ARTÍCULOS

# Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros[1]

Miguel Montes[2]
ORCID: 0000-0003-3181-0797
Maria Isabel Pascual[2]
ORCID: 0000-0002-6429-2968
José Carrillo[2]
ORCID: 0000-0001-7906-416X
Juan Pedro Martín-Díaz[2]
ORCID: 0000-0001-6522-824X

## Resumen

Asumiendo que los profesores deben ser capaces de formular problemas escolares, se aborda en este estudio el planteamiento de problemas multiplicativos de números enteros. Así, este artículo se centra en la caracterización de problemas multiplicativos de números enteros planteados por futuros profesores españoles de Educación Primaria. Para ello, se analizan problemas formulados por 121 estudiantes del grado de Educación Primaria -estudiantes para maestro- de la Universidad de Huelva, a los que se pidió que plantearan problemas en cuya resolución hubiera que realizar la operación 8x(-2). Para profundizar en las características, se hizo un análisis de contenido de cada uno de los problemas planteados, alrededor de cuatro aspectos: categoría semántica a la que pertenecen, coordinación de los términos usados en la formulación con los demandados, contexto en el que se ambienta, y resolubilidad del problema. Los resultados del estudio muestran que los estudiantes para maestro proponen indistintamente problemas de estructuras basadas en isomorfismos de medida y de relación escalar, a la vez que experimentan dificultades para formular el requerimiento del problema de tal manera que la solución conserve su naturaleza negativa de forma explícita. Estos resultados tienen potenciales implicaciones en la formación de maestros, que debería fomentar, desde las propuestas curriculares de la misma, la capacidad de los futuros maestros para plantear problemas matemáticos.

**1-** Esta investigación fue financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, del Gobierno de España (Proyecto: RTI2018-096547-B-I00), y por el grupo de investigación DESYM (HUM168) del Plan Andaluz de Investigación.

**2-** Universidad de Huelva, Huelva, España. Contactos: miguel.montes@ddcc.uhu.es; isabel.pascual@ddcc.uhu.es; carrillo@uhu.es; juan.martin@ddcc.uhu.es

https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238551esp

## Palabras clave

Formulación de problemas – Problemas multiplicativos – Números enteros – Estudiante para maestro.

# *Characterization of multiplicative integer problems posed by future teachers*

## *Abstract*

*Assuming that teachers must be able to formulate school problems, this study deals with the approach of multiplicative problems of integers. Thus, this article focuses on the characterization of multiplicative problems of integers posed by future Spanish elementary teachers. To do this, we have analyzed problems formulated by 121 students of the Primary Education Degree - prospective teachers – at the University of Huelva, who were asked to pose problems in whose resolution the operation 8x(-2) had to be carried out. To delve into the characteristics, a content analysis was made of each of the problems, covering four aspects: the semantic category they belong to, coordination of the terms used in the formulation with the demanded, context it is set within, and problem solvability. The results of the study show that prospective teachers indistinctly propose problems of structures based on isomorphisms of measure and scalar relation, while experiencing difficulties in formulating the requirement of the problem in such a way that the solution explicitly maintains its negative nature. These results have potential implications for teacher training, which should promote, based on its curricular proposals, the capacity of future teachers to pose mathematical problems.*

## *Keywords*

*Problem posing – Multiplicative problems – Integers – Prospective teachers.*

## Introducción

La formulación de problemas ha sido objeto de atención desde la investigación en educación matemática durante varias décadas (PÓLYA, 1945; KILPATRICK, 1987; CRESPO, 2003; SINGER; ELLERTON; CAI, 2015; FELMER; PEHKONEN; KILPATRICK, 2016). La formulación de problemas abarca también la formulación de situaciones problemáticas, o la reformulación de las mismas (SILVER, 1994), ya sea por el profesor como parte de su labor profesional, o por los estudiantes como parte de tareas propuestas. En este estudio nos centramos en los profesores como formuladores de problemas, en particular en los estudiantes para maestro (EPM).

