

---

# CONTROLADOR EM MODO DUAL ADAPTATIVO ROBUSTO PARA PLANTAS COM GRAU RELATIVO UNITÁRIO: PROVA DE ESTABILIDADE

**Caio D. Cunha\***  
dorneles@ufrnet.br

**Aldayr D. Araújo\***  
aldayr@dca.ufrn.br

**Francisco C. Mota†**  
mota@dca.ufrn.br

\*Departamento de Engenharia Elétrica - UFRN  
59.072-970 Natal-RN, fone 84 3215 3732-fax 84 3215 3731

†Departamento de Engenharia de Computação e Automação - UFRN  
59.072-970 Natal-RN, fone 84 3215 3771-fax 84 3215 3738

---

## RESUMO

Neste artigo é apresentada uma prova de estabilidade para o controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto (DMARC) para plantas com grau relativo unitário. O DMARC é um controlador que interpola as estratégias de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) e o Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC) com o intuito de incorporar as vantagens de desempenho transitório de um VS-MRAC, com as propriedades de regime permanente de um MRAC convencional. Desta forma, deseja-se obter um sistema de controle robusto a incertezas paramétricas e perturbações externas, com desempenho rápido e pouco oscilatório durante o transitório e um sinal de controle suave em regime permanente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle em Modo Dual, Controle Adaptativo, Sistemas com Estrutura Variável.

## ABSTRACT

In this paper the stability proof to the Dual Mode Adaptive Robust Control (DMARC) applied to plants with relative degree one is presented. The DMARC is a control strategy which interpolates the Model Reference Adaptive Control (MRAC) and the Variable Structure Model Reference Adaptive Control (VS-MRAC). The main idea is to develop a robust controller to parametric uncertainties and external disturbances with good transient characteristics (fast response and small oscillations) as in a VS-MRAC and good steady-state characteristic (smooth control signal) as in a conventional MRAC.

**KEYWORDS:** Dual Mode Control, Adaptive Control, Variable Structure Systems.

## 1 INTRODUÇÃO

O Controlador DMARC teve seu início a partir da idéia proposta por Hsu e Costa (1989). Os autores utilizaram uma expressão que, dependendo da escolha de um parâmetro, podia se comportar como o Controlador MRAC ou como o Controlador VS-MRAC. Essa expressão, para a lei de adaptação dos parâmetros do controlador, foi utilizada para justificar que o VS-MRAC pode ser visto como um controlador adaptativo sem memória e com aprendizado instantâneo (ver Hsu

---

### ARTIGO CONVIDADO:

Versão completa e revisada de artigo apresentado no SBAI-2005

Artigo submetido em 21/06/2006

1a. Revisão em 14/08/2006

2a. Revisão em 13/12/2006

3a. Revisão em 23/02/2007

Aceito sob recomendação do Editor Convidado

Prof. Osvaldo Ronald Saavedra Mendez

e Costa (1989) e (1990)).

A partir da teoria de controle binário desenvolvida por Emelyanov (1987), Hsu e Costa (1990) propuseram um Controlador Binário Adaptativo por Modelo de Referência (B-MRAC) para plantas com grau relativo ( $n^*$ ) igual a 1 e depois generalizado em Hsu e Costa (1994), para plantas com grau relativo ( $n^*$ ) arbitrário. No B-MRAC é utilizada uma lei gradiente de adaptação de alto ganho com projeção, a qual com um parâmetro fixo suficientemente alto tende ao VS-MRAC.

No controlador MRAC convencional, que usa leis integrais de adaptação, a saída da planta segue um modelo de referência especificado (Ioannou e Sun (1996), Åström e Wittenmark (1995), Sastry e Bodson (1989) e Narendra e Anaswamy (1988)). Mesmo com as modificações para aumentar a robustez do algoritmo convencional (fator  $\sigma$ , normalização, etc.) (Ioannou e Sun, 1996) em geral o transitório é lento e oscilatório.

No VS-MRAC, utiliza-se a estrutura de controle por modelo de referência do MRAC e leis chaveadas, como nos sistemas com estrutura variável, para o sinal de controle (Hsu e Costa (1989), Hsu, Araújo e Costa (1994), Hsu, Lizarralde e Araújo (1997), Cunha e outros (2003)). Apesar do bom desempenho transitório, em geral temos a presença do fenômeno de “*chattering*”.

O Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto propõe uma ligação entre o VS-MRAC e o MRAC convencional. O objetivo é conseguir um sistema robusto, com desempenho rápido e pouco oscilatório (características do VS-MRAC), e sinal de controle suave em regime permanente (característica do MRAC).

Uma versão inicial do controlador DMARC, utilizando a lei de adaptação proposta em Hsu e Costa (1989), foi apresentada nos artigos Cunha e outros (2005) e Mota e Araújo (2002). Nesses trabalhos, o parâmetro que dita a transição entre as duas estratégias de controle (MRAC e VS-MRAC) é ajustado em tempo real, utilizando a lógica fuzzy.

Neste trabalho, é proposta uma modificação da lei de adaptação inicial do DMARC utilizada nos trabalhos anteriores (Cunha e Araújo(2004) e Cunha e outros (2005)). Foi acrescentado um termo na lei de adaptação para eliminar os termos de sinais indefinidos que aparecem na derivada da função de Lyapunov.

Esse artigo é organizado como segue. Na seção 2 é dada a formulação do sistema a ser controlado. Os controladores MRAC convencional, VS-MRAC, B-MRAC e DMARC são apresentados nas seções 3, 4, 5 e 6 respectivamente. A análise de estabilidade é feita na seção 7. Na seção 8 é mostrada uma das possíveis formas de ajuste do DMARC, a qual é uti-

lizada nas simulações da seção 9.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere uma planta linear com parâmetros incertos monovariável e invariante no tempo com função de transferência

$$W(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (1)$$

com entrada  $u$  e saída  $y$  e o modelo de referência tendo a entrada  $r$  e a saída  $y_m$  caracterizado pela função de transferência

$$M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (2)$$

Tem-se como objetivo determinar  $u$  tal que o erro de saída

$$e_0 = y - y_m \quad (3)$$

tenda a zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias e sinais de referência  $r(t)$  uniformemente limitados e contínuos por partes.

