Teoria da Medida e outras contribuições

Chaim Samuel Hönig

Há uma dificuldade natural para perceber a importância de descobertas e invenções passadas e o seu impacto na nossa civilização, nos nossos conhecimentos e na nossa concepção do mundo, mesmo quando essas fazem parte do nosso cotidiano. Assim, por exemplo, dificilmente podemos imaginar como era a vida há um ou dois séculos quando não havia os meios de transporte e de comunicação atuais, nem as vacinas e a medicina moderna ... nem o micro... Nascidos e formados dentro de uma civilização nos é difícil imaginar outra sociedade completamente diferente, até em questões muito mais específicas como a situação das Ciências Matemáticas na USP e no Brasil, há 50 anos. Para quem não viveu o período correspondente, em que grandes modificações se operaram, é difícil imaginar qual era a realidade há quarenta ou sessenta anos; qual era o *status* da Análise, o que era ensinado como Álgebra e Geometria etc.; qual o número de estudantes, o seu nível e as suas condições de estudo, a estrutura das Universidades, as condições de carreira etc. Do mesmo modo, para matemáticos das duas últimas gerações, é muito difícil conceber o impacto e a originalidade das contribuições de von Neumann pois nós já *nascemos* dentro das mudanças provocadas por elas.

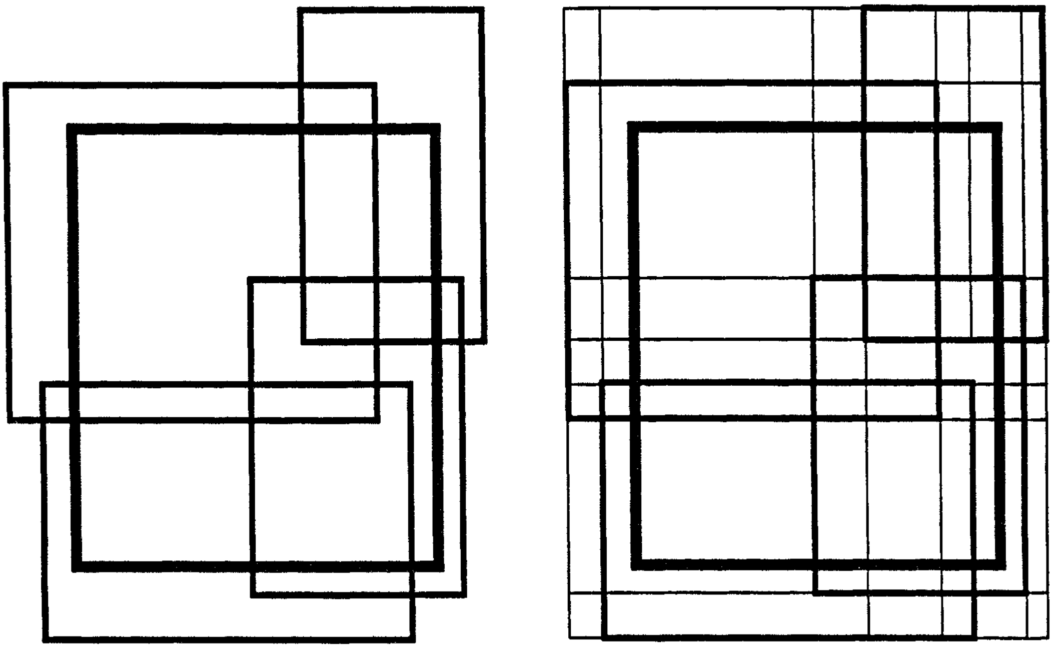
Uma das características de von Neumann era a simplicidade que ele conseguia ver em situações aparentemente muito complicadas. Ao mesmo tempo, ele também sabia trabalhar com áreas extremamente ricas e complexas, dando-lhes forma, organização e estrutura que permaneceriam por décadas. Nas exposições de hoje veremos diversos exemplos disso.

