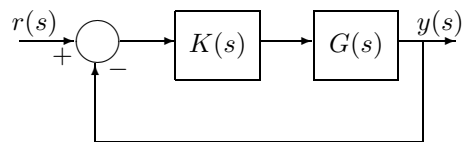


Figura 1: Sistema com realimentação unitária negativa. Para calcular a margem de estabilidade paramétrica (Bhattacharyya et al., 1995), o primeiro passo é escrever o polinômio característico do sistema em malha fechada como:

$$\delta(s, \underline{p}) = \sum_{i=1}^l a_i(s) p_i + b(s), \quad (1)$$

onde $b(s) = 0$ quando todos os parâmetros do controlador nominal podem sofrer perturbação. Utilizando-se o princípio de exclusão da origem (Bhattacharyya et al., 1995), a margem de estabilidade paramétrica é calculada encontrando-se o vetor $\Delta \underline{p} = \underline{p} - \underline{p}^0$ de menor norma-2 tal que o polinômio característico do sistema em malha fechada com perturbação tenha um zero sobre o eixo imaginário. Portanto, para $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, a equação (1) torna-se:

$$\delta(j\omega, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = \delta(j\omega, \underline{p}^0) + \sum_{i=1}^l a_i(j\omega) \Delta p_i = 0$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} a_1(j\omega) & a_2(j\omega) & \dots & a_l(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix} = -\delta(j\omega, \underline{p}^0). \quad (2)$$

Escrevendo $a_k(j\omega) = a_{k_r}(j\omega) + ja_{k_i}(j\omega)$ e $\delta(j\omega, \underline{p}^0) = \delta_r(j\omega, \underline{p}^0) + j\delta_i(j\omega, \underline{p}^0)$ e substituindo em (2) obtém-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1_r}(j\omega) & a_{2_r}(j\omega) & \dots & a_{l_r}(j\omega) \\ a_{1_i}(j\omega) & a_{2_i}(j\omega) & \dots & a_{l_i}(j\omega) \end{bmatrix}}_{A(j\omega)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{\Delta \underline{p}(j\omega)} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_r(j\omega, \underline{p}^0) \\ \delta_i(j\omega, \underline{p}^0) \end{bmatrix}}_{\underline{y}(j\omega)}. \quad (3)$$

Note que para $\omega = 0$ a equação (2) torna-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1(0) & a_2(0) & \dots & a_l(0) \end{bmatrix}}_{\underline{a}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{\Delta \underline{p}(0)} = - \underbrace{\delta(0, \underline{p}^0)}_{\underline{y}(0)}. \quad (4)$$

Para cada frequência $\omega \neq 0$, defina $\rho(j\omega) = \|\Delta \underline{p}(j\omega)\|_2$ e $\rho(0) = \|\Delta \underline{p}(0)\|_2$, para $\omega = 0$. A margem de estabilidade paramétrica é, então, dada por:

$$\rho = \min\{\rho(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+^*; \rho(0)\}. \quad (5)$$

Deve ser ressaltado que, quando a equação (2) ou (4) não tiver solução, então o valor de $\rho(j\omega)$ ou $\rho(0)$, deve ser feito igual a infinito (Bhattacharyya et al., 1995, pag. 174). Outro ponto a ser considerado é que, para calcular ρ de forma geral (Bhattacharyya et al., 1995, pag. 164), é necessário também considerar o caso em que há perda de grau de $\delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p})$. Para os casos em que o coeficiente da potência de s de maior grau do denominador do controlador não pode sofrer variação e a função de transferência da planta é estritamente própria, $\delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p})$

não perde grau e a margem de estabilidade paramétrica ρ é obtida somente a partir de (5). Além disso, ao se fazer o coeficiente da potência de s de maior grau do denominador de $K(s)$ fixo, *i.e.*, $\phi_{n_2} = 1$, o valor de $\rho(j\omega)$ pode ser maior do que o valor de $\rho(j\omega)$, obtido quando ϕ_{n_2} pode variar, como será mostrado no teorema a seguir.

Teorema 1 Suponha que o controlador $K(s) = n_K(s)/d_K(s)$, $d_K(s)$ mônico, estabiliza a planta $G(s) = n_G(s)/d_G(s)$ da figura 1 e sejam ρ e $\hat{\rho}$ as margens de estabilidade paramétrica calculadas permitindo a variação do coeficiente da potência de s de maior grau de $d_K(s)$ e não permitindo, respectivamente. Então $\hat{\rho}(j\omega) \geq \rho(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$.

Prova. A prova deste teorema é uma aplicação direta da definição de margem de estabilidade paramétrica. Suponha que a matriz A definida em (3) tenha posto 2 (igual ao número de linhas). Denotando $\Delta \underline{p} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_l]$ e $\Delta \hat{\underline{p}} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_{l-1}]$ e definindo \hat{A} como uma matriz cujas colunas são as $l-1$ colunas de A em (3), é fácil verificar que:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{p} &= -A^t(AA^t)^{-1}\underline{y} \Rightarrow \|\Delta \underline{p}\|_2^2 = \underline{y}^t(AA^t)^{-1}\underline{y} \\ \Delta \hat{\underline{p}} &= -\hat{A}^t(\hat{A}\hat{A}^t)^{-1}\underline{y} \Rightarrow \|\Delta \hat{\underline{p}}\|_2^2 = \underline{y}^t(\hat{A}\hat{A}^t)^{-1}\underline{y} \end{aligned} \quad (6)$$

Além disso, de acordo com as definições de A e \hat{A} , é possível escrever:

$$A(j\omega) = \begin{bmatrix} \hat{A}(j\omega) & \begin{bmatrix} \hat{v}_r^t(j\omega) \\ \hat{v}_i^t(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}(j\omega) & V(j\omega) \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

onde $\hat{v}_r^t(j\omega)$ e $\hat{v}_i^t(j\omega)$ são as partes real e imaginária de $\underline{v}^t(j\omega) = [1 \ \dots \ (j\omega)^{n_1+n_2}]$ e n_1 e n_2 são os ordens de $G(s)$ e $K(s)$, respectivamente. Utilizando-se a relação acima em (6a) resulta:

$$\|\Delta \underline{p}\|_2^2 = \underline{y}^t \left\{ \hat{A}\hat{A}^t + V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^t & \underline{d}_G^t \end{bmatrix} V^t \right\}^{-1} \underline{y}.$$

Portanto $\|\Delta \hat{\underline{p}}\|_2^2 \geq \|\Delta \underline{p}\|_2^2$, se e somente se se

$$\underline{y}^t \left\{ (\hat{A}\hat{A}^t)^{-1} - \left[\hat{A}\hat{A}^t + V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^t & \underline{d}_G^t \end{bmatrix} V^t \right]^{-1} \right\} \underline{y} \geq 0,$$

que é sempre verdade para todo \underline{y} , uma vez que $\hat{A}\hat{A}^t$ é positiva definida e $V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^t & \underline{d}_G^t \end{bmatrix} V^t$ é positiva semi-definida. Procedendo de forma análoga, é possível mostrar que $\rho(0) = \hat{\rho}(0)$, completando a prova do teorema. \square