As seguintes hipóteses convencionais são feitas (Sastry e Bodson (1989), pag. 103-104):

- a. A planta é controlável e observável com  $\text{grau}[D_p(s)] = n$  e  $\text{grau}[N_p(s)] = m$ ,  $n$  e  $m$  conhecidos;
- b.  $\text{sgn}(k_p) = \text{sgn}(k_m)$ , positivos, sem perda de generalidade;
- c.  $N_p(s)$  é Hurwitz ( $W(s)$  é de fase mínima);
- d. O modelo de referência é estritamente real positivo (ERP) e tem o mesmo grau relativo da planta ( $n^* = n - m = 1$ );
- e. Considera-se apenas a realimentação de saída da planta.

São usados os seguintes filtros de entrada e saída da planta

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu \\ \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + gy \end{cases} \quad (4)$$

sendo  $v_1$  e  $v_2$  pertencentes ao  $\mathfrak{R}^{n-1}$ ,  $g$  pertence ao  $\mathfrak{R}^{n-1}$  e  $\Lambda$  uma matriz estável pertencente ao  $\mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ , escolhidos

tal que o par  $(\Lambda, g)$  é controlável e  $N_m(s) = \det(sI - \Lambda)$ . Define-se o vetor regressor como  $\omega^T = [v_1^T \ y \ v_2^T \ r]$ . O controle é, então, definido como

$$u = \theta(t)^T \omega(t) \quad (5)$$

onde  $\theta(t)^T = [\theta_{v_1}^T(t) \ \theta_n(t) \ \theta_{v_2}^T(t) \ \theta_{2n}(t)]$  é o vetor de parâmetros adaptativos (Ioannou e Sun (1996), pag. 384).

Sabe-se que, sob as hipóteses acima, existe um único vetor constante  $\theta^*$  tal que a função de transferência da planta em malha fechada (com  $u = \theta^{*T} \omega$ ), de  $r$  para  $y$ , é  $M(s)$  (condição de “*Matching*”). Obviamente  $\theta^*$  somente pode ser conhecido se a planta for conhecida. Quando isto não é o caso,  $\theta(t)$  é adaptado até que  $e_0(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e, sob alguma condição de riqueza de sinal,  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  (Ioannou e Sun (1996), Pag. 177).

Seja  $[A, b, h^T]$  uma realização mínima da planta e  $x \in \mathbb{R}^n$  o respectivo vetor de estado. Então, a planta com os filtros podem ser representados como

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_0 x_c + b_0 u \\ y &= h_c^T x_c \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $x_c^T = [x^T, v_1^T, v_2^T]$ ,  $x_c \in \mathbb{R}^{3n-2}$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_c^T = [h^T \ 0 \ 0]$$

Nota-se que  $\omega = \Omega x_c + b_r r$  com

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_c = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } b_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} (u - \theta^{*T} \omega) + b_c r \\ y &= h_c^T x_c \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $A_c = A_0 + b_0 \theta_r^{*T} \Omega_c$ ,  $\theta_r^{*T} = [\theta_1^* \dots \theta_{2n-1}^*]$ ,  $b_c = \theta_{2n}^* b_0$ ,  $\theta_{2n}^* = k_m / k_p > 0$ .

$[A_c, b_c, h_c^T]$  é uma realização não mínima e estável de  $M(s)$  (Sastry, (1984)), ou seja, o modelo de referência pode ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= A_c x_{cm} + b_c r, \quad x_{cm} \in \mathbb{R}^{3n-2} \\ y_m &= h_c^T x_{cm} \end{aligned} \quad (8)$$

Definindo o vetor de erro por  $e = x_c - x_{cm}$  tem-se a seguinte equação de erro

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e_c + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} (u - \theta^{*T} \omega) \\ e_0 &= h_c^T e \end{aligned} \quad (9)$$

e, na forma entrada saída,

$$e_0 = \frac{1}{\theta_{2n}^*} M(u - \theta^{*T} \omega) \quad (10)$$

### 3 MRAC CONVENCIONAL

No MRAC o desempenho desejado para a planta é definido por um modelo de referência. A função de transferência para o modelo de referência deve ser definida com a mesma ordem do modelo nominal da planta. O objetivo do MRAC é que a planta siga o modelo (condição de “*matching*”).

Se os parâmetros da planta são conhecidos com exatidão, têm-se os valores dos parâmetros do controlador  $\theta^*$  para os quais a saída da planta converge para a saída do modelo (Ioannou e Sun(1996), pag. 333). Porém, se esses parâmetros são desconhecidos ou conhecidos com incertezas, torna-se necessária uma adaptação para os parâmetros do controlador. No MRAC o sinal de controle é dado por

$$u = \theta^T \omega \quad (11)$$

e a lei original de adaptação por

$$\dot{\theta} = -\gamma e_0 \omega, \quad \gamma > 0 \quad (12)$$

No MRAC, o algoritmo é baseado na estimação dos parâmetros e contém leis de adaptação integrais, o que resulta na falta de robustez à dinâmica não modelada e distúrbios externos. Para aumentar a robustez no MRAC foi proposta uma lei de adaptação com modificação  $\sigma$  (Ioannou e kokotovic (1984)), dada por

$$\dot{\theta} = -\sigma \theta - \gamma e_0 \omega, \quad \gamma > 0 \text{ e } \sigma > 0 \quad (13)$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade pode ser interpretado como um fator de esquecimento e o segundo termo, um fator de aprendizagem. Esta modificação garante no mínimo estabilidade local na presença de dinâmica não modelada e/ou distúrbios externos. A introdução do fator  $\sigma$ , entretanto, pode levar ao aparecimento de “bursting” como verificado por Hsu e Costa (1987). Narendra e Anaswami (1987) propuseram a utilização de um fator de esquecimento variável, substituindo o parâmetro sigma pelo módulo do erro de saída eliminando o efeito de “bursting”.

A estabilidade global e a eliminação de “bursting” do algoritmo com modificação sigma, foi obtida depois por Ioannou e Tsakalis (1986), retendo a modificação sigma e introduzindo normalização no termo  $e_0\omega$ .

A introdução da normalização pode levar a transitórios de adaptação demasiadamente lentos e mesmo com a excitação rica em frequência, a qualidade do transitório de adaptação (quando  $\theta(t)$  está distante de  $\theta^*$ ) não é uniforme e a convergência dos parâmetros adaptativos é muito lenta. Apesar do comportamento transitório não ser totalmente aceitável, em algumas situações, o sinal de controle é suave, tornando-o adequado para a condição de regime permanente.