Las habilidades de formulación de problemas por parte de los profesores constituyen uno de los elementos centrales de las competencias didácticas ligadas al contenido (TICHÁ; HOSPESOVÁ, 2013). En particular, la formulación o adaptación de problemas para su posterior uso en la práctica docente supone una herramienta poderosa para contribuir a la formación de profesores (CRESPO, 2003; BALL; FORZANI, 2009; NICOL; BRAGG, 2009; GRUNDMEIER, 2015), dado que implica la articulación de múltiples aspectos de conocimiento, tanto didácticos del contenido como del propio contenido.

En particular, en este estudio focalizamos nuestro interés en cómo los EPM proponen problemas multiplicativos de números enteros, contenido abordado en los últimos cursos de Educación Primaria en España. Las estructuras multiplicativas han sido objeto de estudio, tanto desde la perspectiva del aprendizaje de los alumnos (MULLIGAN; MITCHELMORE, 1997; IVARS; FERNÁNDEZ, 2016), como desde la comprensión del profesorado (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996). Asimismo, los problemas multiplicativos han sido caracterizados y organizados según diferentes categorías (VERGNAUD, 1983; GREER, 1992; NESHER, 1992). Si bien se han identificado antecedentes ligados a las características de problemas multiplicativos de fracciones (AYDOGDU-ISKENDEROGLU, 2018), los problemas multiplicativos de números enteros han recibido menor atención, como en general la enseñanza de los números enteros, debido a las dificultades de relación con contextos significativos para los alumnos de Primaria[3] (GONZÁLEZ *et al*., 1990; SHUTLER, 2017).

Aunando el interés que generan los estudios sobre formulación de problemas, los relativos a las estructuras multiplicativas, y los ligados a números enteros, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué características tienen los problemas multiplicativos que proponen los estudiantes para maestro, en cuya resolución intervenga la operación 8x (-2)? Para ello, se analizarán las propuestas de 121 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Huelva (España), con el objetivo de caracterizarlos en función de cuatro aspectos: su categoría semántica, la coordinación de los términos usados en la formulación con los demandados, contexto, y resolubilidad.

Para ello, presentaremos en este artículo los distintos referentes teóricos ligados a la formulación de problemas, así como a los contenidos matemáticos involucrados en los problemas demandados, para después describir la metodología seguida. Posteriormente, mostramos los resultados obtenidos, finalizando con conclusiones relativas al objeto de estudio, así como algunas cuestiones abiertas identificadas durante la investigación.

## Referentes teóricos

Resolver y proponer problemas son elementos centrales de la actividad matemática (BROWN; WALTER, 1990). La formulación de problemas, en particular, puede entenderse de dos formas complementarias, por un lado, como un tipo de enfoque de la actividad del aula, en la que se invita a los alumnos a construir problemas matemáticos desde situaciones, imágenes, o contextos familiares, tanto matemáticos como no matemáticos (NCTM, 2000); por otro lado, la formulación de problemas se liga a la formulación o

**3-** La Educación Primaria abarca en España 6 niveles: de los 6 a los 11 años de edad. Los maestros, o profesores de primaria, son generalistas, debiendo impartir varias asignaturas (Matemáticas, Lengua Castellana y Literatura, Ciencias naturales, Ciencias sociales, y Educación artística).

adaptación, por parte del profesor, de tareas problemáticas con una intencionalidad educativa (CRESPO, 2003; KLINSHTERN; KOICHU; BERMAN, 2015). En esta investigación adoptamos esta segunda perspectiva, asumiendo que el profesor debe ser competente en la formulación de problemas, o, al menos, en la articulación lingüística para adaptar un enunciado matemático a un contexto educativo (SINGER; VOICA, 2013). La formulación de problemas obliga a articular múltiples elementos, tanto matemáticos, como didácticos, de cara a generar enunciados que tengan sentido para ser propuestos en un contexto escolar. En esta investigación nos interesan, de cara a describir los problemas formulados por los estudiantes para maestro, tres tipos de elementos: los ligados a la naturaleza multiplicativa del problema, los ligados a la naturaleza entera de los factores implicados en la operación, y los ligados a la resolubilidad del problema. Este último ha sido anteriormente abordado en la investigación sobre resolución y formulación de problemas (LEUNG, 1997; CARRILLO; CRUZ, 2016), analizando diferentes grados de resolubilidad, en función de la suficiencia o no de condiciones que permitan que el problema tenga solución única, de la naturaleza abierta o no del problema, y la dificultad del problema creado (CAI; HWANG, 2003). En este estudio, se consideran resolubles los problemas si existen una o varias resoluciones plausibles, mientras que se consideran no resolubles en caso de que no exista una resolución desarrollable desde el enunciado planteado.