Observação 1 Uma maneira mais simples de provar o teorema 1 (sugerida por um revisor anônimo) é baseada

no fato de que o problema de obtenção de $\hat{\rho}$ pode ser também formulado como um problema de obtenção de ρ com a restrição de o último elemento do vetor $\Delta \underline{p}$ ser identicamente nulo. Desta forma $\hat{\rho} \geq \rho$. \square

O teorema 1 mostra que, ao se permitir a variação do coeficiente da potência de s de maior grau de $d_K(s)$, a margem de estabilidade paramétrica pode tornar-se menor do que considerando-o fixo. Portanto, neste artigo, para tornar as comparações justas, nos exemplos apresentados será sempre calculado $\hat{\rho}$.

O valor ρ obtido para a margem de estabilidade paramétrica é de difícil interpretação, sendo comum, então, representar a margem de estabilidade paramétrica por um valor relativo, ou seja, calcular ρ da forma descrita na subseção 2.2 e, em seguida, obter uma margem de estabilidade paramétrica relativa μ da seguinte forma:

$$\mu = \frac{\rho}{\|\underline{p}^0\|_2}. \quad (7)$$

Para os casos em que $d_K(s)$ é mônico, e o coeficiente da potência de s de maior grau é fixo, então a margem de estabilidade paramétrica relativa será denotada por $\hat{\mu} = \hat{\rho}/\|\underline{p}^0\|_2$.

3 CONTROLADORES H_∞ NÃO FRÁGEIS

Definir um controlador como frágil ou não frágil é uma tarefa difícil. Na verdade, para se considerar um controlador frágil ou não frágil deve-se levar em consideração a sua implementação, i.e., dependendo da forma como o controlador será implementado pode-se determinar o percentual admissível de erro nos seus parâmetros quando de sua implementação. A partir deste erro define-se então o controlador obtido como frágil ou não frágil. Nesta seção será apresentada uma maneira sistemática de perturbar os parâmetros do controlador H_∞ nominal com vistas a aumentar a margem de estabilidade paramétrica relativa do sistema realimentado. Este aumento será determinado em função do percentual de erro nos parâmetros que existirá quando da implementação do controlador.

3.1 Uso de redução por truncamento balanceado em controladores H_∞

Em Keel and Bhattacharyya (1997), uma das técnicas de projeto analisadas é a chamada teoria de controladores H_∞ (Doyle et al., 1992), onde o controlador ótimo é obtido via parametrização de Youla-Kucera, i.e.,

$$K(s) = [Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) - N(s)Q(s)]^{-1} \quad (8)$$

onde $G(s) = N(s)/M(s)$, com $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ e $Y(s) \in RH_\infty$, sendo RH_∞ o anel das funções racionais próprias e estáveis e satisfazem a identidade de Bezout

$$X(s)M(s) + Y(s)N(s) = 1. \quad (9)$$

Para plantas cujas funções de transferência têm graus relativos maiores do que zero, isto é, estritamente próprias, os problemas H_∞ $\min \|W_2S\|_\infty$, $\min \|W_3SG\|_\infty$ e $\min \|W_4T\|_\infty$ com solução não-trivial, onde $S(s)$ e $T(s)$ são as funções de sensibilidade e de sensibilidade complementar, respectivamente, não têm solução própria, isto é, $Q(s)$ solução do problema H_∞ é impróprio [$Q(s) = Q_{imp}(s)$]. Conseqüentemente os controladores ótimos serão impróprios [$K_{imp}(s)$]. Deve-se ressaltar que esses controladores impróprios não necessariamente estabilizam o sistema realimentado e podem, até mesmo, não existir. Para tornar os controladores robustos próprios, usualmente é feita uma aproximação sobre o parâmetro livre $Q_{imp}(s)$ dividindo-o pelo fator $(\tau s + 1)^\nu$ para se obter $Q_\tau(s)$, onde ν é escolhido tal que $Q_\tau(s)$ seja próprio. É importante ressaltar ainda que τ é positivo e que seu valor deve ser escolhido suficientemente pequeno de forma que o fator $1/(\tau s + 1)^\nu$ abranja a maior faixa de frequências possível.

Um método sistemático para calcular as soluções ótimas $Q(s)$, para os problemas de minimização acima, é apresentado em Francis (1987). Este método consiste basicamente dos seguintes passos:

(i) escreva o problema de minimização como um problema de casamento de modelos $\min \|T_1 - T_2Q\|_\infty$;

(ii) faça fatoração inner-outer em $T_2(s)$:

$$T_2(s) = T_{2_i}(s)T_{2_o}(s); \quad (10)$$

(iii) escreva

$$\|T_1 - T_2Q\|_\infty = \|R - X_S\|_\infty, \quad (11)$$

onde

$$R(s) = T_{2_i}^*(s)T_1(s); \quad (12)$$

(iv) encontre $X_S(s) \in RH_\infty$ que minimize $\|R - X_S\|_\infty$.

Um algoritmo simples para encontrar funções $f(s) \in RH_2^\perp$ e $g(s) \in RH_2$ tais que a solução única para o problema $\min \|R - X_S\|_\infty$ seja dada por

$$X_S(s) = R(s) - \lambda \frac{f(s)}{g(s)}, \quad (13)$$

Tabela 1: Expressões analíticas para $K_\tau(s)$ e $K_{imp}(s)$

Objetivo de projeto	$K_{imp}(s)$	$K_\tau(s)$
$\min \ W_1 K S\ _\infty$	$\frac{(-1)^{\sigma_1} \lambda n_f n_m^- d_{w_1}}{\tilde{\chi}_1}$	$\frac{(-1)^{\sigma_1} \lambda n_f n_m^- d_{w_1}}{\tilde{\chi}_1}$
$\min \ W_2 S\ _\infty$	$\frac{n_m^-}{n_n^-} \left[\frac{\tilde{\chi}_2}{\lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2}} \right]$	$\frac{n_m^- \tilde{\chi}_2 \hat{d} d + n_n^- n_{w_2} n_y (n_m^+)^* n_g n_m^- f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2} \hat{d} d + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g f(s, \tau)]}$
$\min \ W_3 S G\ _\infty$	$\frac{\tilde{\chi}_3}{\lambda(-1)^{\sigma_2} n_n^- n_f d_{w_3}}$	$\frac{\tilde{\chi}_3 \hat{d} d + n_{w_3} (n_n^-)^2 (n_n^+)^* n_g n_y f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_3} \hat{d} d + n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}$
$\min \ W_4 T\ _\infty$	$\frac{n_m^- \lambda(-1)^{\sigma_1} n_f d_{w_4}}{\tilde{\chi}_4}$	$\frac{n_m^- [\lambda(-1)^{\sigma_1} n_f d_{w_4} \hat{d} d + n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}{\tilde{\chi}_4 \hat{d} d + n_m^- n_{w_4} n_x (n_n^+)^* n_n^- n_g f(s, \tau)}$

