

INVESTIGANDO A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS E DAS INTERAÇÕES SOCIAIS

Investigating the function concept learning from the previous knowledge and the social interactions

Manoel Oriosvaldo de Moura¹

Vanessa Dias Moretti²

Resumo: Neste artigo relatamos uma investigação, realizada com estudantes de 8ª série de uma escola pública, sobre o papel dos conhecimentos prévios e das interações sociais na aprendizagem do conceito de função. Comparando momentos de trabalho individual com situações de interação constatamos que a interação possibilitou um movimento de compreensão do conceito, no sentido da abstração e de generalização, que não ocorreu na situação de trabalho individual.

Unitermos: Aprendizagem, conceitos prévios, interações sociais, conceito de função.

Abstract: *This paper reports a research about the influences of previous ideas and social interaction in learning of function concept carried out with 8th grade students of a public school. Comparing moments of individual work with interactions situations we observed that the circumstances where interactions occurs, a greater comprehension of concept and how it enables abstraction and generalization was made possible whereas this did not occur in the situation where individual work was carried out.*

Keywords: *Learning, previous ideas, social interaction, function concept.*

Considerações teóricas

Em muitas situações de nossa prática pedagógica sentimo-nos surpresos frente às dificuldades de aprendizagem de nossos alunos em atividades de ensino propostas em sala de aula. Reflexões sobre esse fato nos trazem inevitáveis questionamentos. Existiram fatores capazes de favorecer a aprendizagem? Quais seriam eles? Como o trabalho desenvolvido em sala de aula influencia este processo?

Fatores como a afetividade, a disposição, o interesse, o ambiente social, as interações, a relação do conceito com a realidade concreta e os conceitos prévios têm sido levantados pelos educadores como possíveis respostas a essas questões (Coll e Solé, 1997).

Na busca de possíveis esclarecimentos sobre as questões acima realizamos uma pesquisa que teve como objetivo investigar como os conhecimentos prévios e as interações sociais influenciam na aprendizagem do conceito de função.

A escolha desse conceito deve-se a dois fatores. Primeiramente, a sua relevância social caracterizando-se como o instrumento que explicita a interação quantidade-qualidade na busca de regularidades dos fenômenos naturais ou sociais. Em segundo, ao seu papel dentro de uma estruturação lógica do conhecimento matemático.

Baseamos nossa investigação nos aportes teóricos que relevam o papel dos conhecimentos prévios e do contexto social na educação. Nesse sentido, encontramos, tanto na perspectiva construtivista quanto na histórico-cultural, contribuições para a realização da pesquisa.

¹ Professor Associado da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Coordenador do Grupo de Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPE) – e-mail: modmoura@usp.br

² Doutoranda na Área de Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Docente do Ensino Médio – e-mail: vanessamoretti@ig.com.br

A concepção construtivista defende que se considere em um processo de aprendizagem aspectos globais como a disposição dos alunos para esta aprendizagem, os instrumentos, as habilidades, as estratégias que são capazes de utilizar e, principalmente, os conhecimentos prévios que possuem sobre o assunto a ser ensinado. Esses conhecimentos prévios englobam não só conhecimentos sobre o próprio conceito como também relações diretas ou indiretas que o aluno seja capaz de estabelecer com o novo conteúdo (Miras, 1997). Desta forma, segundo essa concepção, uma aprendizagem será significativa quando o aluno for capaz de estabelecer relações coerentes entre o que já sabe e o novo conhecimento que lhe está sendo apresentado. A teoria da aprendizagem significativa foi proposta por Ausubel e dentro dessa teoria “O fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isto deve ser averiguado e o ensino deve depender desses dados” (Ausubel, Novak e Hanesian, 1983).

Essas afirmações podem levar ao equívoco de considerar-se a criança, na concepção piagetiana como solitária ou desprovida de interações no processo de construção do conhecimento. No entanto, Piaget afirma que “a inteligência humana somente se desenvolve no indivíduo em função de interações sociais que são, em geral, negligenciadas” (Piaget appud La Taille, 1992, p.11). Embora Piaget não tenha se detido sobre essa questão, os atuais estudos construtivistas não ignoram “a natureza social e socializadora do ensino” ao considerar “os conteúdos de ensino em sua relação com a cultura, e também a estruturar a construção pessoal do aluno no seio social da interação social de caráter educativo” (Coll e Solé, 1997, p. 24).

Na perspectiva histórico-cultural a aprendizagem é um fenômeno social, acontece e se desenvolve nas relações estabelecidas entre os sujeitos mediados pelas trocas simbólicas. Desta forma, o meio social constitui o manancial no qual se baseia o desenvolvimento conceitual da criança. Segundo Vygotsky, o homem, ao buscar relacionar-se com os objetos, utiliza-se dos sistemas simbólicos de que dispõe, fornecidos pela cultura, pelo meio social. Esse tipo de operação permite o desenvolvimento da abstração e da generalização que, nessa perspectiva, vai do social para o individual.

Assim, funções psicológicas superiores têm primeiro sua correspondente social e são internalizadas no processo de interação com outros indivíduos. Esse é um processo dinâmico em que a internalização de determinada função leva à reestruturação de outras e acaba transformando o próprio processo (Vygotsky, 1984), implicando uma reestruturação mental. Para o autor, existe uma diferença substancial entre o que uma criança é capaz de produzir isoladamente e o nível de desenvolvimento que atinge numa situação de interação, seja com o professor ou com a colaboração de um colega. A essa distância entre o que chamou de desenvolvimento real e desenvolvimento potencial Vygotsky deu o nome de “zona de desenvolvimento proximal”.