Los problemas, en general, tienen cuatro elementos fundamentales: *Información, Requerimiento, Contexto, y Entorno matemático* (MALASPINA, 2013). Entendemos por información los datos que se aportan al resolutor, de forma explícita o implícita en el enunciado, para que este desarrolle una articulación matemática de los mismos, hasta llegar a la solución. El requerimiento, que suele formularse en forma de pregunta, es aquello que el resolutor debe hallar, examinar, o concluir, que puede ser de naturaleza numérica o no, teniendo un carácter cualitativo o cuantitativo. El contexto puede ser intrínsecamente matemático o extramatemático, pudiendo tener el segundo distintos grados de acercamiento a la realidad. Finalmente, Malaspina (2013) define el entorno matemático como “[...] los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver un problema” (p. 143).

En este estudio, se exigió a los estudiantes para maestro que construyeran problemas de naturaleza multiplicativa. Diversos autores -Puig y Cerdán (1996) o Ivars y Fernández (2016)- ofrecen una síntesis de estas caracterizaciones, identificando tres grupos de problemas de estructura multiplicativa: (i) los isomorfismos de medida, en los que se establece una relación de proporcionalidad entre dos espacios de medida; (ii) problemas de relación escalar, denominados también de comparación multiplicativa (NESHER, 1992), en los que sólo interviene un espacio de medida, donde se establece una relación entre dos cantidades de dicho espacio, y una cantidad que los relaciona, un escalar, que tiende a designarse a través del término veces; y (iii) problemas de producto de medidas, también denominado producto cartesiano, que implican el producto cartesiano de dos espacios de medida, generando un tercer espacio, resultado de dicho producto.

En relación con la tipología de los problemas que se resuelven a través de multiplicaciones, es interesante observar la terminología que habitualmente se usa para estructurar sus enunciados. Así, en los isomorfismos de medida, se suele ofrecer la relación de la unidad de uno de los espacios con el segundo espacio como multiplicando (o de un divisor del multiplicador), para demandar el elemento del segundo espacio asociado al valor en el primer espacio del multiplicador, como por ejemplo *Si cada persona come 2 caramelos, ¿cuántos se comerán 7 personas?*. En este tipo de problemas, la forma de denominar la asociación entre la unidad de un espacio de medida y su elemento asociado suele venir dada por el término *cada*, o equivalente. En el caso de los problemas de relación escalar, se relaciona el multiplicando, que es un elemento del espacio de medida, con el resultado del producto, a través de un escalar dado. Este tipo de problemas suele venir denotado por el término *veces*, o equivalente, por ejemplo, *Juan tiene tres euros, y Luis tiene dos veces más, ¿cuánto tiene Luis?*. En tercer lugar, en los problemas de producto de medidas, cada elemento multiplicado denota a un subconjunto de un espacio de medida diferente, siendo el resultado un conjunto que denota el cardinal del espacio producto de ambos subconjuntos. Este es el único caso en el que la elección de multiplicando y multiplicador en la realización de la multiplicación puede ser arbitraria. En estos problemas, el producto cartesiano suele venir denotado por un término que refleje el establecimiento de parejas de elementos de cada uno de los espacios (e.g. combinación, pares), por ejemplo: *¿De cuántas formas diferentes podré combinar mis tres pantalones y mis cuatro camisas?*. Se incluyen en este tipo los problemas en los que intervienen magnitudes continuas y se solicita un resultado sobre otra magnitud, por ejemplo: *Calcular el volumen de un prisma cuadrangular cuya área de la base es 25 cm$^2$ y su altura es 10 cm*. Este tipo de problema resulta imposible de construir con números negativos, dada la naturaleza siempre positiva de las cantidades de medida que deben estar involucradas.