é apresentado em Francis (1987). Uma vez obtido $X_S(s)$, $Q(s)$ ótimo é calculado fazendo-se

$$Q(s) = T_{2o}^{-1}(s) X_S(s). \quad (14)$$

A principal vantagem do algoritmo apresentado em Francis (1987) é que, após todas as manipulações algébricas necessárias, expressões analíticas para os polinômios do numerador e denominador de $K_{imp}(s)$ e $K_\tau(s)$ podem ser obtidas (Moreira, 2002). Antes de apresentar essas expressões é importante fazer algumas definições. Assim sendo, considere as funções de transferência de $N(s)$ e $M(s)$ dadas por:

$$N(s) = \frac{n_n(s)}{d(s)} = \frac{n_n^+(s)n_n^-(s)}{d(s)} \text{ e} \quad M(s) = \frac{n_m(s)}{d(s)} = \frac{n_m^+(s)n_m^-(s)}{d(s)} \quad (15)$$

onde o sinal + na parte superior do polinômio significa que ele tem somente zeros instáveis e o sinal - significa que ele tem somente zeros estáveis. Escreva também $Y(s)$ e $X(s)$, bipróprias, como

$$Y(s) = \frac{n_y(s)}{\hat{d}(s)} \text{ e } X(s) = \frac{n_x(s)}{\hat{d}(s)} \quad (16)$$

e considere as funções de transferência de $f(s)$ e $g(s)$, necessárias em Francis (1987) para a obtenção de $X_S(s)$, dadas por:

$$f(s) = \frac{n_f(s)}{d_f(s)} \text{ e } g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)}. \quad (17)$$

Então, definindo $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$ e escrevendo a função de ponderação $W_i(s)$:

$$W_i(s) = \frac{n_{w_i}(s)}{d_{w_i}(s)}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4, \quad (18)$$

após longa e tediosa manipulação algébrica, expressões analíticas para $K_\tau(s)$ podem ser encontradas. No apêndice A, uma expressão para $K_\tau(s)$ para o problema H_∞

$\min \|W_2 S\|_\infty$ é obtida. Para se encontrar expressões analíticas para os controladores obtidos nos outros problemas H_∞ ($\min \|W_3 S G\|_\infty$ e $\min \|W_4 T\|_\infty$) basta proceder de forma similar. A expressão para $K_{imp}(s)$ é obtida diretamente de $K_\tau(s)$ fazendo-se $\tau = 0$. Na tabela 1 são apresentadas as fórmulas para $K_\tau(s)$ e $K_{imp}(s)$ para todos os problemas H_∞ , onde σ_1 é igual ao grau de $n_m^+(s)$, σ_2 é igual ao grau de $n_n^+(s)$ e $\tilde{\chi}_1(s)$, $\tilde{\chi}_2(s)$, $\tilde{\chi}_3(s)$ e $\tilde{\chi}_4(s)$ são polinômios dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 &= [n_m^- n_{w_1} n_g (n_m^+)^* - \lambda(-1)^{\sigma_1} n_f n_n d_{w_1}] / n_n^+ \\ \tilde{\chi}_2 &= [(n_m^+)^* n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2} n_m^+] / n_n^+ \\ \tilde{\chi}_3 &= [(n_n^+)^* n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_3} n_m] / n_n^+ \\ \tilde{\chi}_4 &= [n_{w_4} (n_n^+)^* n_n^- n_g - \lambda(-1)^{\sigma_1} n_f d_{w_4} n_n] / n_m^+. \end{aligned}$$

As expressões na tabela 1 levam à identificação de pólos e zeros estáveis comuns em $K_{imp}(s)$ que podem ser cancelados (ver apêndice para maiores detalhes). Além disso, o seguinte resultado pode ser obtido.

Lema 2 Seja

$$K_{imp}(s) = \frac{b_{imp}(s)}{a_{imp}(s)},$$

onde $b_{imp}(s)$ e $a_{imp}(s)$ são os polinômios obtidos antes dos cancelamentos de pólos e zeros coincidentes, e seja

$$K_\tau(s) = \frac{b_\tau(s)}{a_\tau(s)}.$$

Então $b_\tau(s) = b_{imp}(s) + b(s)f(s, \tau)$ e $a_\tau(s) = a_{imp}(s) + a(s)f(s, \tau)$, onde $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$, $gr[b(s)f(s, \tau)] = gr[b_{imp}(s)]$, $gr[a(s)f(s, \tau)] = gr[a_{imp}(s)] + \zeta$, com $gr(\cdot)$ denotando grau, $a(s)$ e $b(s)$ sendo polinômios e ζ denotando o grau relativo da função de transferência da planta.

Prova. É fácil verificar que $gr[b(s)] = gr[b_{imp}(s)] - \nu$ e, portanto, $gr[b(s)f(s, \tau)] = gr[b_{imp}(s)]$. O mesmo procedimento pode ser utilizado para mostrar que $gr[a(s)f(s, \tau)] = gr[a_{imp}(s)] + \zeta$. \square

Teorema 3 Considere $K_{imp}(s)$ e $K_\tau(s)$ definidos de acordo com o lema 2. Então para τ suficientemente pequeno, $a_\tau(s) \approx a_{imp}(s) \prod_{i=1}^{\zeta} (s-p_i)$, onde p_i são os pólos adicionados a $K_\tau(s)$ para torná-lo próprio. Além disso, $b_\tau(s) \approx k_\tau b_{imp}(s)$, onde k_τ é tal que $K_{imp}(0) = K_\tau(0)$.