O pressupostos vygotksyanos sobre a aprendizagem destacam dois fatores como sendo primordiais. O primeiro e mais importante, é a relação existente entre a aprendizagem e interação social. O segundo é a possibilidade de organização de situações de ensino que atue na zona de desenvolvimento proximal do aluno permitindo-lhe alcançar níveis de conhecimento mais elaborados (Moysés, 1997, p. 34).

Os esforços para o entendimento dos fenômenos do ensino e da aprendizagem aproximam diferentes visões sobre os processos de aquisição de conhecimento, como é possível de se observar em Garnier et alii (1996), em que representantes das correntes vygotksyana e piagetina se encontram na busca de fundamentos para a didática. Nessas pesquisas, os pesquisadores russos repousam suas concepções de desenvolvimento e aprendizagem nos fundamentos dos trabalhos desenvolvidos principalmente por Vygotsky, Elkonin, Leontiev e Davidov. Um destaque especial é dado ao conceito de atividade de aprendizagem (Rubtsov, 1996). Esta tem por finalidade desenvolver a aprendizagem de conceitos científicos segundo os fundamentos

de Vygotsky e Leontiev. Rubtsov ressalta que “a discussão da ação em comum permite aos alunos, assistidos por um adulto, analisar a composição desta ação comunitária e extrair daí o modo de solução do problema do conflito. É no decorrer deste gênero de discussão que se procura a solução de um problema” (Rubtsov, 1996, p.191).

Na escola ocidental, com fundamentos teóricos em Piaget, tais como a concepção de desenvolvimento cognitivo, o papel da ação do sujeito sobre os objetos e a busca da superação do desequilíbrio, também encontramos uma perspectiva construtivista social, já que o papel das interações sociais é considerando fator relevante do processo de construção de conhecimentos. “O ensino é essencialmente um fenômeno social, mesmo quando os objetivos desejados se referem ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Interações sociais ganham espaço dentro da aula entre os sujeitos (alunos e professor, alunos entre si) que têm expectativas mútuas e interpretam as mensagens transmitidas pelo outro, através de um certo processo de negociação” (Bednarz, 1996, p. 47). No processo de aprendizagem, segundo essa visão, aparece a noção de conflito como fonte de mudança no indivíduo, só possível através das interações e a sala de aula aparece como o lugar privilegiado aos conflitos sócio-cognitivos.

A pesquisa histórica mostrou-nos que o desenvolvimento do conceito de função foi marcado por alguns estágios facilmente identificados através das estratégias utilizadas, em diferentes épocas, para a resolução de problemas envolvendo variações de quantidades. Segundo Youshkevitch (1976, p. 39) são três os principais estágios. Na *Antiguidade* há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já na *Idade Média* estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob uma forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. É só no *Período Moderno*, final do século XVI e especialmente durante o século XVII, que expressões analíticas e funções começam a prevalecer. Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão.

Em levantamento bibliográfico realizado encontramos algumas pesquisas relacionadas ao conceito de função, porém, na maioria delas, não há referências aos conhecimentos prévios e sim estudos acerca do conhecimento que o aluno possui depois de concluído o processo de aprendizagem formal. Em uma dessas pesquisas, Vinner e Dreyfus (1989, p. 356) propuseram a elaboração de seis categorias. Para os objetivos do nosso trabalho, no entanto, essas categorias propostas apresentavam um excessivo detalhamento. Uma vez que queríamos analisar como o aluno resolve situações que envolvam funções antes de um estudo formal e o trabalho de Vinner e Dreyfus o fez após este estudo, não esperávamos encontrar, em nossa pesquisa, tal grau de refinamento entre as soluções.

Desenvolvimento da pesquisa

Os referenciais teóricos, a que nos referimos anteriormente, foram balizadores para uma pesquisa com alunos de 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública que ainda não tinham aprendido formalmente o conceito de função. Nosso objetivo foi investigar como as interações sociais e os conhecimentos prévios dos alunos, atuam no processo de aprendizagem de função. Quanto à orientação metodológica podemos considerar que nossa pesquisa teve como referencial o modelo da pesquisa-ação uma vez que esse tipo de pesquisa “tem como principal característica justamente a presença da ação que se dá no plano empírico, e que serve de palco para submeter a prova a teoria em jogo” (Moysés, 1997, p. 86).

Nossa pesquisa foi feita em dois momentos. No primeiro, propusemos que os alunos trabalhassem, individualmente, problemas envolvendo o conceito de função. Nossa intenção foi identificar através das estratégias utilizadas para as resoluções, quais os conhecimentos que os alunos traziam sobre este conceito. Num segundo momento, os alunos trabalharam interagindo com os colegas, em duplas, e socializando os resultados obtidos com toda a turma. Buscamos comparar os resultados obtidos nessas duas situações de modo a fornecer ao professor uma orientação quanto à influência desses dois fatores na aprendizagem.

Para isso, precisamos identificar categorias de compreensão do conceito de função que possibilitassem ao professor considerar o conhecimento, sobre esse conceito, revelado pelo aluno. Estas categorias foram construídas levando-se em conta a história do conceito e pesquisas já realizadas sobre a sua aprendizagem após os alunos terem passado por situações de ensino.

Assim, baseados nos trabalhos de Vinner e Dreyfus e nos estágios históricos de Youshkevitch, construímos as três categorias iniciais de nossa pesquisa. Esse processo de construção pode ser representado na tabela abaixo:

Tabela 1: Processo de construção das categorias iniciais

Pesquisa Histórica (Youshkevitch)	Antigüidade (uso de tabelas)	Idade Média (noções gerais, descrição verbal ou gráfico)	Antigüidade (uso de expressões algébricas)
	Pesquisa Bibliográfica (Vinner e Dreyfus)		
Correspondência	Uso de Tabelas		
Relação de Dependência		Compreensão com ausência de linguagem analítica	
Lei			Uso de expressões algébricas
Operação			
Representação			

As categorias iniciais de nossa pesquisa

Com o objetivo de aprimorarmos tais categorias elaboramos um *Teste Piloto* envolvendo essencialmente questões que propusessem variações de quantidades em situações concretas. Esse teste foi aplicado em ambiente de sala de aula pelas próprias professoras das turmas, segundo as nossas orientações. Nesse momento os alunos trabalharam sozinhos sem interações com os colegas ou com a professora.