## 4 VS-MRAC

O VS-MRAC foi desenvolvido por Hsu e Costa (1989), com o intuito de buscar um controlador robusto em relação às incertezas da planta e com um desempenho transitório significativamente melhor que os obtidos com os algoritmos baseados em identificação de parâmetros. Para o caso de  $n^* = 1$ , a solução foi substituir as leis integrais de adaptação por leis de adaptação a estrutura variável, tornando o erro de saída  $e_0(t) \equiv 0$  uma superfície deslizante no espaço de estado do erro do sistema e a condição de deslizamento é  $\dot{e}_0 e_0 < 0$ . A lei de adaptação é dada por

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \text{sgn}(e_0 \omega_i) \text{ com } \bar{\theta}_i > |\theta_i^*|, i = 1, 2n \quad (14)$$

$\bar{\theta}_i$  deve ser dimensionado de forma a levar em consideração as incertezas nos parâmetros da planta. No caso em que os parâmetros da planta são invariantes no tempo pode-se demonstrar a estabilidade exponencial global para o VS-MRAC. Ainda, o algoritmo é estável para perturbações desconhecidas e uniformemente limitadas atuando na entrada da planta, desde que  $\|\omega(t)\|$  seja maior que uma determinada constante positiva (Hsu e Costa (1989)) ( $\|\omega(t)\|$  é uma norma do vetor regressor  $\omega(t)$ ). Simulações têm levado às mesmas conclusões para o caso variante no tempo. A grande desvantagem do VS-MRAC é que ele requer excessiva ação de controle e sua implementação prática pode apresentar algumas dificuldades.

## 5 CONTROLADOR B-MRAC PARA $N^*=1$

A partir da teoria de controle binário desenvolvida por Emelyanov (1987), Hsu e Costa (1990) desenvolveram um esquema de controle denominado de Controle Binário Adaptativo por Modelo de Referência (B-MRAC). O B-MRAC consiste de uma lei gradiente de adaptação com projeção. A lei de adaptação é a mesma do MRAC com fator  $\sigma$  (equação (13)) com a exceção de que  $\sigma$  representa o fator de projeção especificado por

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad \sigma_{eq} = \frac{-\gamma e_0 \theta^T \omega}{\|\theta\|^2} \quad (15)$$

com  $\gamma > 0$  e  $M_\theta > \|\theta^*\|$  é uma constante.

Com essa estrutura de controle mostra-se que se  $\gamma \rightarrow \infty$ , a lei de controle se torna

$$\theta = -M_\theta \text{sgn}(e_0 \omega) \quad , \quad M_\theta > \|\theta^*\| \quad (16)$$

que é a lei do VS-MRAC dada na equação (14). Para  $\gamma$  suficientemente alto e sobre a condição de riqueza do sinal de referência, prova-se a estabilidade global exponencial uniforme do B-MRAC (Hsu e Costa (1990) e (1994)). A exigência de alto ganho de adaptação para uma boa resposta transitória, pode, por sua vez, acarretar em amplificações nas perturbações e dinâmicas não modeladas, além de apresentar picos transitórios iniciais no sinal de controle em condições de elevado erro inicial de saída.

## 6 CONTROLADOR EM MODO DUAL ADAPTATIVO ROBUSTO PARA $N^*=1$

No controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto é proposta uma ligação entre o MRAC e o VS-MRAC através de uma única lei de adaptação. Para a prova de estabilidade a lei de adaptação inicial (Cunha e outros, 2005) foi modificada. Basicamente, foi adicionado um termo na lei de controle de forma a se poder eliminar os termos de sinais indefinidos, que aparecem na derivada da função de Lyapunov. A idéia das ponderações da lógica nebulosa do tipo Takagi-Sugeno (Mota e Araújo (2002), Takagi e Sugeno (1985)) é incorporada em uma única expressão.

Considere a seguinte lei de adaptação

$$\mu \dot{\theta} = -\sigma \theta - (1 - \mu) \sigma \Gamma e_0 \omega - \mu \gamma e_0 \omega \quad (17)$$

onde  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $\Gamma = \text{diag} \left[ \frac{\bar{\theta}_i}{|e_0 \omega_i|} \right]$ ,  $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ ,

$i = 1, 2n$ .

Quando  $\mu \rightarrow 0$ , nota-se que a equação (17) se resume à equação (14), ou seja, ao algoritmo VS-MRAC. A equação (17) pode ser reescrita como

$$\dot{\theta} = -\frac{\sigma}{\mu}\theta - \frac{1}{\mu}[(1-\mu)\sigma\Gamma + \mu\gamma I]e_0\omega, \quad \gamma > 0 \text{ e } \sigma > 0 \quad (18)$$

Ainda, quando  $\mu \rightarrow 0$ , observa-se que o fator de esquecimento tende a infinito, implicando que o VS-MRAC não tem memória. O termo de aprendizagem também cresce ilimitadamente, de onde conclui-se que no VS-MRAC a adaptação é instantânea.

Quando  $\mu = 1$ , a equação (17) se resume à (13) que é a lei de adaptação do MRAC com fator  $\sigma$ .

No DMARC (equação (18)) o fator de esquecimento é variável como em Narendra e Annaswamy (1987), e dependendo da forma como se ajusta o parâmetro  $\mu$ , o algoritmo DMARC pode trabalhar próximo do VS-MRAC. Esses fatores contribuem para o não surgimento do fenômeno de “bursting”.

No algoritmo DMARC, o MRAC só começa a ter sua maior ponderação quando o erro de saída é suficientemente pequeno. Dessa forma e pelos fatores mencionados no final da seção 3, foi introduzido o termo  $(1-\mu)$  na equação (17) de forma que a normalização (representada pelo termo  $\Gamma$ ) é gradativamente reduzida, até se obter a lei com fator  $\sigma$  que garante estabilidade local.