Prova. Uma vez que $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$ então todos os coeficientes de $b(s)f(s, \tau)$ e $a(s)f(s, \tau)$ dependem de τ . Para τ suficientemente pequeno, eles podem ser vistos como perturbações nos coeficientes dos polinômios do numerador e denominador de $K_{imp}(s)$ e, portanto, usando Bhattacharyya et al. (1995, teorema 1.3) conclui-se que $a_\tau(s)$ e $b_\tau(s)$ terão zeros próximos dos zeros de $a_{imp}(s)$ e $b_{imp}(s)$. Além disso, uma vez que $q_\tau(s) = q_{imp}(s)/(\tau s + 1)^\nu$ então $K_{imp}(0) = K_\tau(0)$. \square

A partir do teorema 3 observa-se que ao se escolher adequadamente τ , $K_\tau(s)$ possuirá pólos e zeros quase canceláveis, o que sugere o uso de redução por truncamento balanceado para eliminar os modos pouco controláveis e/ou observáveis de $K_\tau(s)$, obtendo-se, então, o controlador reduzido $K_{bal}(s)$. A vantagem do uso de redução por truncamento balanceado está no fato de que como $K_\tau(s)$ e $K_{bal}(s)$ possuem respostas em frequência relativamente próximas, o custo H_∞ em consideração não será demasiadamente deteriorado. É importante ressaltar ainda que a redução de ordem não é livre e deve ser tal que $K_{bal}(s)$ e $K_{imp}(s)$ (após o cancelamento de pólos e zeros exatos) tenham o mesmo número de zeros e $K_{bal}(s)$ e $K_\tau(s)$ tenham o mesmo número de pólos instáveis. Um algoritmo robusto para a redução por truncamento balanceado foi proposto por Garcia and Basilio (2002). A principal vantagem desse algoritmo é não requerer que seja obtida uma realização de ordem mínima para o controlador antes de se efetuar o truncamento balanceado.

3.2 Controle robusto H_∞ com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa

Seja \underline{p}^0 o vetor de parâmetros formado com os coeficientes de $K_{bal}(s)$ (supondo o denominador mônico e o coeficiente da potência de s de maior grau invariante). Uma forma de incorporar o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa no projeto do controlador H_∞ seria encontrar uma região de estabilidade, Ω , no espaço de parâmetros do controlador, formada por todos os pontos \underline{p} que representam controladores que estabilizam o sistema em malha fechada. Em seguida, entre todos os pontos $\underline{p} \in \Omega$ se encontraria aquele representando a melhor margem de estabilidade paramétrica e adequado valor para o custo H_∞ em consideração. Po-

rém, em geral, a região de estabilidade Ω possui elevada complexidade o que torna difícil a aplicação deste método. Para contornar este problema, o objetivo de margem de estabilidade paramétrica pode ser incorporado de maneira mais simples, realizando uma busca somente na vizinhança de \underline{p}^0 . Para os casos em que o controlador robusto ótimo é impróprio, \underline{p}^0 está associado a um controlador robusto subótimo. Portanto, uma vez que controladores subótimos não são únicos, admitir pequenas perturbações sobre \underline{p}^0 é o mesmo que buscar outro controlador, também subótimo, mas que possua boa margem de estabilidade paramétrica relativa.

Assim sendo, o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa pode ser incorporado ao problema H_∞ resolvendo-se o seguinte problema. Seja μ_0 a margem de estabilidade paramétrica relativa associada a \underline{p}^0 e suponha que μ_* seja a margem de estabilidade paramétrica relativa desejada para o sistema em malha fechada. Encontre um novo vetor de parâmetros $\underline{p}^* \in \Omega$, perturbando-se apropriadamente os coeficientes de \underline{p}^0 , com margem de estabilidade paramétrica relativa μ_* . Um procedimento de busca para se obter \underline{p}^* será proposto no algoritmo a seguir.

Algoritmo 1

PASSO 1: Faça $k = 1$.

PASSO 2: Defina um valor $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno e, a partir de \underline{p}^{k-1} (onde, para $k = 1$, $\underline{p}^{k-1} = \underline{p}^0$, vetor de parâmetros do controlador nominal) encontre um número finito n de pontos $\underline{p}_i \in \Omega$, onde $\underline{p}_i = \underline{p}^{k-1} + \Delta \underline{p}_i$, $i = 1, \dots, n$, tais que $\|\underline{p}_i - \underline{p}^{k-1}\|_2 = \epsilon$;

PASSO 3: Seja i_{max} o índice correspondente à margem de estabilidade paramétrica relativa μ_i para o qual μ_i é máximo. Defina $\underline{p}^k = \underline{p}^{k-1} + \Delta \underline{p}_{i_{max}}$ e $\mu_k = \mu_{i_{max}}$.

PASSO 4: Se $\mu_k < \mu_*$ e $\mu_k > \mu_{k+1}$ faça $k = k + 1$. Volte para o passo 2. Se $\mu_k < \mu_*$ e $\mu_k < \mu_{k-1}$, então \underline{p}^{k-1} corresponde a um máximo local. Defina $\underline{p}_L = \underline{p}^{k-1}$ e $\mu_L = \mu_{k-1}$ e faça $\underline{p}^* = \underline{p}_L$. Pare o algoritmo. Se $\mu_k > \mu_*$ use bisseção entre os pontos \underline{p}^k e \underline{p}^{k-1} até encontrar \underline{p}^* para o qual a margem de estabilidade paramétrica relativa do sistema é μ_* . \square

Observação 2

(a) A obtenção dos pontos $\underline{p}_i \in \Omega$ de acordo com o passo 1 do algoritmo 1 é feita encontrando-se um número finito de pontos pertencentes a uma bola centrada em \underline{p}^0 e raio ϵ . Por exemplo, quando $\underline{p}^0 \in \mathbb{R}^3$, uma maneira de se proceder a essa escolha é utilizar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em que $r = \epsilon$, e θ e ϕ variam, respectivamente, de 0 a 2π e $-\pi$ a π em passos iguais, sendo que a largura será deter-

minada em função do número de pontos desejados para representar a bola. Evidentemente quanto menor o passo maior será o esforço computacional. Por outro lado, o passo não poderá ser demasiadamente grande pois isto pode levar a uma direção de busca, a ser determinada no passo 2, muito diferente daquela que leva a um maior aumento na margem de estabilidade paramétrica relativa. Finalmente, deve-se ressaltar que com o aumento da ordem do controlador o esforço computacional torna-se maior.

- (b) Note que o algoritmo 1 fornece um controlador obtido perturbando-se o mínimo possível os parâmetros do controlador H_∞ nominal e que tenha margem de estabilidade paramétrica relativa exatamente igual a μ_* (exceto no caso em que um ponto de máximo local \underline{p}_L é obtido). Isto leva à necessidade de, após encontrar um valor $\mu_k > \mu_*$, proceder à bisseção sugerida no passo 4 do algoritmo 1. Quando se está simplesmente buscando um novo controlador com margem de estabilidade paramétrica relativa maior que μ_* , não há a necessidade de se executar a bisseção.
- (c) É importante ressaltar que nem sempre é possível obter um controlador com determinada margem de estabilidade μ_* . Isto deve à complexidade da região de controladores estabilizantes, que é não-convexa, e, portanto, não garante que próximo do ponto \underline{p}^0 haja um controlador com a margem de estabilidade especificada. É por essa razão que nos passos 3 e 4 do algoritmo 1 é dito que quando não é possível encontrar \underline{p}^* (correspondente a μ_*) deve-se, então, obter \underline{p}_L (com margem de estabilidade μ_L). Este caso não ocorreu no cálculo de nenhum dos controladores H_∞ subótimos projetados a partir dos controladores obtidos por Keel and Bhattacharyya (1997), conforme pode ser visto em Moreira (2002). □

A busca pelo ponto \underline{p}^* representando um controlador de margem de estabilidade paramétrica relativa μ_* , requerida no passo 4 do algoritmo 1, pode ser computacionalmente menos onerosa utilizando-se o resultado do seguinte teorema.