Para a sua análise dispúnhamos dos registros escritos elaborados pelos alunos. Numa primeira leitura, buscamos analisar como os alunos resolveram problemas envolvendo o conceito de função e quais foram os recursos usados por eles para as resoluções tendo a sua disposição apenas os seus conhecimentos prévios do conceito. Não estávamos preocupados com os resultados e sim com os processos. De acordo com a resolução feita pelo aluno, verificamos se as estratégias utilizadas se enquadravam ou não nas categorias levantadas inicialmente. Os testes nos quais tivemos dificuldades de classificação foram apresentados para um grupo de estudos formado por professores e pesquisadores em educação matemática que nos auxiliaram neste trabalho. Adotando os princípios estabelecidos por nós e já descritos aqui buscamos, em um consenso, identificar as estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução dos problemas propostos.

Pudemos perceber, através deste trabalho de análise, o aparecimento, de fato, das categorias propostas inicialmente. No entanto, percebemos nesse processo que alguns alunos resolveram os problemas através de estratégias que não tínhamos previsto, na construção das categorias, quando embasados apenas na teoria.

Alguns alunos, quando solicitados a formular uma expressão que generalizasse o problema, buscaram, ao contrário, uma situação particular que o representasse. Assim, um número significativo deles, embora não explicitassem a possibilidade da variação no problema, resolviam-no para casos particulares com expressões do tipo “por exemplo”, “se”, “quando”. Essas expressões refletem que o aluno considerou essa possibilidade, ou seja, teve consciência de que estava trabalhando com um caso particular. Desse modo, resolveu o problema para um valor específico que ele mesmo supôs. Enquadramos este tipo de resolução em uma nova categoria, que chamamos de *particularização*.

Em alguns testes apareceu como resposta uma espécie de aritmetização do problema. Ou seja, o aluno resolveu-o para o valor específico que aparecia (em geral no item a) e ignorava o pedido de generalização. A diferença entre esse tipo de resolução e o que chamamos de particularização é que, nesse caso, o aluno não só não explicita a compreensão da possibilidade de variação, como não fornece nenhum indício dessa compreensão. Assim, ele resume o problema a uma resolução aritmética.

Vale realçar que essas duas estratégias não consideradas inicialmente, ou seja, a *particularização* e a *aritmetização*, podem ser adequadas à categoria “operação” proposta por Vinner e Dreyfus.

Como podemos ver, o Teste Piloto foi fundamental para a reestruturação das categorias iniciais. A seguir, há uma descrição das categorias, como entendidas após a aplicação desse teste, identificadas em ordem crescente de abstração/generalização:

- I. Aritmetização: o aluno não percebe a possibilidade de variação e resume a resolução do problema a algumas operações aritméticas;
- II. Particularização: embora perceba a possibilidade de variação no problema, o aluno o resolve apenas para um caso particular que ele supõe;
- III. Uso de Tabelas: o aluno demonstra a compreensão da possibilidade de variação no problema através da construção de tabelas;
- IV. Compreensão com ausência de linguagem analítica: o aluno utiliza-se da linguagem materna ou de um misto de notações para expressar as relações entre as variáveis existentes no problema;

V. Uso de expressões analíticas: o aluno é capaz de perceber as relações existentes no problema e utilizar-se da linguagem matemática para representá-las.

A partir das categorias acima iniciamos a primeira fase da pesquisa, chamada *Teste Individual*, que teve como objetivo analisar as resoluções propostas pelos alunos para os problemas apresentados. Durante essa fase seguimos a mesma metodologia descrita para a análise e coleta de dados do Teste Piloto.

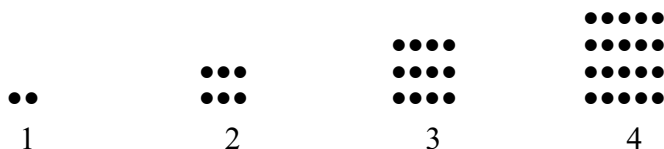
Na segunda etapa da pesquisa, nosso objetivo foi investigar como as interações sociais favorecem a compreensão do conceito de função. Novamente trabalhamos com alunos de 8ª série que ainda não haviam passado por um processo formal de ensino do conceito. Essa segunda etapa foi chamada de *Situação de Interação*.

Nesta fase, no entanto, tínhamos a necessidade de propiciarmos aos alunos participantes da pesquisa um ambiente que possibilitasse as interações e no qual pudéssemos realizar as observações desejadas. Por essa razão, achamos mais adequado trabalharmos com um grupo de no máximo 15 alunos, e em uma sala que nos permitisse a gravação, em vídeo, das situações vivenciadas.

Os problemas propostos aos alunos foram os seguintes:

Problema 1

Na seqüência abaixo, cada número corresponde à posição de um conjunto de pontos, conforme mostra a figura.

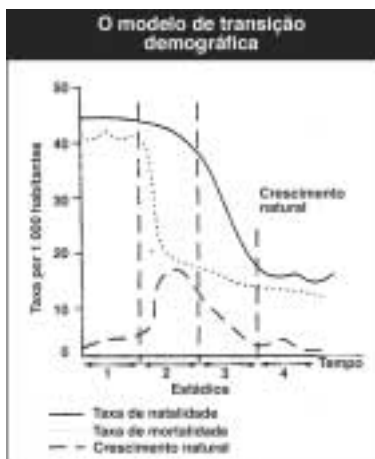


Assim, responda:

- Quantos pontos haverá na 10ª posição?
- Como podemos descobrir quantos pontos haverá em uma posição qualquer, sabendo apenas o número desta posição?