Las investigaciones sobre números negativos se centran en cómo introducirlos, mientras que son muy escasos los trabajos donde se estudien los números negativos desde la perspectiva de cómo se puede dotar de sentido a las diferentes estructuras operativas, y en particular las multiplicativas. Así, los números negativos han sido abordados en múltiples trabajos desde su comprensión y enseñabilidad (GONZÁLEZ *et al.*, 1990; STACEY; HELME; STEINLE, 2001; ALMEIDA; BRUNO, 2014). Los obstáculos epistemológicos asociados a los números negativos se suelen ligar a la naturaleza abstracta de los mismos, y la consiguiente dificultad de encontrar contextos en los que tengan sentido (ALMEIDA; BRUNO, 2014; GONZÁLEZ *et al.*, 1990). En cuanto a los obstáculos epistemológicos para el desarrollo de la comprensión de los números enteros, en particular en contextos multiplicativos, existe una tendencia a la búsqueda de un modelo unificador, no existente, de número entero que permita comprenderlo tanto en situaciones aditivas como multiplicativas (GLAESER, 1981). Para abordar su enseñanza, González y otros autores (1990) proponen hacer una aproximación descontextualizada de la realidad, dada la escasez de contextos reales que dan sentido a los negativos, mientras que otros autores proponen estructurar metáforas (basadas en el uso de espejos sobre rectas numéricas) que permitan establecer paralelismos en los comportamientos de naturales y enteros (*e.g.* STACEY; HELME; STEINLE, 2001). En ciertas propuestas se describen situaciones en las que los negativos pueden tener sentido en un contexto de Educación Primaria. Bruno (1997), al estudiar el uso de números negativos en problemas aditivos, identifica los seis contextos más utilizados en libros de texto: "[...] deber-tener, cronología, temperatura, nivel del mar, carretera y ascensor" (p. 12), al que Nieto y otros autores (1994) añaden contextos de variación de peso, y resultados en deportes (golf, fútbol).

Así, la coordinación de las estructuras multiplicativas de problemas aritméticos con la naturaleza entera de los números demandados en los problemas en este estudio, y sus contextos asociados, supone un campo que requiere de profunda exploración.

## Metodología

Este estudio se desarrolló desde un paradigma interpretativo (BRYMAN, 2013). La elección de dicho paradigma se debe a que el objetivo fundamental del mismo se centraba en la comprensión y caracterización del objeto de estudio, en este caso de los problemas formulados por 121 EPM (alrededor del 50% del total de la población de estudiantes) que habían cursado la asignatura del segundo curso del Grado de Educación Primaria relativa a números, operaciones y su didáctica, en la Universidad de Huelva (España)[4], en tres grupos de clase diferentes. Dicha asignatura está enfocada a la construcción de conocimiento, tanto matemático como didáctico, sobre elementos numéricos y operaciones aritméticas, con foco en la resolución y formulación de problemas. A los estudiantes se les propuso una tarea que focalizaba en la formulación de tareas (Figura 1), para la que dispusieron de 2 horas de tiempo, sin posibilidad de plantear preguntas.

**Figura 1-** Tarea propuesta

| |
|---|
| "En una sesión donde se trabaja la multiplicación de números enteros, un alumno dice:<br>*'Maestra, ¿qué sentido tiene trabajar esto?, quiero decir: ¿para qué me enseñas que 8 x (-2) = -16? No encuentro ningún caso en el que pueda aplicarlo a un contexto real'*<br>Formula y resuelve un problema de estructura multiplicativa donde intervengan números enteros (preferiblemente, que se resuelva usando los que indica el alumno)". |

Fuente: Elaborado por los autores.