Teorema 4 Suponha que o polinômio do denominador de $K(s)$ seja mônico e que o coeficiente do termo de maior grau não pode variar. Suponha também que $G(s)$ é estritamente própria. Então o sistema em malha fechada tem margem de estabilidade paramétrica relativa maior ou igual a $\hat{\mu}_* > 0$ se e somente se as seguintes

condições forem satisfeitas:

$$\underline{p}^T \left\{ \hat{\mu}_*^2 I - A^T(j\omega) [\hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega)]^{-1} \hat{A}(j\omega) \right\} \underline{p} \leq \hat{\mu}_*^2, \forall \omega > 0 \quad (19)$$

$$\hat{\underline{p}}^T \left\{ \hat{\underline{a}}^T(0) [\hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{a}}^T(0)]^{-1} \hat{\underline{a}}(0) - \hat{\mu}_*^2 \right\} \hat{\underline{p}} \geq 0, \omega = 0, \quad (20)$$

onde \underline{p} é o vetor formado por todos os coeficientes de $K(s)$ e $\hat{\underline{p}}$ é o vetor formado por todos os coeficientes de $K(s)$ que podem variar, $A(j\omega)$ e $\underline{a}(0)$ são definidos de acordo com (3) e (4), respectivamente e $\hat{A}(j\omega)$ e $\hat{\underline{a}}(0)$ são formados pelas colunas de $A(j\omega)$ e $\underline{a}(0)$, respectivamente, exceto pela última coluna.

Prova. Pode ser diretamente verificado a partir da definição de margem de estabilidade paramétrica relativa (equação 7) e das equações (3) e (4). □

Observação 3 Note que como a margem de estabilidade paramétrica é calculada frequência a frequência, o uso do teorema 4 elimina, em geral, o cálculo desnecessário para frequências maiores que uma determinada frequência $\tilde{\omega}$ quando para esta frequência as desigualdades (19) ou (20) não são verificadas. Isto é adequado para o processo de bisseção sugerido no passo 4 do algoritmo 1, uma vez que o vetor \underline{p}^* será tomado na direção definida pelos pontos \underline{p}^k e \underline{p}^{k-1} . □

4 EXEMPLOS

Para ilustrar os resultados apresentados neste artigo, serão considerados os exemplos 1, 2 e 3 de Keel and Bhattacharyya (1997).

Exemplo 1 Considere o exemplo 1 apresentado em Keel and Bhattacharyya (1997). O objetivo de projeto neste exemplo é a otimização da margem de ganho superior. A função de transferência da planta é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

e o controlador projetado para fornecer uma margem de ganho superior de 3,5 é obtido otimizando a norma infinita de uma função de sensibilidade complementar. O controlador encontrado é:

$$K(s) = \frac{p_7^0 s^6 + p_6^0 s^5 + p_5^0 s^4 + p_4^0 s^3 + p_3^0 s^2 + p_2^0 s + p_1^0}{p_{14}^0 s^6 + p_{13}^0 s^5 + p_{12}^0 s^4 + p_{11}^0 s^3 + p_{10}^0 s^2 + p_9^0 s + p_8^0},$$

onde

$$\begin{array}{ll}
p_7^0 = 379 & p_{14}^0 = 3 \\
p_6^0 = 39383 & p_{13}^0 = -328 \\
p_5^0 = 192306 & p_{12}^0 = -38048 \\
p_4^0 = 382993 & p_{11}^0 = -179760 \\
p_3^0 = 383284 & p_{10}^0 = -314330 \\
p_2^0 = 192175 & p_9^0 = -239911 \\
p_1^0 = 38582 & p_8^0 = -67626
\end{array}$$

Para este controlador a margem de ganho inferior é $[1, 0, 9992]$ e a margem de fase é $[0, 0, 1681]$ graus. A partir desses valores, observa-se que pequenas variações no ganho ou na fase podem tornar o sistema realimentado instável. Deve-se observar que esses baixos valores de margem de fase e de ganho são esperados. Isto se deve à forma como o problema foi formulado, isto é, à minimização da margem de ganho superior. Observe que, como a planta $G(s)$ e o controlador $K(s)$ têm um pólo instável cada ($s = 2$ e $s = 174,70$, respectivamente) então para a estabilidade do sistema realimentado o diagrama de Nyquist de $G(s)K(s)$ deve envolver o ponto $-1 + j0$ duas vezes em sentido anti-horário. Pelo fato de $G(s)$ ter grau relativo 1, então a margem de ganho máxima dar-se-á para $\omega = 0$. Note que ao se tentar maximizar a margem de ganho superior, o que se deseja é deslocar o ponto de interseção do diagrama de Nyquist do sistema em direção à origem. Como consequência tem-se que o diagrama de Nyquist de $G(s)K(s)$ tenderá a se deslocar para a direita, reduzindo, portanto, a margem de ganho inferior. Isto faz com que a margem de estabilidade paramétrica relativa para este controlador seja também extremamente baixa, isto é, $\mu = 2,103407115900516 \times 10^{-7}$.

A maneira correta de abordar esse problema é através da maximização da margem de ganho-fase, que pode ser escrito como um problema $H_\infty \min \|S\|_\infty$ (Garcia, 2000). Para este problema, o controlador ótimo impróprio é dado por:

$$K_{imp}(s) = \frac{-4(s+1)}{3}$$

e, para $K_{imp}(s)$, tem-se que $\|S\|_\infty = 3$. Fazendo-se $q_\tau(s) = q_{imp}(s)/(0,001s+1)$ resulta:

$$K_\tau(s) = \frac{4027(s+2,9584)(s+2,0145)(s+1)}{(s-3022,97)(s+2,9557)(s+2,0146)},$$

com custo H_∞ aproximadamente igual a 3,02169 e margem de estabilidade paramétrica $\hat{\mu}_\tau \approx 0,0117$. Reduzindo-se a ordem do controlador por truncamento balanceado obtém-se:

$$K_{bal}(s) = \frac{4027s + 4037,5}{s - 3023}$$

com custo H_∞ aproximadamente igual a 3,02195 e margem de estabilidade paramétrica relativa $\hat{\mu}_{bal} \approx 0,1098$.