Problema 2

O gráfico abaixo mostra a transição demográfica de uma determinada população de acordo com a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade no período analisado.



INVESTIGANDO A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Analisando o gráfico:

a) Por que no período 1 o crescimento natural é lento embora a taxa de natalidade seja elevada?

b) Qual é o período que apresenta uma queda rápida na taxa de crescimento? Quais os fatores que levaram a isto?

c) Analise o período 2.

Problema 3

Uma caixa d'água tem capacidade para 500 litros. Quando está com 150 litros é aberta uma torneira que despeja na caixa 25 litros por minuto, até que a caixa esteja completamente cheia.

a) Após 9 minutos, quantos litros haverá na caixa?

Como podemos calcular a quantidade de água na caixa sabendo que foram transcorridos alguns minutos?

Problema 4

Chegando à cidade de São Paulo, um turista percebeu que precisaria alugar um carro. Consultou o preço em duas locadoras de automóveis. Na primeira, o preço da diária era de R\$ 16,00 mais R\$ 0,27 por km rodado. Na segunda era de R\$ 26,50 mais R\$ 0,13 por km rodado. Qual das duas locadoras ele deveria escolher? Por quê?

Como dinâmica estabelecida para o trabalho com cada problema, propusemos aos alunos dois momentos de trabalho. No primeiro momento os alunos trabalharam em 6 duplas e um trio, registrando suas resoluções em uma folha de papel, sem utilizarem a borracha. Nesse momento, foram videogravadas algumas duplas que percebemos em discussão. Num segundo momento, os resultados obtidos pelas duplas e pelo trio foram socializados com o grupo todo de alunos com o objetivo de chegarmos a um resultado único. Esta discussão final também foi videogravada. Considerando que nosso objetivo em nenhum momento foi o de estabelecer uma seqüência de ensino e sim possibilitar uma situação de interação que tivesse origem nas atividades propostas buscamos restringir ao máximo as intervenções da pesquisadora, fazendo-as apenas na origem da discussão ou quando percebíamos algum tipo de impasse. No geral, essas intervenções apresentaram-se na forma de perguntas que, no primeiro caso, tinham o objetivo de trazer para o grupo alguns resultados particulares e, no segundo caso, o de desestruturar um raciocínio estabelecido levando o aluno a considerar outras possibilidades para a situação estudada.

Para a análise da situação de interação, tínhamos três materiais: os registros escritos pelos alunos, a gravação em vídeo e os registros que fizemos, ao final de cada encontro, com as nossas observações.

Começamos a análise assistindo às fitas de vídeo e transcrevendo-as por completo. Nesse processo, buscamos identificar situações nas quais a interação fosse responsável por um desenvolvimento conceitual, ou seja, por uma evolução das concepções desenvolvidas pelo aluno (Garnier, Berdnarz e Ulanovskaya, 1996, p.11). Assim, identificamos momentos de discussão nos quais um questionamento ou observação de um indivíduo tivesse levado o grupo a um aprofundamento na compreensão do conceito. Os registros dos alunos foram utilizados como fonte de consulta quando houve dificuldade de audição da fita ou quando, durante a discussão entre os alunos, havia uma pausa para um registro, quando este representava a síntese ou a explicitação de uma argumentação do aluno. Os registros da pesquisadora foram utilizados em uma segunda (e muitas outras) leitura da transcrição da gravação como orientadores para

uma observação mais detalhada e direcionada das respostas dos alunos. Os apontamentos registrados, provenientes da observação do movimento em sala, levaram-nos a olhar a gravação procurando nos diálogos confirmações para nossas impressões iniciais. Os momentos selecionados segundo esses critérios, foram transcritos para o trabalho e buscamos fazer uma breve análise de cada um deles.

Moura, em seu trabalho sobre a “Construção do signo numérico em situação de ensino”, chama esses “momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem” (1992, p. 77) de episódios de ensino. Como no caso dessa pesquisa não foi elaborada uma seqüência de ensino, por não ser esse o nosso objetivo, achamos mais adequado utilizarmos o termo *episódios de conflito*, fazendo uma analogia ao trabalho citado e às argumentações de seu autor para a escolha desses momentos. Assim, *episódios de conflito* são momentos selecionados da socialização da Situação de Interação nos quais “o indivíduo é confrontado com outros modos de resolução de um problema” e, desta forma, “As crianças são, então, levadas pelo conflito sócio-cognitivo a ver o caráter inadequado de suas concepções e sua contradição em relação a outras” (Bednarz, 1996, p. 49).

Segundo esse critério, selecionamos também alguns trechos de *diálogos nas duplas*. A diferença entre os episódios de conflito selecionados na socialização da situação de interação e alguns trechos de diálogos das duplas é que nesses últimos o consenso estabelecido entre os alunos foi imediato uma vez que o número de fatores desequilibradores nos pareceu menor.

Nosso objetivo foi perceber se houve ou não, no decorrer do trabalho, uma mudança nas estratégias utilizadas, o que indicaria uma mudança na compreensão do conceito. A análise de trechos de diálogos das duplas forneceu-nos dados sobre qual o nível de compreensão do conceito com o qual os alunos partiam para a discussão na situação de interação.