## 7 PROVA DE ESTABILIDADE

Considere o sistema e as hipóteses descritas na seção 2. Define-se o fator  $\sigma$  como:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ e } \mu \neq 0 \\ \sigma_c & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (19)$$

onde  $M_\theta$  é dado por

$$M_\theta = \|\bar{\theta}\| \quad (20)$$

**Teorema 7.1.** Seja o sistema (5), (9), (17), (19) e uma bola  $\|\theta\| \leq M_\theta$ , definida como em (20). Então,

i) Todos os sinais em malha fechada são uniformemente limitados.

ii)  $\|e\| \rightarrow 0$  assintoticamente, se  $\mu \rightarrow 0$

**Prova:** A prova de estabilidade é semelhante a apresentada em Hsu e Costa (1990). Escolhendo-se a função definida positiva como candidata a função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \left( e^T P e + \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{\theta_{2n}^* \gamma} \right) \quad (21)$$

Segundo o lema de Kalman-Yakubovitch ( $A_c^T P + P A_c = -2Q$ ,  $P b_c = h_c$ ,  $P = P^T > 0$  e  $Q = Q^T > 0$ ) e, considerando que  $e^T h_c = h_c^T e = e_0$ , encontra-se para a derivada de (21)

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = -e^T Q e - \frac{\sigma \tilde{\theta}^T}{\theta_{2n}^* \gamma \mu} [\theta + (1-\mu)\Gamma e_0 \omega]$$

que, juntamente com (17) resulta

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = -e^T Q e - \frac{\sigma}{\theta_{2n}^* \gamma \mu} \sum_{i=1}^{2n} [\theta_i - \theta_i^*] [\theta_i + (1-\mu)\bar{\theta}_i \text{sgn}(e_0 \omega_i)] \quad (22)$$

Definindo os termos dentro do somatório como a função

$$F_i(\theta_i) = [\theta_i - \theta_i^*] [\theta_i + (1-\mu)\bar{\theta}_i \text{sgn}(e_0 \omega_i)] \quad (23)$$

vê-se que  $\bar{\theta}_i$  e  $-\bar{\theta}_i$  são as maiores raízes possíveis (em valores absolutos) de  $F_i(\theta_i)$ , pois  $0 < \mu \leq 1$  e  $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ .

Como o coeficiente de  $\theta_i^2$  é positivo, então,  $F(\theta_i) > 0$ ,  $\forall \theta_i$  tal que  $|\theta_i| > \bar{\theta}_i$ . Conseqüentemente, com (19) e (20) tem-se que

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \leq -e^T Q e \leq 0 \quad (24)$$

De (21) e (24) conclui-se que  $e$ ,  $\tilde{\theta}$  e, conseqüentemente,  $e_0$  e  $\theta$  pertencem ao  $L_\infty$ . De  $e = x_c - x_{cm}$ , considerando que  $r \in L_\infty$  e  $M(s)$  é estável, tem-se que  $x_{cm} \in L_\infty$  e  $y_m \in L_\infty$ , conseqüentemente,  $x_c$  e  $y \in L_\infty$ . Como  $x_c^T = [x^T, v_1^T, v_2^T]$ , tem-se que  $x$ ,  $v_1$  e  $v_2 \in L_\infty$ . Desde que  $\omega^T = [v_1^T, y, v_2^T, r]$  e  $u = \theta^T \omega$ , conclui-se que  $\varpi \in L_\infty$ , resultando em i).

Agora, se  $\mu \rightarrow 0$ , a equação (17) se resume à (14) e, no limite tem-se para (22) e (23)

$$\dot{V}(e, \hat{\theta}) = -e^T Q e - \frac{\sigma}{\theta_{2n}^* \gamma} \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\mu} F_i(\theta_i) \quad (25)$$

Fazendo o limite do termo dentro do somatório tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} F_i(\theta_i) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} [\theta_i - \theta_i^*] \\ &\quad [\theta_i + (1 - \mu) \bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i)] \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} F_i(\theta_i) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} [-\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i) - \theta_i^*] \\ &\quad [(-\mu) \bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i)] \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} F_i(\theta_i) &= [\bar{\theta}_i + \theta_i^* \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i)] \bar{\theta}_i > 0 \end{aligned}$$

pois  $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ . Dessa forma tem-se para (25)

$$\dot{V}(e, \hat{\theta}) < -e^T Q e < 0 \quad (26)$$

o que resulta em (ii).

## 8 AJUSTE DO DMARC

Para sintonizar o Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto utiliza-se uma expressão para o parâmetro  $\mu$ , a partir da idéia do modelo de Takagi-Sugeno (Mota e Araújo (2002)), dada pela equação (27) e ilustrada na Figura 1.

$$\mu = e^{-e_0^2/L} \quad (27)$$

onde  $L$  é um parâmetro a ser ajustado.

Observa-se que quando  $e_0 \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow 1$  aproximando-se do MRAC. Quando  $e_0$  se torna razoavelmente grande  $\mu$  assume um valor suficientemente pequeno tendendo ao VS-MRAC. O parâmetro  $L$  tem a importante função de determinar a forma como se dá a transição entre o MRAC e o VS-MRAC. Quanto menor o valor de  $L$  maior a ação do VS-MRAC no espaço de  $e_0$ .

A expressão (27) determina como o parâmetro  $\mu$  deve ser variado, para ajustar o controlador DMARC, à medida que o erro  $e_0$  evolui. A derivada de  $\mu$  é dada por

$$\dot{\mu} = -2 \frac{\mu}{L} e_0 \dot{e}_0 \quad (28)$$

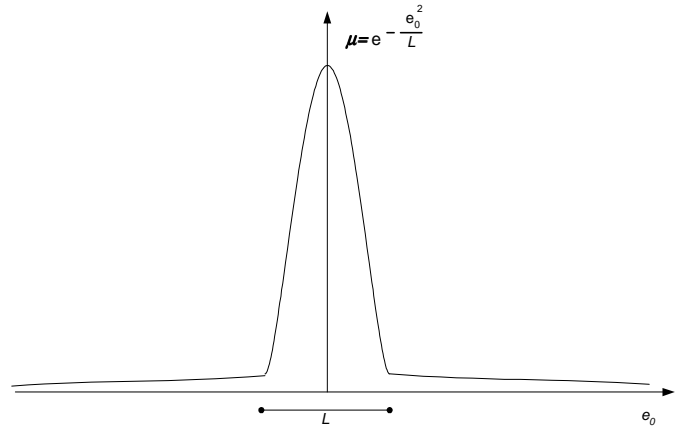


Figura 1: Evolução de  $\mu$  função do erro de saída

Analisando essa derivada, considerando que  $\mu$  é positivo, chega-se ao resultado apresentado na Tabela 1

Tabela 1: Variação de  $\mu$  com a condição de escorregamento

$e_0 \dot{e}_0 < 0$ condição de escorregamento satisfeita	$\dot{\mu} > 0$ $\mu$ aumenta (aproxima-se do MRAC)
$e_0 \dot{e}_0 > 0$ condição de escorregamento não satisfeita	$\dot{\mu} < 0$ $\mu$ diminui (aproxima-se do VS-MRAC)
$e_0 \dot{e}_0 = 0$ superfície de escorregamento alcançada	$\dot{\mu} = 0$ $\mu$ constante, controlador fixo

Um aspecto prático da implementação do DMARC deve ser considerado a partir da observação da equação (17). Para evitar erro numérico, o valor de  $\mu$ , que se encontra no denominador de (18), é limitado inferiormente por um valor  $\mu_p$ , suficientemente pequeno.