É importante ressaltar que, neste caso, a redução por truncamento balanceado foi suficiente para encontrar-se um controlador robusto com praticamente mesmo custo H_∞ que $K_\tau(s)$ e com margem de estabilidade paramétrica relativa muito maior (cerca de 9,4 vezes maior). Além disso, para $K_{bal}(s)$ tem-se que a margem de ganho inferior é $[1, 0, 7512]$, a margem de ganho superior é $[1, 1, 4975]$ e margem de fase é $[0, -19, 2241]$ graus.

Exemplo 2 Considere o seguinte controlador arbitrário:

$$K_a(s) = \frac{11,44974739s + 11,24264066}{s - 7,03553383},$$

utilizado em Keel and Bhattacharyya (1997) para comparação com o controlador robusto projetado para otimizar a margem de ganho superior. Este controlador possui margem de estabilidade paramétrica relativa $\hat{\mu} = 0,07219317556675$.

Considere agora o problema H_∞ de robustez com perturbação aditiva na planta, $\min \|KS\|_\infty$, para a mesma função de transferência da planta do exemplo 1. Para esse caso o controlador ótimo é próprio e tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = \frac{12s + 12}{s - 7}, \quad (21)$$

cuja margem de estabilidade paramétrica relativa é $\hat{\mu} = 0,04872255371341$.

Note que os coeficientes de $K_a(s)$ e de $K(s)$, descrito por (21), são bastante próximos, o que sugere que aplicando-se o algoritmo 1, é possível obter $K_a(s)$ a partir de $K(s)$. De fato, aplicando-se o procedimento proposto no algoritmo 1 constrói-se a tabela 2, de onde se pode observar que é possível aumentar a margem de estabilidade paramétrica relativa com pequena deterioração do custo H_∞ considerado. Desta forma, o controlador arbitrário apresentado em Keel and Bhattacharyya (1997) pode ser visto como um controlador robusto subótimo para $\min \|KS\|_\infty$ ao se incorporar o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa. Note ainda que, controladores com margem de estabilidade paramétrica relativa melhores que a obtida para $K_a(s)$ podem também ser obtidos, conforme mostra a tabela 2, podendo ser inclusive obtidos controladores com margem de estabilidade paramétrica relativa ainda maiores que 0,1.

Exemplo 3 Considere agora o exemplo 3 apresentado em Keel and Bhattacharyya (1997). O problema H_∞ neste caso é $\min \|W_4T\|_\infty$, onde $W_4(s)$ é uma função de ponderação dada por:

$$W_4(s) = \frac{s + 0,1}{s + 1},$$

Tabela 2: Controladores H_∞ não frágeis

$\hat{\mu}_*$	$K(s)$	$\ KS\ _\infty$
0,0487	$\frac{12s + 12}{s - 7}$	12
0,06	$\frac{12,2652s + 11,9532}{s - 7,2260}$	12,9664
0,08	$\frac{12,7485s + 11,8680}{s - 7,6378}$	14,9940
0,10	$\frac{13,2554s + 11,7786}{s - 8,0696}$	17,5787

e $T(s)$ é a função de sensibilidade complementar. A função de transferência da planta é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 0,5s - 0,5}.$$

O controlador ótimo impróprio para este problema é

$$K_{imp}(s) = \frac{-1,2(s + 1)}{2,2},$$

e para $K_{imp}(s)$ tem-se que $\|W_4T\|_\infty = 1,2$. Fazendo $q_\tau(s) = q_{imp}(s)/(0,01s + 1)$, obtém-se o seguinte controlador próprio:

$$K_\tau(s) = \frac{-124,5s^3 - 364,95s^2 - 360,45s - 120}{s^3 + 227,1s^2 + 440,7s + 220},$$

para o qual $\|W_4T\|_\infty \approx 1,2396$ e $\hat{\mu}_\tau \approx 0,0117$. Utilizando-se o resultado do teorema 3, observa-se que neste caso é possível reduzir a ordem de $K(s)$ por truncamento balanceado obtendo-se $K_{bal}(s)$ com o mesmo número de zeros de $K_{imp}(s)$, com a seguinte função de transferência:

$$K_{bal}(s) = \frac{-124,5s - 121,8078}{s + 225,1471}.$$

Para $K_{bal}(s)$, tem-se que $\|W_4T\|_\infty \approx 1,3170$ e $\hat{\mu}_{bal} \approx 0,029$, o que representa um aumento de mais de 100% na margem de estabilidade paramétrica relativa com uma deterioração em $\|W_4T\|_\infty$ de apenas 6,24%. Aplicando-se agora o algoritmo 1 a $K_{bal}(s)$, obtém-se a tabela 3, onde se observa que, com pequena deterioração do custo H_∞ , é possível encontrar controladores robustos subótimos com boa margem de estabilidade paramétrica relativa. Note ainda que o primeiro controlador apresentado na tabela 3 possui margem de estabilidade paramétrica $\hat{\mu}_* \approx 0,04$ e, portanto, é bem menos frágil do que o controlador $K_\tau(s)$ com aproximadamente mesmo valor para o custo H_∞ .

5 CONCLUSÕES

Neste artigo, o problema de fragilidade de controladores robustos H_∞ apresentado por Keel and Bhattacharyya

Tabela 3: Controladores H_∞ não frágeis

$\hat{\mu}_*$	$K(s)$	$\ W_4T\ _\infty$
0,04	$\frac{-124,5s - 124,5162}{s + 223,5834}$	1,2636
0,06	$\frac{-124,5s - 129,4511}{s + 220,7343}$	1,4078
0,08	$\frac{-124,5s - 134,3986}{s + 217,8788}$	1,5810
0,10	$\frac{-124,5s - 139,3588}{s + 215,0140}$	1,7788

(1997) foi considerado novamente e foi desenvolvido um método sistemático para se obter, se existir, um controlador robusto H_∞ subótimo, com margem de estabilidade paramétrica relativa maior que a fornecida pelo controlador H_∞ nominal, ou seja, obter um controlador H_∞ subótimo não frágil.

Os exemplos usados em Keel and Bhattacharyya (1997) para sugerir a fragilidade dos controladores H_∞ foram reexaminados e foi mostrado que, mesmo para esses exemplos, é possível obter-se controladores subótimos com melhor margem de estabilidade paramétrica relativa. Isto sugere que o problema de fragilidade não pode ser diretamente associado à otimização H_∞ .

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pelo CNPq (projeto de pesquisa no 352810/96-3).