As investigações que conduzimos no decorrer dessa pesquisa permitiram-nos perceber que, durante o *trabalho individual* caracterizado pela ausência de interações e portanto com os alunos dispendo apenas de seus conhecimentos prévios, os estudantes não demonstraram uma maior compreensão do conceito de função conforme trabalhavam com esse nas resoluções dos problemas propostos. Através da observação das estratégias de resoluções, utilizadas por cada aluno no decorrer dos problemas, ficou claro que a situação de trabalho individual não possibilitou um movimento de abstração e generalização, por parte do aluno, que lhe permitisse a elaboração de expressões analíticas que representassem os problemas estudados. Nenhum aluno demonstrou, através de seus registros, um movimento de transição entre as categorias, que lhe permitisse chegar ao uso de expressões algébricas, o que evidenciaria a compreensão do conceito de função no decorrer do trabalho individual. A análise do teste individual mostrou-nos que os conhecimentos prévios dos alunos não foram suficientes para que houvesse um movimento progressivo de compreensão do conceito de função.

Já na *situação de interação*, o panorama observado foi muito diverso do descrito até agora. Pudemos identificar vários episódios nos quais o aluno passou, através da discussão estabelecida com o colega ou mesmo a partir de alguma pergunta elaborada pela pesquisadora, a utilizar uma estratégia de resolução diferente da que usou no início da resolução do problema. Em geral, esse aluno saiu de uma situação de particularização para uma compreensão das relações existentes entre as variáveis do problema, as quais descreveu utilizando-se da língua materna. Ou seja, não mais particularizou, porém ainda falta uma linguagem analítica. Em outras situações, a descrição verbal de uma expressão analítica feita por um dos alunos possibilitou a outros passarem a utilizar essa estratégia na discussão do problema e até mesmo na resolução de outros problemas.

INVESTIGANDO A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Sendo assim, enquanto a situação individual possibilitou-nos construir uma tabela que reflete o panorama das estratégias de resoluções utilizadas, a situação de interação permitiu-nos elaborar o que chamamos de panorama do movimento de compreensão do conceito de função.

Para a leitura das tabelas citadas utilizaremos a notação abaixo para as categorias de compreensão do conceito:

- A Aritmetização
- P Particularização
- T Uso de Tabela
- C Compreensão com ausência de linguagem analítica
- E Uso de Expressão Algébrica

Tendo em vista o espaço deste artigo selecionamos, dentre os 62 alunos com os quais trabalhamos nesta fase da pesquisa (Moretti, 1998, p. 77), três alunos cujas resoluções nos permitem expor a análise que foi desenvolvida no trabalho citado.

Tabela 2: Panorama das estratégias de resoluções utilizadas no teste individual

Problema \ Aluno (AL)	1	2	3	4
1	C	A	P	C
2	T	C	C	C
21	E	E	E	E

Podemos perceber que o único aluno que chega à representação analítica de funções é o aluno AL 21. No entanto, esse aluno utiliza essa estratégia de resolução para todos os problemas o que evidencia que essa compreensão não foi desenvolvida durante o trabalho no Teste Individual, mas sim fazia parte dos conhecimentos prévios desse aluno. Os demais alunos não chegaram à representação analítica de funções e, em alguns casos, oscilam entre estratégias mais e menos elaboradas de resolução. Por exemplo, aluno AL 2, no problema 1, parte do uso de tabelas chegando, no problema 3, à compreensão da relação entre as variáveis envolvidas, embora sem o uso da representação analítica. Já o aluno AL 1 embora aparentemente tenha compreendido essa relação no problema 1, abandona essa estratégia no problema 3 reduzindo a resolução à particularização do item a desse problema. Essa situação pode ser observada nos registros escritos desses alunos:

AL 2:

Problema 1:

“Fazendo cálculos como esses abaixo:

1 para 2 = 4p

2 para 3 = 6p

3 para 4 = 8p

4 para 5 = 10p	5 = 30p	
5 para 6 = 12p	6 = 42p	
6 para 7 = 14p	7 = 56p	Na 10ª posição
7 para 8 = 16p	8 = 72p	haverá 110
8 para 9 = 18p	9 = 90p	pontos
9 para 10 = 20p	10 = 110p”	

Problema 3:

“Bom já se sabe que a torneira só seria aberta quando tivesse 150 litros, daí basta pegar a quantidade de minutos que passaram, multiplicar por 25 e esse resultado teria de ser somado aos 150 litros”

AL 1:

Problema 1:

“Percebe-se que para saber quanto pontos haverá, basta multiplicar a posição pelo seu sucessor.”

Problema 3:

“Exemplo: 25
 x 9
 —
 225
 +150
 —
 375 “

Em contraposição à situação do Teste Individual apresentamos alguns dos resultados obtidos na Situação de Interação. Para a leitura da tabela 3 mantivemos a notação usada na tabela 2 para as categorias e acrescentamos alguns índices que representam o momento no qual o aluno demonstrou a utilização de determinada estratégia de resolução. Os índices acrescentados, juntamente com seu significado, foram os seguintes:

- D Momento do trabalho em Duplas
- 1 Episódio 1
- 2 Episódio 2
- 3 Episódio 3
- 4 Episódio 4
- R Registro escrito
- ~ significa “não”

Além disso, a sigla sobre a seta indica que houve uma interação específica com um aluno, representado por suas iniciais, ou com a pesquisadora, representada pela letra P.

Como exemplo da leitura da tabela tomemos a aluna SIM no problema 3 (três). Ela parte de particularizações no trabalho em duplas e, através da interação com DEB, passa a compreender as relações existentes entre as variáveis do problema. Ao final da discussão, a aluna chega à expressão analítica que representa esse problema registrando-a por escrito.

Sendo que na segunda etapa da pesquisa formaram-se inicialmente 6 duplas e um trio e posteriormente houve uma socialização entre os 15 alunos, é evidente que nem todos os alunos se manifestaram em todos os momentos. Devido a isso, selecionamos para a tabela abaixo, os alunos que expuseram suas resoluções em todos os momentos propostos e para todos os problemas trabalhados, possibilitando assim a análise de seus trabalhos no desenvolvimento de toda essa segunda etapa da pesquisa.