Analisando-se ainda, a sintonia do DMARC, considere que o sistema está inicialmente operando como VS-MRAC, com  $L$  e  $\mu_p$  pequenos. Se após um determinado tempo a condição de deslizamento é satisfeita ( $e_0 \dot{e}_0 < 0$ ) e o erro atinge um valor suficientemente pequeno (ver figura 1), a variação de  $\mu$ , expressa pela equação (28), será dada por

$$\dot{\mu} = 2 \frac{\mu_p}{L} |e_0 \dot{e}_0| \quad (29)$$

Considere agora, que o sistema está operando como MRAC com  $L$  pequeno,  $e_0 \cong 0$  e  $\mu \cong 1$ . Se  $e_0$  se afasta da origem tem-se  $e_0 \dot{e}_0 > 0$  (ver Figura 1) e desta forma a variação de  $\mu$  será expressa por

$$\dot{\mu} = -2\frac{1}{L} |e_0 \dot{e}_0| \quad (30)$$

Vê-se que a transição do VS-MRAC para o MRAC se dá de uma forma mais lenta (mais cautelosa) com uma taxa de variação  $\mu_p/L$  ( $\mu_p$  e  $L$  pequenos), enquanto a transição do MRAC para o VS-MRAC, na mesma condição (mesmo valor absoluto de  $e_0 \dot{e}_0$ ), se dá com uma taxa de variação de aproximadamente  $1/L$  ( $L$  pequeno).

Sendo  $\mu_p$  suficientemente pequeno, o algoritmo de controle do DMARC é implementado com  $\sigma$  dado por

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ e } \mu > \mu_p \\ \sigma_c & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (31)$$

onde  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  é suficientemente grande, tal que (17) seja o mais próximo possível de (15). Assim, se o erro de saída é tal que  $\mu = \mu_p e$ , nesse caso, o DMARC atua como o VS-MRAC, espera-se, intuitivamente, que o erro de saída seja forçado a decrescer (note que no VS-MRAC  $\|\theta\| = \|\bar{\theta}\|$  é constante). Dessa forma, teria-se  $\mu_p \geq e^{-e_0^2/L}$ . De uma forma mais relaxada, e considerando que esse é um resultado intuitivo tem-se

$$|e_0| = O\left(\sqrt{-L \ln(\mu_p)}\right) \quad (32)$$

A rigor, a exata convergência de (17) para (15) necessita que  $\mu = 0$ . Porém, analisando (22), a condição necessária para que (26) seja satisfeita, é que  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  seja tal que  $\|\theta^*\| < (1 - \mu_p) \|\bar{\theta}\| \leq \|\theta\| \leq \|\bar{\theta}\|$ .

## 9 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Para ilustrar o funcionamento do DMARC, considere a planta de segunda ordem e grau relativo unitário expressa pela função de transferência

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$$

O modelo de referência é especificado por

$$M(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

Foram escolhidos os filtros da entrada e saída como

$$\Lambda = -2 \text{ e } g = 2$$

Os parâmetros  $\theta^*$  e  $\bar{\theta}$  são respectivamente

$$\theta^* = (0, 5; -6; 5; 1)^T \text{ e } \bar{\theta} = (0, 6; 7; 6; 2)^T$$

Nas simulações é utilizado o método de integração numérica de Euler. Inicialmente são feitas simulações com o intuito de observar as semelhanças existentes entre o controlador B-MRAC e o controlador DMARC. Em ambos, o parâmetro de adaptação  $\theta$  é limitado ao interior de uma bola de mesma dimensão ( $M_\theta > \|\theta^*\|$ ). No B-MRAC quando o vetor adaptado  $\theta$ , atinge a superfície da bola ele é projetado sobre a mesma, permanecendo nela até que a lei de adaptação indique o decréscimo de  $\|\theta\|$ . No DMARC, quando o erro de saída é alto, a superfície da bola é atingida de forma chaveada, sendo essa, provavelmente, a principal diferença entre o DMARC e o B-MRAC.

Se o vetor de parâmetros de adaptação está no interior da bola, ou seja,  $\|\theta\| \leq M_\theta$ , tem-se nos dois controladores  $\sigma = 0$  e a lei de controle, tanto do DMARC (equações (17), (19) e (20)), como do B-MRAC (equações (13) e (15)) se resume a (12).

Nas primeiras simulações foram feitas as modificações na referência  $r(t)$  e na perturbação  $d(t)$  na entrada da planta, de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2: Variações em  $r$  e  $d$  durante as simulações

INTERVALO	REFERÊNCIA	PERTURBAÇÃO
$0 \leq t < 0,8$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0,8$
$0,8 \leq t < 1,6$	$r(t) = -1$	$d(t) = 0,0$
$1,6 \leq t < 2,4$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0,8$

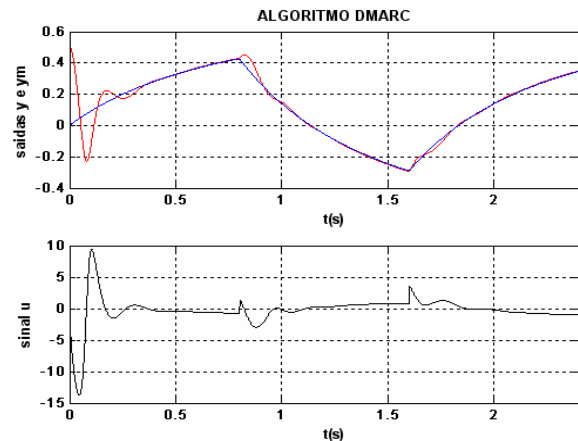


Figura 2a: Resultado do controlador DMARC

Com o mesmo valor de  $\gamma = 750$  e sob as mesmas condições foi feita a simulação com o B-MRAC e o resultado encontra-