APÊNDICE A: EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA $K_{IMP}(S)$ E $K_\tau(S)$ SOLUÇÕES DO PROBLEMA MIN $\|W_2S\|_\infty$

Como $S(s) = [1 + G(s)K(s)]^{-1}$, então utilizando-se as expressões (8), (15) e (16) tem-se, para o problema de min $\|W_2S\|_\infty$, que $T_1(s)$ e $T_2(s)$ correspondentes ao problema de casamento de modelos equivalente são dados por:

$$\begin{aligned} T_1(s) &= W_2(s)X(s)M(s) = \frac{n_{w_2}n_xn_m}{d_{w_2}\hat{d}} e \\ T_2(s) &= W_2(s)N(s)M(s) = \frac{n_{w_2}n_nn_m}{d_{w_2}d^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Note que, realizando-se fatoração ‘inner-outer’ de $T_2(s)$ encontra-se:

$$T_{2_i}(s) = \frac{n_n^+n_m^+}{(n_n^+)^*(n_m^+)^*} e T_{2_o}(s) = \frac{n_{w_2}(n_n^+)^*(n_m^+)^*n_n^-n_m^-}{d_{w_2}d^2}. \quad (23)$$

O próximo passo é a obtenção de uma expressão para $R(s)$, que de acordo com (12) é dada por:

$$R(s) = T_{2_i}^* T_1 = \frac{(n_n^+)^* (n_m^+)^* n_x n_m^- n_{w_2}}{n_n^+ \hat{d} d d_{w_2}}. \quad (24)$$

Fatorando-se $R(s)$ como $R_+(s) + R_-(s)$ onde $R_+(s)$ é anti-estável e $R_-(s)$ é estável obtém-se:

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s) = \frac{n_{r_+}}{n_n^+} + \frac{n_{r_-}}{\hat{d} d d_{w_2}}, \quad (25)$$

onde $n_{r_+}(s)$ e $n_{r_-}(s)$ representam os numeradores de $R_+(s)$ e $R_-(s)$, respectivamente.

O passo seguinte, de acordo com o algoritmo apresentado em Francis (1987), é obter expressões para $f(s)$ e $g(s)$:

$$f(s) = \frac{n_f}{n_n^+} \quad \text{e} \quad g(s) = (-1)^{\sigma_2} \frac{n_g}{(n_n^+)^*},$$

onde σ_2 é o grau de n_n^+ . Uma vez obtidas expressões para $f(s)$ e $g(s)$ é necessário agora obter expressões para $V(s)$ e $U(s)$ para então encontrar $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$. Como serão considerados tanto o controlador impróprio $K_{imp}(s)$ quanto o controlador próprio $K_\tau(s)$, inicialmente será obtida uma expressão analítica para $K_\tau(s)$, e em seguida, fazendo-se $\tau = 0$ será obtida uma expressão para o controlador impróprio $K_{imp}(s)$. Desta forma, utilizando-se as expressões (13) e (14) e fazendo-se uma aproximação sobre $Q_{imp}(s)$ para tornar $Q(s)$ próprio, resulta:

$$X_S(s) = T_{2_o} Q_\tau = \left(R - \lambda \frac{f}{g} \right) \frac{1}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (26)$$

Observe que

$$\frac{1}{(\tau s + 1)^\nu} = 1 - \frac{(\tau s + 1)^\nu - 1}{(\tau s + 1)^\nu} = 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}, \quad (27)$$

onde

$$f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1. \quad (28)$$

Note que $f(s, \tau) = 0$ para $\tau = 0$. Utilizando (27) e lembrando que $R(s) = T_{2_i}^* T_1$, tem-se que:

$$T_{2_o} Q_\tau = \left(R - \lambda \frac{f}{g} \right) \left(1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right) = \left(T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left(1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right). \quad (29)$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por T_{2_i} e reorganizando-a obtém-se:

$$T_1 - T_2 Q_\tau = \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left(T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (30)$$

Note ainda que, de acordo com as equações (22), $T_1 - T_2 Q_\tau$ pode ser escrito como

$$T_1 - T_2 Q_\tau = W_2 M V, \quad (31)$$

e, assim, igualando-se as equações (30) e (31) tem-se que:

$$W_2 M V = \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left(T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}.$$

Após algumas manipulações algébricas simples, porém tediosas, e usando-se a expressão (28), encontra-se a seguinte expressão para $V(s)$:

$$V = \frac{d_{w_2} d}{n_{w_2} n_m^-} \left[\frac{\lambda (-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2} \hat{d} d + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g f(s, \tau)}{(n_m^+)^* n_g d_{w_2} \hat{d} d (\tau s + 1)^\nu} \right] \quad (32)$$

O próximo passo é a obtenção de $U(s)$. Para tanto, note que:

$$U = Y + M Q_\tau,$$

e, portanto, multiplicando-se ambos os membros da equação acima por $T_{2_o}(s)$, obtém-se:

$$T_{2_o} U = T_{2_o} Y + M T_{2_o} Q_\tau.$$

Substituindo na expressão acima $T_{2_o} Q_\tau$ de acordo com a equação (29) resulta em:

$$T_{2_o} U = T_{2_o} Y + M \left(T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left(1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right).$$

Multiplicando-se, agora, ambos os termos da expressão acima por $T_{2_i}(s)$ e fazendo $T_1(s) = W_2(s)X(s)M(s)$ e $T_2(s) = W_2(s)N(s)M(s)$ tem-se que:

$$W_2 N U = W_2 (N Y + X M) - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} - \left(W_2 X M - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (33)$$

Note, pela identidade de Bezout, que $N Y + X M = 1$ e, portanto, a equação (33) acima pode ser reescrita como:

$$W_2 N U = W_2 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} - \left(W_2 X M - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (34)$$

A partir da equação (34), uma expressão para $U(s)$ pode ser finalmente obtida em (35).

Uma vez encontradas expressões para $U(s)$ e $V(s)$, uma expressão analítica para o controlador $K_\tau(s)$, próprio, é dada por:

$$K_\tau(s) = U(s)V^{-1}(s) = \frac{n_{K_\tau}(s)}{d_{K_\tau}(s)}, \quad (36)$$

$$U = \frac{d_{w_2}d}{n_{w_2}n_n} \left[\frac{(n_{w_2}(n_m^+)^*n_g\hat{d}d - \lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d)(\tau s + 1)^\nu}{d_{w_2}(n_m^+)^*n_g\hat{d}d(\tau s + 1)^\nu} + \frac{(\lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d - n_{w_2}n_x n_m(n_m^+)^*n_g)f(s, \tau)}{d_{w_2}(n_m^+)^*n_g\hat{d}d(\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (35)$$

onde

$$n_{K_\tau} = n_m^- \{ [n_{w_2}(n_m^+)^*n_g\hat{d}d - \lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d](\tau s + 1)^\nu + [\lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d - n_{w_2}n_x n_m(n_m^+)^*n_g]f(s, \tau) \} \quad (37)$$

e

$$d_{K_\tau} = n_n \{ \lambda(-1)^{\sigma_2}n_f d_{w_2}\hat{d}d + n_{w_2}n_x n_m^-(n_m^+)^*n_g f(s, \tau) \}. \quad (38)$$