Tabela 3: Panorama do movimento de compreensão do conceito de função durante a Situação de Interação

Problemas	Problemas 1	Problemas 2	Problemas 3	Problemas 4
Alunos				
→ANA	P_1	$C_D \rightarrow C_2$	$C_2 + P E_2$	E_4
→→ SIM	E_4	$+ DEB C_D \rightarrow C_1$	$P_D + DEB C_D \rightarrow E_R$	P_D
DEB		CD	$A_D \rightarrow C_D \rightarrow E_R$	P_D
→FER	$C_D \rightarrow T_1 \rightarrow E_2$	$\sim C_D + ANA$ $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$	$C_1 \rightarrow E_3$	$P_D \rightarrow E_4$

Podemos observar, através dos episódios selecionados, como cada aluno vai compreendendo, no decorrer da atividade, o conceito de função. Vejamos, com um pouco mais de detalhe, o caminho percorrido por dois desses alunos:

FER:

Através da observação do registro escrito da dupla de FER, no qual aparece “multiplique o número da posição pelo próximo número”, pudemos perceber que FER já havia compreendido as relações entre as variáveis envolvidas no problema durante o trabalho da dupla, embora não tivesse elaborado uma expressão analítica que o representasse. Na situação de interação, FER inicia a discussão do problema 1 utilizando casos particulares para descrevê-lo (uso de tabela). No entanto, esse mesmo aluno participa de uma discussão, no episódio 2, demonstrando ter compreendido, através das interações com os colegas, a expressão analítica correspondente ao propor a necessidade de parênteses para a expressão $x.(x+1)$ justificando: “Senão vai fazer x vezes x primeiro depois vai somar um”. Já no problema 2 pudemos observar que durante o trabalho da dupla aparece no registro escrito “o período de crescimento é lento porque a taxa de mortalidade é alta” demonstrando que FER não conseguiu elaborar que o crescimento natural depende tanto da taxa de mortalidade quanto da taxa de natalidade. Foi somente na interação com ANA quando ela afirma, no momento de socialização, que o crescimento “depende da taxa de natalidade” que FER percebeu que o crescimento natural depende das taxas de natalidade e de mortalidade e não apenas da taxa de natalidade, como havia registrado anteriormente. Ele conclui: “É, depende também da taxa de natalidade”.

No episódio 3 do problema 3, FER passa a dominar o uso da linguagem analítica ao propor que “pode ser x vezes uma outra letra porque pode variar o número de litros que saem da torneira”. Isso não havia acontecido no trabalho na dupla nem no episódio 1, quando esse aluno descreve as relações entre as variáveis através da linguagem materna:

P: Alguém fez de uma outra forma e gostaria de falar?

FER: A gente não escreveu, mas cada minuto é 25 litros. Então, você multiplica o número de minutos por 25 que vai dar o número de litros que escorreram pela torneira. Aí depois, você soma com 150 que já tinha na caixa.

P: Isso que você está falando vale sempre ou só quando são 9 minutos?

FER: Não, vale sempre.

Esse movimento se repete no problema 4, no qual esse aluno começa a resolução resistindo a qualquer forma de generalização e termina encontrando o valor procurado através do trabalho com as expressões analíticas propostas por ANA:

ANA: 16 mais $0,27n$.

P: Você está chamando de n o número de quilômetros?

ANA: É.

P: E a segunda locadora?

FER: 26 e cinquenta mais n vezes 13 centavos.

ANA: E qual que tem um resultado menor?

FER: Tem que saber o n , né?

Assim, FER percorreu um caminho na compreensão do conceito de função que foi do particular, uso de tabelas no problema 1, ao geral, representação analítica no problema 4. Os episódios relatados nos mostraram que isso só foi possível através das discussões que estabeleceu com os colegas e com a pesquisadora no decorrer da Situação de Interação.

ANA:

No primeiro episódio do problema 1, essa aluna demonstra resolver o problema através da estratégia de particularização:

P: Que resultado vocês acharam?

Alunos: 110.

P: Como vocês chegaram a este resultado?

FEA: Multiplicando o número pelo número mais um.

FER: Por exemplo, se sua série é 2 você faz 2 vezes 3. Na série 2 tem 6 bolinhas. No 10, no 11, você faz 11 vezes 12 não ... é...

ANA: São 10 bolinhas na vertical e onze... dez mais um...

Já no problema 2, essa aluna identifica, ainda durante o trabalho na dupla, as variáveis do problema. Essa compreensão é confirmada no episódio 2, quando ANA descreve a queda rápida na taxa de crescimento natural do período três do gráfico apresentado como consequência da queda na taxa de natalidade e da relativa estabilidade na taxa de mortalidade:

P: E o item b? Quem se propõe? SIM e DEB?

SIM: O período que apresenta queda rápida é o 3, porque a taxa de natalidade caiu e a taxa de mortalidade continua estável.

ANA: No período 3 a taxa de natalidade caiu e a taxa de mortalidade continua estável, embora tenha caído no período 2, mas em relação as duas ela continua estável.

No problema 3, ANA inicia o episódio 2 descrevendo as relações entre as variáveis do problema. O comentário feito pela professora (P) – “você contou o que era para fazer” – faz com que essa aluna reelabore sua descrição, utilizando-se agora da linguagem matemática, ou seja, descrevendo a expressão analítica correspondente:

ANA: Temos que multiplicar o número de minutos transcorridos por 25, que é o número de litros despejados da torneira por minuto, e somar com o número de litros que já havia na caixa d’água, que no caso é 150.

P: Você contou o que era para fazer...

INVESTIGANDO A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

ANA: Ficaria n , que é o número de minutos, vezes 25, que é o número de litros despejados da torneira por minuto, mais 150 que é o que já havia na caixa d'água, é igual à quantidade de água que vai haver na caixa em n minutos.