Além disso, para avaliarmos uma contribuição científica devemos começar por colocá-la no seu contexto, tanto com relação ao passado, aos problemas que ela resolveu, quanto com relação ao futuro e às novas direções que sugeriu ou sugere e estimula. Porém, acontece às vezes que o passado *nada diz*, pois se trata de problema *que não existia* ou de que ninguém sequer cogitava de uma possível solução. Isto aconteceu freqüentemente nas contribuições de von Neumann.

Nesta exposição nos deteremos em particular nas contribuições de von Neumann à Teoria da Medida e a alguns tópicos da Análise. Suas contribuições mais importantes e difíceis a Álgebras de Operadores e a outras áreas serão abordadas pelos conferencistas que me seguirão.

Uma das criações mais importantes da Análise do começo deste século foi a da Integral de Lebesgue. Até então o grande instrumento para medida de grandezas era a Integral de Riemann. A Integral de Lebesgue (cujas propriedades e condições de aplicação são muito simples) não só estendeu notavelmente a Integral de Riemann como permitiu resolver, num período de poucos anos, os problemas fundamentais da Teoria da Integração que estavam em aberto: problemas de séries de Fourier (*o Teorema de Fischer-Riesz*), teoremas de convergência de integrais, condições da iteração de integrais (o *Teorema de Fubini*) etc., além de dar um impulso decisivo à Análise Funcional, às Teorias das Equações Diferenciais e Integrais etc. (pois com a Integral de Lebesgue passamos a ter espaços *completos*). O ponto básico dessa nova teoria foi a introdução da noção de medida, estendendo as clássicas noções de comprimento, área, volume etc. Desenvolveu-se então a Teoria da Medida e a Teoria das Funções Mensuráveis. No livro de Lebesgue e nos de outros autores das décadas seguintes esta parte preliminar da construção da medida (a definição de conjunto mensurável através da coincidência da medida interior e da medida exterior do conjunto) é muito trabalhosa e extensa. Mesmo no livro de Titchmarch (1a. edição 1932), só a parte da Teoria da Medida ocupava quinze páginas; a definição simplificada que Caratheodory deu de conjunto mensurável melhorou a situação. (Do ponto de vista da Análise Funcional houve diversas extensões da Integral de Lebesgue, em particular a formulação de Daniell.) Restava porém simplificar a demonstração de que a nova teoria estendia as noções clássicas; por exemplo, que com a nova definição de medida valia o fato *evidente* de que a medida de um retângulo coincidia com o produto do comprimento de seus lados.

A demonstração geométrica deste fato é elementar mas extremamente longa e, por esta razão, não é feita nos textos. Von Neumann deu uma demonstração muito engenhosa e simples deste fato: ele recobriu o retângulo por um conjunto (infinito) de retângulos, conjunto este que por compacidade sempre pode ser tomado finito; a seguir demonstrou, por contagem de pontos de um reticulado e por homotetia, que a soma das áreas dos retângulos recobridores é sempre maior que a do retângulo inicial. Essa demonstração (tirada das notas de aula de um curso de von Neumann) é reproduzida no livro *Differential Topology* de Guillemin e Pollack e ocupa menos de uma página (p. 203).



Durante a Segunda Guerra Mundial, quando von Neuman trabalhou no projeto Manhattan para a construção da bomba atômica, usou uma idéia análoga para calcular a configuração geométrica adequada à bomba. Mencionemos que a demonstração elementar acima de von Neumann (ou a definição direta da integral feita posteriormente, independentemente, por Kurzweil, Henstock & Mc Shane) permite que hoje a Teoria de Integração de Lebesgue seja desenvolvida muito rapidamente.

Mencionemos ainda que outra contribuição relevante de Von Neumann na Teoria da Medida é a demonstração da existência e unicidade da Medida de Haar em grupos compactos. Cumpre também lembrar a extensão que von Neumann fez do paradoxo de Banach–Tarski a grupos não abelianos e suas contribuições ao quinto problema de Hilbert para grupos compactos.