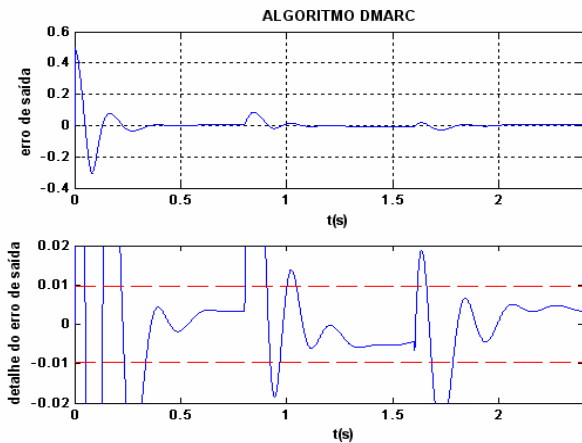


Figura 2b: Resultado do controlador DMARC

se na Figura 3. A semelhança entre os resultados obtidos nas figuras 2a e 3, se deve ao fato de que, com gama grande e com uma relação  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  de valor não suficientemente alto, o DMARC, semelhantemente ao B-MRAC, trabalha como um MRAC com uma lei gradiente de adaptação de alto ganho. Na Figura 2b a linha pontilhada no detalhe do erro de saída, representa o limite do erro dado pela equação (32).

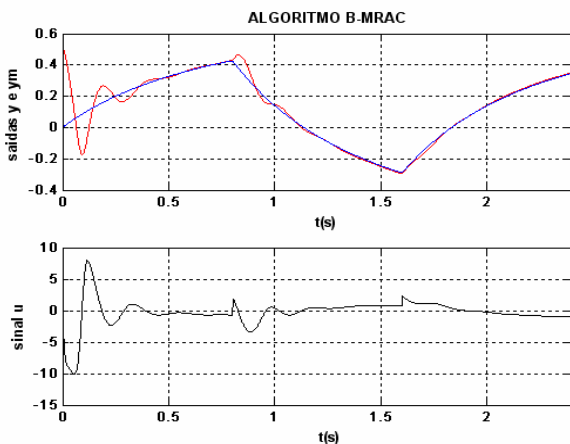


Figura 3 : Resultado do controlador B-MRAC

Para comparar os resultados do B-MRAC, VS-MRAC e o DMARC, novas simulações foram feitas, sob as condições apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3: Variações em  $r$  e  $d$  durante as simulações

INTERVALO	REFERÊNCIA	PERTURBAÇÃO
$0 \leq t < 0,2$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0,8$
$0,2 \leq t < 0,4$	$r(t) = -1$	$d(t) = 0,0$
$0,4 \leq t < 0,6$	$r(t) = 1$	$d(t) = 0,8$

Para obter uma resposta rápida no B-MRAC foram utilizados  $h = 10^{-5}s$  e  $\gamma = 10^6$  e o resultado é apresentado nas figuras 4a e 4b.

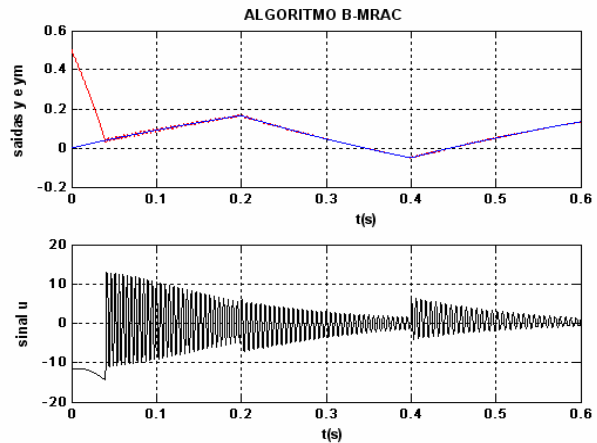


Figura 4a: Resultado do controlador B-MRAC

Na figura 4a, observa-se que no B-MRAC, com  $\gamma$  grande, a saída da planta se aproxima da saída do modelo de referência mais rapidamente que nos casos do VS-MRAC e DMARC (Figuras 5a e 6a, respectivamente). No entanto, o B-MRAC tem um sinal de controle, inicial, de maior amplitude. Além disso, o BMRAC, apesar de  $\gamma$  grande, apresenta oscilações de maior amplitude (Figura 4b) que o VS-MRAC (Figura 5b) e o DMARC (Figura 6b). Na Figura 4b, a linha pontilhada, no detalhe do erro de saída do B-MRAC, serve apenas para comparação com o DMARC das Figuras 7a e 7b.

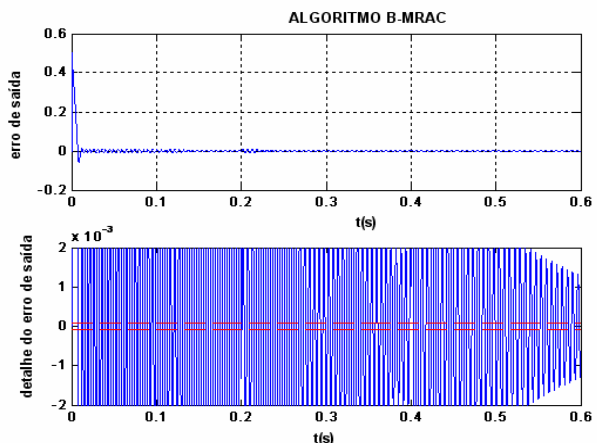


Figura 4b: Resultado do controlador B-MRAC

Para o VS-MRAC foi usado  $h = 10^{-5}s$  e os resultados são apresentados nas figuras 5a e 5b.