Para obter a expressão para o controlador impróprio $K_{imp}(s)$ basta fazer $\tau = 0$ nas equações (37) e (38). Procedendo desta forma, obtém-se:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n} \left[\frac{n_{w_2}(n_m^+)^*n_g\hat{d}d - \lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d}{\lambda(-1)^{\sigma_2}n_f d_{w_2}\hat{d}d} \right]. \quad (39)$$

Observe que para o controlador impróprio $K_{imp}(s)$ há o cancelamento exato do polinômio de Hurwitz ($\hat{d}d$) resultando em:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n} \left[\frac{n_{w_2}(n_m^+)^*n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}}{\lambda(-1)^{\sigma_2}n_f d_{w_2}} \right]. \quad (40)$$

É importante ressaltar que o mesmo não ocorre para o controlador próprio $K_\tau(s)$, o que faz com que este tenha ordem significativamente maior que $K_{imp}(s)$. Além do cancelamento de ($\hat{d}d$), tanto o controlador próprio, $K_\tau(s)$, quanto o impróprio, $K_{imp}(s)$, possuem um cancelamento pouco evidente de n_n^+ . Considere inicialmente o cancelamento de $n_n^+(s)$ no controlador impróprio $K_{imp}(s)$. Para tanto, note que $X_S(s)$, solução do problema de Nehari correspondente a $\min \|W_2S\|_\infty$ é dado por:

$$X_S = R(s) - \lambda \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{(n_n^+)^*(n_m^+)^*n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f (n_n^+)^* \hat{d}d d_{w_2}}{n_g n_n^+ \hat{d}d d_{w_2}}.$$

De acordo com a teoria, $X_S(s)$ deve ser estável e portanto, o numerador de $X_S(s)$ pode ser reescrito como:

$$(n_m^+)^*n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f \hat{d}d d_{w_2} = n_n^+ \chi, \quad (41)$$

onde foi usado na equação acima o fato de que $n_n^+(s) \neq [n_n^+(s)]^*$ ¹. Pela identidade de Bezout e fazendo-se os denominadores de $N(s)$ e $M(s)$ iguais, e os denominadores

¹Caso $n_n^+ = 1$, então, de acordo com a equação (24) $R(s) \in RH_\infty$ e a solução do problema é trivial.

de $X(s)$ e $Y(s)$ iguais, tem-se que:

$$\hat{d}d = n_m n_x + n_n n_y.$$

Substituindo-se então $\hat{d}d$ na equação (41) e separando-se todos os termos dependentes de $n_n^+(s)$ à direita, encontra-se:

$$(n_m^+)^*n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f n_m n_x d_{w_2} = n_n^+ \chi + \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f n_n n_y d_{w_2} = n_n^+ \bar{\chi}.$$

Como $n_x(s)$ e $n_n^+(s)$ são coprimos², então:

$$(n_m^+)^*n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2} n_m^+ = n_n^+ \tilde{\chi}_2, \quad (42)$$

o que permite reduzir a equação (40) a:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n^-} \left[\frac{\tilde{\chi}_2}{\lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2}} \right]. \quad (43)$$

Considere agora o cancelamento de $n_n^+(s)$ no controlador próprio $K_\tau(s)$. Utilizando a definição de $f(s, \tau)$ na equação (37) tem-se, que o numerador de $K_\tau(s)$, $n_{K_\tau}(s)$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$n_{K_\tau} = [n_{w_2}(n_m^+)^*n_g - \lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}][(\tau s + 1)^\nu \hat{d}d n_m^-] + [\lambda(-1)^{\sigma_2}n_m^+n_f d_{w_2}\hat{d}d - n_{w_2}n_x n_m(n_m^+)^*n_g]f(s, \tau)n_m^-. \quad (44)$$

Substituindo $n_m n_x = \hat{d}d - n_n n_y$ na expressão acima e utilizando a equação (42) obtém-se:

$$n_{K_\tau} = n_n^+ \tilde{\chi}_2 [(\tau s + 1)^\nu \hat{d}d n_m^- - f(s, \tau)n_m^- \hat{d}d] + n_n n_{w_2} n_y (n_m^+)^* n_g f(s, \tau) n_m^-. \quad (45)$$

Pela equação acima e pela equação (38), verifica-se facilmente o cancelamento de $n_n^+(s)$ na expressão para $K_\tau(s)$. Portanto, utilizando em (45) o fato de que $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$ (28), e, de acordo com (38), $K_\tau(s)$ será dado por:

$$K_\tau(s) = \frac{n_m^- \tilde{\chi}_2 \hat{d}d + n_n^- n_{w_2} n_y (n_m^+)^* n_g n_m^- f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda(-1)^{\sigma_2} n_f d_{w_2} \hat{d}d + n_{w_2} n_x n_m (n_m^+)^* n_g f(s, \tau)]}. \quad (46)$$

²Para provar que $n_n^+(s)$ e $n_x(s)$ são coprimos basta usar a equação de Bezout.

REFERÊNCIAS

- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. and Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, Upper Saddle-River.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Famularo, D., Dorato, P., Abdallah, C. T., Haddad, W. M. and Jadbabaie, A. (2000). Robust non-fragile lq controllers: the static state feedback case, *International Journal of Control* **73**: 159–165.
- Francis, B. A. (1987). A course in H_∞ control theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88, Springer-Verlag, Berlin.
- Garcia, J. S. (2000). *Controle robusto H_∞ com objetivo de margens de estabilidade relativa*, Master's thesis, Instituto Militar de Engenharia.
- Garcia, J. S. and Basilio, J. C. (2002). Computation of reduced-order models of multivariable systems by balanced truncation, *International Journal of Systems and Science* **33**: 847–854.
- Haddad, W. M. and Corrado, J. R. (2000). Robust resilient dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variations, *Int. Journal of Control* **73**: 1405–1423.
- Ho, M. T., Datta, A. and Bhattacharyya, S. P. (2001). Robust and non-fragile pid controller design, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **11**: 681–708.
- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. (1997). Robust, fragile, or optimal?, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **42**: 1098–1105.
- Mäkilä, P. M. (1998). Comments on “robust, fragile, or optimal?”, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **43**: 1265–1267.
- Moreira, M. V. (2002). *Controladores robustos H_∞ não frágeis*, Master's thesis, UFRJ/COPPE - Departamento de Engenharia Elétrica.
- Paattilammi, J. and Mäkilä, P. M. (2000). Fragility and robustness: A case study on paper machine headbox control, *IEEE - Control Systems Magazine* **20**: 13–22.
- Yang, G. H. and Wang, J. L. (2001). Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations, *Automatica* **37**: 727–737.
- Yang, G. H., Wang, J. L. and Lin, C. (2000). H_∞ control for linear systems with additive controller gain variations, *International Journal of Control* **73**: 1500–1506.