Von Neumann ainda tem contribuições a muitas outras áreas como Lógica, Teoria dos Conjuntos, Álgebras e Reticulados (particularmente foi um dos criadores das Álgebras de Jordan (Jordan *et al.*, 1934)), Fundamentos, Teoria Ergódica (deu o primeiro tratamento rigoroso da hipótese ergódica em mecânica estatística), Hidrodinâmica etc., bem como o seu papel primordial na Computação, Economia Matemática, Teoria dos Jogos e Mecânica Quântica, sobre as quais versarão as outras exposições de hoje.

Proposition. Let S be a rectangular solid and $S_1, S_2, \ldots$ a covering of its closure of $\bar{S}$ by other solids. Then $\sum \text{vol}(S_j) \geq \text{vol}(S)$.

Proof. Call $(z_1, \ldots, z_n)$ an *integer point* of $\mathbf{R}^n$ if each z_i is an integer. Let $S = S(a, b)$. The number of integers in the interval $a_i < z_i < b_i$ is less than $b_i - a_i + 1$ and at least as large as $b_i - a_i - 1$. Assume, for the moment, that the length $b_i - a_i$ of each side of S is greater than 1. Then the number of integer points in S is less than

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 1)$$

and at least

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1).$$

If $S_1, S_2, \ldots$ is a cover of $\bar{S}$, then, by compactness, some finite number $S_1, \ldots, S_N$ also is a cover. Now the number of integer points in S is at most equal to the sum of the numbers of integer points in $S_1, \ldots, S_N$. Thus if $S_j = S(a^j, b^j)$, we get

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (b_i^j - a_i^j + 1).$$

For each positive number λ, define $\lambda S(a, b) = S(\lambda a, \lambda b)$. Since $\overline{\lambda S}$ is covered by $\lambda S_1, \ldots, \lambda S_N$ the preceding calculation gives

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (\lambda b_i^j - \lambda a_i^j + 1).$$

Now, no matter what the size of S, if λ is large enough, then λS will have sides of length greater than 1. So the last inequality is valid for large λ without any restriction on S.

You have now only to divide both sides of the inequality by λ^n and then let $\lambda \longrightarrow \infty$ to complete the proof. Q.E.D.

É também notável o legado de von Neumann quando analisado sob a perspectiva da *descendência* a que deu lugar. Lembremos o padrão criado em meados do século passado pela teoria das Superfícies de Riemann, a qual culmina com a fórmula de Riemann–Roch que liga completamente os aspectos analíticos, geométricos e algébricos do estudo dessas superfícies. Este estudo serviu de modelo para teorias posteriores; assim, por exemplo, a teoria de Atiyah–Singer de equações a derivadas parciais em variedades. Analogamente, o estudo das Álgebras de von Neumann levou diretamente à Matemática não-*comutàtiva* (Geometria não-comutativa (Connes, 1994), Integração não-comutativa, Teoria das Probabilidades não-comutativa, Teoria dos Conjuntos não-comutativa etc. – o nome não-comutativo se deve ao fato de que a Álgebra correspondente às estruturas precedentes é não-comutativa). Esta linha, que hoje é uma das mais ativas da matemática, teve em particular dois matemáticos (Allain Connes, 1978 e Vaughan Jones, 1990) contemplados com a medalha Field, (o equivalente, em Matemática, ao prêmio Nobel), outorgada a cada quatro anos pelo Congresso Internacional de Matemática.

Referências bibliográficas

CONNES, A. *Non-commutative geometry*, Academic Press, 2 ed., 1994.

JORDAN, P.; VON NEUMANN, J. & WIGNER, E. On the algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics*, v. 35, p. 29–64, 1934.

Chaim Samuel Hönig é professor do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP.

Palestra feita pelo autor no encontro *A obra e o legado de John von Neumann*, organizado pelo Instituto de Estudos Avançados da USP e pela Academia Brasileira de Ciências no Instituto de Matemática e Estatística da USP em 14 de novembro de 1995.