No VS-MRAC, para se obter um modo deslizante, é necessário que a frequência de chaveamento seja alta, o que leva ao uso de um passo de integração muito pequeno. Considerando



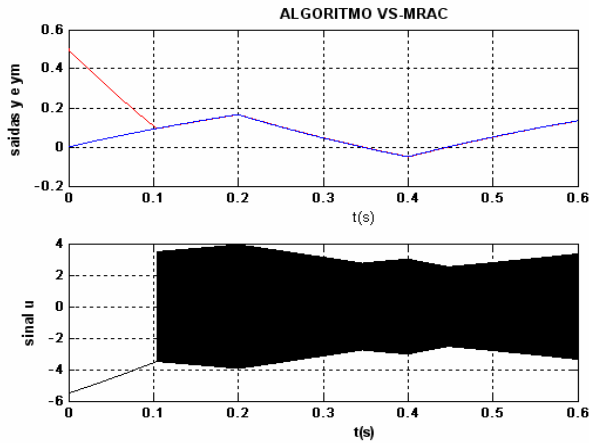


Figura 5a: Resultado do controlador VS-MRAC

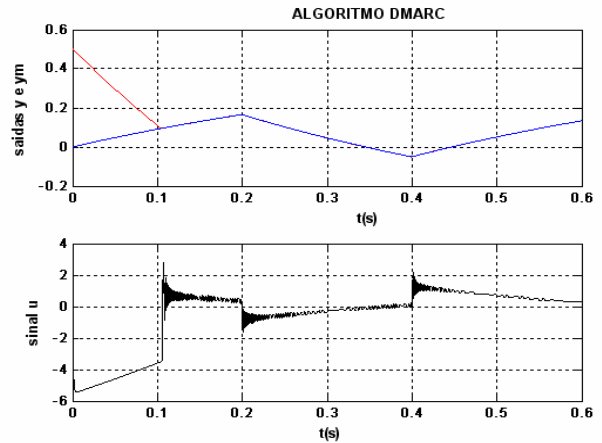


Figura 6a: Resultado do controlador DMARC

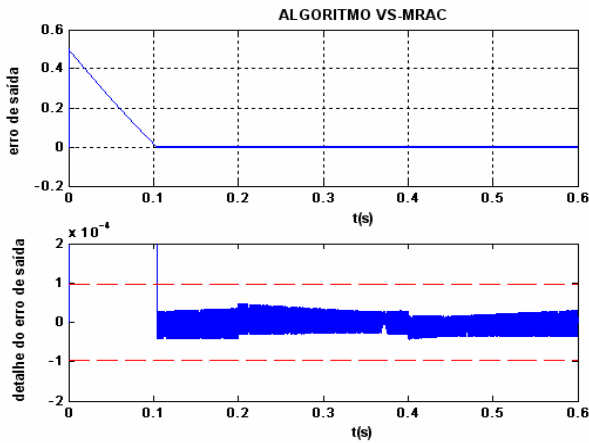


Figura 5b: Resultado do controlador VS-MRAC

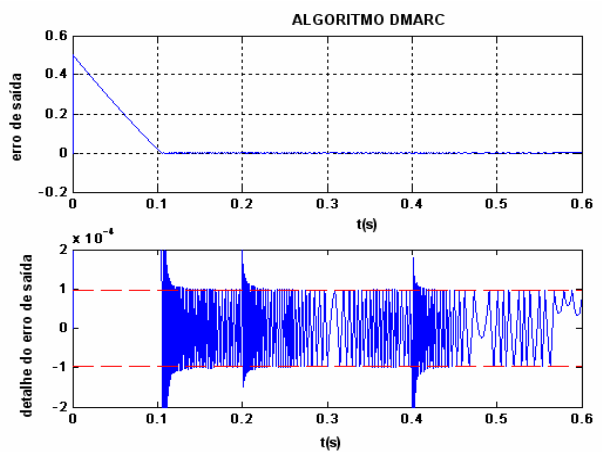


Figura 6b: Resultado do controlador DMARC

que  $h = 10^{-5}s$  é uma boa escolha para o bom funcionamento do VS-MRAC, são feitas simulações com o DMARC usando  $h = 10^{-5}s$ ,  $L = 10^{-9}$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\sigma_c = 10^{-1}$ ,  $\mu_p = 10^{-4}$  e são obtidos os resultados apresentados nas Figuras 6a e 6b. O valor de  $\gamma$  foi reduzido, em relação à primeira simulação (Figura 2a e 2b), pois no DMARC o funcionamento como o VS-MRAC pode ser especificado pelos parâmetros  $L$ ,  $\sigma_c$  e  $\mu_p$ , ao passo que no B-MRAC o funcionamento como VS-MRAC só é possível com  $\gamma$  tendendo para infinito (ver Hsu e Costa (1990) e (1994)). Ainda,  $\gamma$  muito alto pode amplificar os efeitos de perturbações externas e dinâmicas não modeladas.

Da Figura 6a, observa-se que a planta segue o modelo praticamente sem oscilações, uma característica do VS-MRAC, e o sinal de controle apresenta uma certa suavidade em relação ao chaveamento do VS-MRAC. Na Figura 6b é apresentado o erro de saída da simulação referente à Figura 6a, a linha pontilhada, no detalhe do erro de saída representa o limite dado pela equação (32). O controle apresenta robustez com

relação a perturbações externas na entrada da planta.

Para atenuar mais o sinal de controle, pode-se diminuir a região de ação do VS-MRAC, em relação ao erro de saída, aumentando-se o valor de  $L$ . O valor de  $h$ , nesse caso, pode ser aumentado. Então com  $h = 10^{-4}s$ ,  $L = 10^{-7}$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\sigma_c = 10^{-1}$ ,  $\mu_p = 10^{-4}$ , nova simulação é feita com o DMARC e o resultado é apresentado nas Figuras 7a e 7b.

Pode-se observar na Figura 7a uma boa suavização do sinal de controle, em relação ao sinal apresentado na Figura 6a. Porém, na Figura 7b, vê-se que o erro de saída agora é da ordem de  $10^{-3}$ , enquanto que o da Figura 6b é da ordem de  $10^{-4}$ .