Finalmente, é no episódio 4 do problema 4, no qual já ficou evidente o processo de compreensão de FER que também ANA elabora sem dificuldades a expressão analítica do problema:

P: O que nós estamos querendo descobrir afinal?

ROG: Qual é mais lucro.

JUL: O número exato de quilômetros que ele deve andar para escolher... Assim... até x a primeira, depois de x ele escolhe a segunda.

P: Alguém tem alguma idéia de como fazer isso.

Alunos: Hum, hum!

FER: Faz 78 vezes o preço da primeira...

P: Por que 78?

FER: Para a gente ver se está certo.

JUL: Está aqui (mostrando o resultado que já tinha sido discutido).

P: Como variam os preços da primeira?

ANA: 16 mais $0,27n$.

P: Você está chamando de n o número de quilômetros?

ANA: É.

P: E a segunda locadora?

FER: 26 e cinquenta mais n vezes 13 centavos.

ANA: E qual que tem um resultado menor?

FER: Tem que saber o n , né?

Outro exemplo que mostra um movimento no sentido da compreensão das relações entre variáveis envolvidas num problema através da interação é o que aparece na descrição dos diálogos entre SIM, DEB e P no problema 2:

SIM: A primeira pergunta...

P: Você não entendeu o que é o período um?

SIM: Não... Por quê?

(Ela lê a questão.).

SIM:... natalidade é alta...

P: Você está conseguindo achar um outro fator que influencia nisto?

SIM: Não, não sei.

P: Sobre qual dos dois períodos é a pergunta?

SIM: Período um.

P: Então, nesta primeira faixa, ele já está dizendo que o crescimento natural é lento e a pergunta é por que isto acontece. A taxa de natalidade é grande, né? Se a taxa de natalidade é grande, por que o crescimento é lento?

(SIM lê novamente o enunciado.)

P: O que é taxa de natalidade?

DEB: Número de pessoas que nascem.

P: Então se nasce bastante gente, por que o crescimento natural é lento?

DEB: Porque morre!

SIM: Ah, tá!

P: Então qual é a sua conclusão?

SIM: Porque a taxa de mortalidade também é.

Inicialmente SIM, não consegue compreender porque o crescimento natural é lento se a taxa de natalidade é elevada. Mesmo com as perguntas da professora, ela não percebe a presença

de uma outra variável do problema que é a taxa de mortalidade. E somente através da interação com DEB, quando afirma “porque morre!”, que essa compreensão ocorre e ela consegue perceber que o crescimento natural é lento porque há uma mortalidade alta. Embora essa aluna tenha percebido a existência de duas variáveis influenciando o crescimento demográfico, ainda há um conflito entre os conceitos de número absoluto e taxa, na situação descrita.

A importância da interação social como fator de transformação da compreensão que o aluno estabelece entre as variáveis envolvidas nos problemas pôde ser observado também no problema 3, quando SIM e DEB discutem o item a:

DEB: 25 litros por minuto... aí vai completar a caixa.

SIM: 25 litros por minuto com 9 minutos... 225 mais 150...

DEB: Como assim? Na b?

SIM: Não, na a. Quantos litros haverá na caixa... 225 mais 150.

DEB: Mas aí é contando com...

SIM: Com o que já tinha, o 150.

DEB (Após alguns minutos): Em um minuto tem 25 litros. X vezes 25 que é igual... Não... 25 é igual a um minuto (aponta a folha que SIM escreve)... Já transcorreram alguns minutos... Seria x minutos...

SIM: Então x é o minuto transcorrido.

DEB: É, x é o minuto transcorrido.

Essas alunas partem de uma estratégia de aritmetizações para um processo de generalização que é iniciado por DEB e assimilado por SIM, que passa a associar variáveis para o problema proposto. Ou seja, essas duas alunas começam o trabalho em dupla, no problema três, através de aritmetizações. Durante o diálogo estabelecido entre elas, chegam à compreensão das relações existentes entre as variáveis do problema. Na discussão com o grupo todo, não foi possível percebermos se elas elaboraram ou não uma expressão analítica correspondente ao problema, porém, no seu registro escrito encontramos:

“x minutos transcorridos

no caso:

$(x \cdot 25) + 150$ “

Assim, é evidente que, através da interação que estabeleceram, passaram de uma estratégia de aritmetizações para a compreensão com ausência de linguagem analítica e, finalmente, conseguiram elaborar uma expressão analítica que representasse o problema.

Essas situações permitiram-nos observar que houve um movimento progressivo de compreensão do conceito que foi possibilitado pela situação de interação. Nesse processo os conceitos prévios atuaram como fatores desencadeadores da discussão e como desequilibradores de concepções individuais. Desta forma, a compreensão do conceito construiu-se através de um movimento oscilante que foi do individual para o social e do social para o individual. Através das divergências de compreensões e da contraposição de resultados identificadas nos episódios de conflitos, os alunos reviram suas posições, buscando estabelecer um consenso com os colegas.

Retomando o conceito de desequilíbrio em Piaget fica evidente o movimento cognitivo dos alunos na busca de um novo equilíbrio, ou seja, a Situação de Interação propiciou aos alunos a “quebra (de) um equilíbrio inicial provocando um desequilíbrio que obriga o indivíduo a levar a cabo determinadas ações para conseguir um novo estado de equilíbrio” (Sole, 1997, p. 31).

A generalização surgiu neste contexto como uma necessidade, uma forma de viabilizar e/ou facilitar o estudo do problema. Além disso, o estudo de sua representação analítica apareceu como um processo econômico e confiável, como pudemos perceber em um dos episódios selecionados para o problema 1 (um), no qual um dos estudantes se convenceu da

igualdade entre as soluções $n \cdot (n+1)$ e n^2+n somente depois que usa o argumento algébrico da propriedade distributiva.