En una primera fase, las 121 producciones fueron analizadas para determinar si las respuestas se adecuaban a lo demandado, descartándose 6 de ellas por ser ininteligibles, no formular situaciones problemáticas, o estar en blanco. Para analizar las 115 producciones restantes, se usó el análisis de contenido (KRIPPENDORF, 2013), analizando diferentes variables que nos permitieran caracterizar los problemas formulados. Dichas producciones fueron codificadas como Ti-n, donde Ti indica el grupo de clase al que pertenece el alumno que lo propuso, y n viene dado por la ordenación alfabética de los estudiantes en dicho grupo.

La primera de las variables que se analizó fue la categoría semántica a la que pertenece el problema, atendiendo a los tres tipos de problema propuestos por Ivars y Fernández (2016): Isomorfismo de medida, relación escalar, y producto cartesiano o de medida. En segundo lugar, se estudió la coordinación de los términos usados para formular

**4-** La formación de profesores en España dura cuatro años, donde tienen al menos 180 horas de formación teórico-prácticas de asignaturas de contenido didáctico-matemático.

el problema con la naturaleza de cada uno de los elementos matemáticos involucrados: 8, -2, el producto, y el resultado de la operación. En particular, se puso especial atención en la naturaleza negativa de -2, así como a la de -16, en relación con los términos usados para dotar de sentido a dichas cantidades negativas. Para este análisis, los investigadores discutieron las posibles interpretaciones de cada término en la resolución, codificándolas como coordinada, no coordinada, o implícita. Se codificó como coordinada cuando la forma de verbalizar la referencia al elemento matemático permitía, en la resolución del problema, usar la cantidad negativa de forma explícita. Se codificó como implícita en caso de que existiese una posible interpretación del enunciado que, si bien no llevase a usar las cantidades en forma explícitamente negativa, pero con una posible interpretación de las cantidades desde su significado o contexto que aportase un matiz de negatividad. Finalmente, se codificó como no coordinada cuando no hubiera coordinación ni posible relación con significado o contexto negativo.

Para el análisis del contexto de los problemas formulados, se usaron los contextos identificados por Bruno (1997), añadiendo los dos adicionales propuestos por Nieto y otros autores (1994): deber-tener, cronología, temperatura, nivel del mar, carretera, ascensor, peso, deportes. Se asumió la posibilidad de que apareciera algún contexto no previsto, añadiendo una categoría de *otros*. Para estudiar la resolubilidad de los problemas formulados, se estudió si dichos problemas poseían solución o no, si la resolución del problema era coherente con la demanda (es decir, que implicara la operación 8x(-2)), y la cantidad de etapas de las resoluciones del problema (entendida como la cantidad de operaciones involucradas).

Estas variables consideran los cuatro elementos que poseen los problemas, según la estructura propuesta por Malaspina (2013). La estructura semántica atiende al entorno matemático, a la vez que explora la información que lleva a definir el producto como operación que resuelve el problema. La coordinación de términos, referida a 8, -2, y el producto, profundiza en la información, mientras que dicha coordinación, referida a la forma de plantear la pregunta (que determina la naturaleza del resultado), profundiza en el requerimiento. El análisis de la resolubilidad profundiza de nuevo en el entorno matemático del problema. Finalmente, exploramos, a través de las categorías anteriormente indicadas, al contexto extramatemático de los problemas, no habiéndose planteado problemas con contexto intramatemático.

El análisis de la información se realizó por parte de dos de los investigadores de forma independiente, y posteriormente se discutió en el equipo de investigación, asegurando la triangulación por terceros (FLICK, 2007).