Com uma relação  $\frac{\sigma_c}{\mu_p}$  suficientemente grande e com  $L$  bem pequeno, o DMARC trabalha como VS-MRAC até que o erro de saída seja bem próximo de zero (ver Figura 1), levando o sistema a uma resposta transitória consideravelmente rápida. Obviamente, se trabalharmos com  $L \cong 0$ , ape-

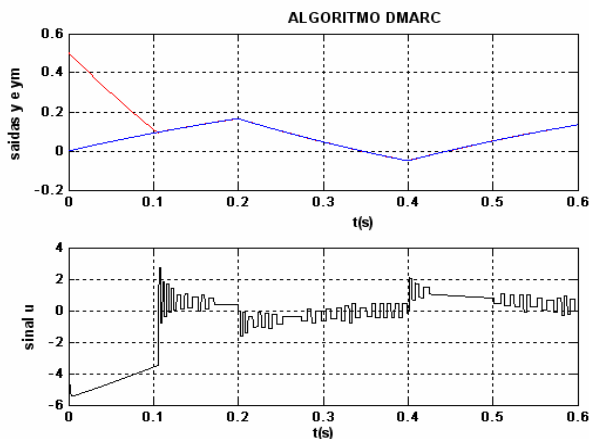


Figura 7a: Resultado do controlador DMARC

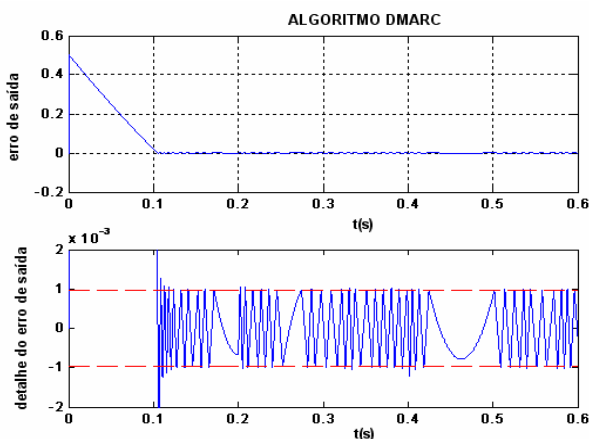


Figura 7b: Resultado do controlador DMARC

sar de se ter uma boa resposta transitória, pode-se ter um sinal de controle com uma frequência elevada. Assim, a escolha dos parâmetros  $L$ ,  $\sigma_c$  e  $\mu_p$  irá ditar o compromisso entre resposta transitória rápida e suavidade no sinal de controle.

## 10 CONCLUSÕES

Neste artigo é apresentada uma demonstração de estabilidade para o controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto para plantas com grau relativo unitário. Conforme pode ser verificado pelas simulações, o algoritmo em Modo Dual Adaptativo Robusto proporcionou um transitório rápido e praticamente sem oscilações e um desempenho em regime permanente com sinal de controle com boa suavização. Adicionalmente apresentou robustez a incertezas paramétricas e distúrbios.

Para plantas com grau relativo arbitrário, o DMARC utiliza a mesma estrutura do VS-MRAC, usando a lei de adaptação do DMARC, para  $n^* = 1$ , no bloco onde é gerado o sinal de

controle que será aplicado à planta (Cunha e Araújo (2004)). A análise de estabilidade, para plantas com  $n^* > 1$ , pode ser feita a partir da análise de plantas com  $n^* = 1$ , seguindo Hsu (1990) e Hsu e Costa (1994).

## REFERÊNCIAS

- Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1995). Adaptive Control, Addison-Wesley Pub. Co.
- Cunha, C. D., Araújo, A. D., Barbalho, D. S. e Mota, F. C. (2005). A Dual-Mode Adaptive Robust Controller Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor, *Asian Journal of Control*, 7(2), 197-201.
- Cunha, C. D. e Araújo, A. D. (2004). A Dual-Mode Adaptive Robust Controller for Plants with Arbitrary Relative Degree. Proceedings of 8th International Workshop on Variable Structure Systems - VSS'04. Vilanova i la Geltrú, Espanha.
- Cunha, J.P.V.S., Hsu, L., Costa, R.R. e Lizarralde, F. (2003). Output-Feedback Model-Reference Sliding Mode Control of Uncertain Multivariable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-48 (12), 2245–2250.
- Emelyanov, S. V. (1987). Binary Automatic Control Systems. MIR Publishers, Moscow (English Translation).
- Hsu, L. and Costa, R. R. (1987), "Bursting Phenomena in Continuous-Time Adaptive Systems with a Sigma-Modification", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-32 (1), 84-86.
- Hsu, L. e Costa, R. R. (1989). Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using only Input and Output Measurements: Part I, *Int. J. Control*, 49(2), 399-416.
- Hsu, L., Araújo, A. D. e Costa, R. R. (1994). On the Design of Variable Structure Adaptive Control Using only Input/ Output Data. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-39 (1), 4-21.
- Hsu, L. e Costa, R.R. (1990). A Binary Control Approach to Design Globally Exponentially Stable Systems. Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Systems Engineering, Las Vegas, July.
- Hsu, L. e Costa, R. R. (1994). B-MRAC Global Exponential Stability with a New Model Reference Adaptive Controller Based on Binary Control Theory. *Control-Theory and Advanced Technology*, 10 (4), Part 1, 649-668.
- Hsu, L., Lizarralde, F. e Araujo, A. D. (1997). New Results on Output-Feedback Variable Structure Model-Reference Adaptive Control: Design and Stability Analysis, *IEEE Transactions AC*-42 (3), 386–393

- Ioannou, P. A. e Sun, J. (1996). Robust Adaptive Control, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Ioannou, P. A. e Kokotovic, P. V. (1984). Instability Analysis and Improvement of Robustness of Adaptive Control. *Automatica*, **AC-20**(5),583-594
- Ioannou, P. A. e Tsakalis, K. S. (1986). A Robust Direct Adaptive Controller. *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-31**( 11), 1033-1043.
- Mota, F. C. e Araújo, A. D. (2002). Proposta de um Controlador Dual Adaptativo Robusto Utilizando o Modelo de Takagi-Sugeno, *Congresso Brasileiro de Automática* Natal-RN, Brasil, 173-177.
- Narendra, K. S. e Annaswamy, A. M. (1987). New Adaptive Law for Robust Adaptive Control Without Persistent Excitation, *IEEE Trans Automatic Control*, **AC-32**, 134 -145.
- Narendra, K. S. e Annaswamy, A. M. (1988). Stable Adaptive Systems, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Sastry, S. S. (1984). Model - Reference Adaptive Control – Stability, Parameter Convergence and Robustness, *IMA J. Mathematical Control and Information*, **1**, 27-66.
- Sastry, S. S. e Bodson, M. (1989). Adaptive Control: Stability Convergence and Robustness, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- Takagi, T e Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **SMC-15**(1), 116-132.