Durante a pesquisa, a situação de interação não só possibilitou esse movimento de compreensão do conceito de função, através da generalização e da abstração, como também, se mostrou forte aliada do processo de aprendizagem, independentemente do conceito que esteja sendo trabalhado em sala de aula, uma vez que em muitos momentos a reação do grupo leva os alunos a reverem e reformularem as suas frases.

Paralelamente a isso surgiram, nas observações dos alunos, temas que não haviam sido previstos pela professora. Em um episódio do problema 3 (três) uma aluna faz uma observação sobre o domínio da função que representava o problema o que possibilitou uma discussão sobre conjuntos numéricos e, em especial, sobre a continuidade dos números reais.

Essa situação, possibilitada pela proposta de interação entre os alunos traz em si a expressão da zona de desenvolvimento proximal do aluno conforme proposto por Vygotsky e nos faz refletir sobre o pensamento desse autor ao afirmar que “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento” (Vygotsky, 2001, p. 114).

Tanto a adequação da linguagem utilizada na argumentação, quanto a atribuição de significados e a discussão sobre um tema não diretamente ligado à proposta inicial surgiram de uma situação de interação que só foi possível devido a dois fatores essenciais: a atividade proposta e a atuação do professor em sala de aula.

A atividade proposta caracterizou-se por apresentar aos alunos situações-problema que viabilizaram um processo de busca de regularidades que permitisse a generalização. É esse processo de investigação no qual o caminho a percorrer é mais frutífero que o resultado obtido que estimula a discussão e, conseqüentemente, a interação entre os alunos. Essas situações de interação vêm acompanhadas também da possibilidade de trabalhar, em sala de aula, o convívio social e o respeito às diversidades.

No entanto, o trabalho com esse tipo de atividade traz consigo algumas dificuldades como, por exemplo, o dimensionamento do nível da proposta inicial e a possibilidade de o aluno considerar premissas falsas na sua análise. Assim, além da situação de grupo que propicia ou não a legitimação das afirmações individuais, é fundamental, retomando o conceito de zona de desenvolvimento proximal, que o professor atue como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento uma vez que “o que a criança pode fazer hoje com o auxílio dos adultos poderá fazê-lo amanhã por si só” Vygotsky (2001, p. 113).

Em sala de aula, essa atuação, guiada pelo desenvolvimento lógico-histórico do conceito e embasada pelas teorias que procuram compreender os processos de aprendizagem, aparece quando o professor é capaz de elaborar questionamentos que levem os alunos a superarem seus impasses, sem obterem, de forma imediata, as soluções dos problemas. Talvez por que “As melhores sugestões são as que questionam os alunos e não as que lhes respondem directamente às questões” (Brunheira, 1996, p. 197).

Comparando a análise que fizemos da situação de trabalho individual com a situação de interação, podemos concluir que a situação de interação caracterizou-se por possibilitar um movimento de compreensão progressiva do conceito de forma significativa, que não ocorreu, perceptivelmente, em situação de trabalho individual pautada apenas nos conceitos prévios. No entanto, as atividades propostas pelo professor permitiram que esses mesmos conceitos se manifestassem nessas situações de interações, constituindo-se como um ponto de partida fundamental para as discussões posteriores.

No desenvolvimento das atividades podemos perceber que o trabalho em sala de aula envolvendo situações de interação entre os alunos exige do professor disposição para lidar com o

imponderável e confiança no seu próprio conhecimento sobre o conteúdo que pretende ensinar. Além disso, sua atuação se estende para além da sala de aula através da elaboração de atividades desencadeadoras, que viabilizem a interação entre os alunos, para que, através dessas relações sociais, passem a perceber a necessidade do conceito. Nesse processo professor e aluno aprendem.

Referências bibliográficas

- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D., HANESIAN, H. *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México, Trillas, 1983.
- BEDNARZ, N. Interações sociais e construção de um sistema de escrita dos números no ensino fundamental, In: GARNIER, C. et alii. *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- BRUNHEIRA, L. ; FONSECA, H. Investigar na aula de Matemática. In: ABRANTES, P. et alii (ORG). *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa, Grupo "Matemática para todos – investigações na sala de aula" (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1996.
- COLL, C. e SOLÉ, I. Os professores e a concepção construtivista. In: COLL, C. et alii. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo, Ática, 1997.
- GARNIER, C. et alii. *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- GARNIER, C, BEDNARZ, N. e ULANOVSKAYA, I. Duas diferentes visões da pesquisa em Didática. In: *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- LA TAILLE, Y. O lugar da interação social na concepção de Jean Piaget. In: *Piaget, Vygotsky, Wallon*. São Paulo, Summus, 1992.
- LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A.. *Pesquisas em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU, 1986.
- MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. et alii. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo, Ática, 1997.
- MORETTI, V. D. *O Conceito de função: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadores da aprendizagem*. Dissertação (Mestrado). Feusp, São Paulo, 1998.
- MOURA, M. O. *Construção do signo numérico em situação de ensino*. Tese (Doutoramento). Feusp, São Paulo, 1992.
- MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Campinas, Papirus, 1997.
- PIAGET, J. ; GARCIA, R. *Psicogênese e História das Ciências* Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1987.
- RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C. et alii. *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- SOLÉ, I. Disponibilidade e sentido na aprendizagem. In: COLL, C. et alii. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo, Ática, 1997.
- VIGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo, Martins Fontes, 1984.
- VIGOTSKY, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual em idade escolar. In: VIGOTSKY, L.S. et alii. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo, Ícone, 2001.
- VINNER, S. e DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 4, p. 356-366, 1989.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. In: *Archive for History of exact sciences*, v. 16, n.1, p. 37-85, 1976.

**Artigo recebido em setembro de 2002 e
selecionado para publicação em abril de 2003.**