## Análisis y resultados

Organizaremos esta sección en tres bloques. Primero, mostraremos la información sobre las estructuras semánticas de los problemas formulados por los EPM, con algunos ejemplos, poniendo énfasis en los términos que se usan para verbalizar cada una de las estructuras multiplicativas, y describiendo los contextos en los que se sitúan los problemas formulados. Posteriormente, profundizaremos en la coordinación entre los términos usados para referir a los elementos numéricos del problema, mostrando ejemplos. Seguiremos con el análisis de la resolubilidad, identificando los diferentes tipos de problemas que se detectan, según la forma de resolverlos, y finalizaremos con el análisis de cuántos de los problemas son resolubles, y cuántos se ajustan completamente a lo demandado, poniéndolo en relación con las estructuras semánticas de problemas multiplicativos. Si bien el estudio es cualitativo, mostraremos también las cantidades totales de cada dimensión, para ofrecer una panorámica de las predominancias en las características de los problemas formulados por los EPM.

En la tabla 1, mostramos un resumen de las estructuras semánticas de los problemas formulados por los EPM. Cabe destacar que sólo aparecen en ella los 108 problemas resolubles a través de estructuras multiplicativas, de los 115 problemas totales analizados.

**Tabla 1-** Estructuras semánticas y palabras clave usadas

| Estructura | Frecuencia | Palabras clave | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| Isomorfismo de medidas | 63 | cada | 63 |
| Relación escalar | 44 | veces | 27 |
| | | doble | 17 |
| Producto cartesiano | 1 | combinaciones | 1 |

Fuente: Elaborado por los autores.

Los EPM construyen sus problemas alrededor de dos estructuras semánticas fundamentalmente, el isomorfismo de medidas, y la relación escalar. Sólo un estudiante lo plantea como producto de medidas: “En mi armario tengo ocho camisas, pero mis dos pantalones están sucios y no me los puedo poner. ¿Cuántas opciones y combinaciones de ponérmelos tendré?” (T1-46). Todos los problemas de isomorfismo están planteados usando la palabra *cada*: “Antonio tiene ahora mismo 0€, pero ayer se fue de fiesta y les pidió a 8 amigos suyos que le prestasen 2€ cada uno, que más adelante se lo devolvería. ¿Cuál es el balance de Antonio entre lo que tiene y lo que debe?” (T2-3). Por otro lado, podemos ver que en los problemas de relación escalar hay dos palabras clave distintas de las que se hace uso, *veces*, y *doble*, siendo más usada la primera:

> Hoy, el hombre del tiempo ha dicho que va a hacer -2ºC, pero ha avisado de que viene una racha de frío extremo a partir de la semana que viene, diciendo que el lunes hará 8 veces más frío. ¿Cuántos grados hará el lunes que viene? (T1-29).
>
> María tiene en su hucha 8€, pero se ha acordado de debe a su hermana el doble de dinero de lo que tiene. ¿Cuánto le debe a su hermana? (T1-39).

Cabe destacar que el término veces se suele formular en algunas ocasiones acompañado de *menos*, hecho que abordaremos más adelante, al discutir la coordinación entre la verbalización usada y el objeto matemático al que se pretende referir. Un detalle remarcable es que veinte de los problemas planteados son de dos etapas, doce de ellos de relación escalar, y ocho de isomorfismos de medida, cuando se exigía sólo una operación.

Centrándonos ahora en los contextos en los que los problemas son planteados, existe una amplia variedad (Tabla 2).

**Tabla 2-** Contextos usados en los problemas formulados

| Contexto | Frecuencia |
|---|---|
| Deber/tener (económico) | 55 |
| Temperatura | 26 |
| Deber/tener (objetos) | 19 |
| Ascensor | 9 |
| Nivel del mar | 3 |
| Deportes | 1 |
| Estatura | 1 |
| Otro | 1 |

Fuente: Elaborado por los autores.

En los 115 problemas formulados por los EPM, destaca sobre el resto el contexto deber/tener, del que identificamos dos subtipos: el contexto que alude a una situación económica, en la que habitualmente se descuenta una cantidad; y la situación en la que se prestan, sustraen, o deben objetos. Tienen relevancia, además de los contextos de deber/tener, el de temperatura, que se suele formular en términos de la repetición de -2$^{o}$C ocho veces, o el de ascensor, donde se tiende a aludir a bajar dos plantas también ocho veces.

En cuanto a la coordinación de la terminología usada para referir a cada uno de los elementos del problema, obtenemos los resultados reflejados en la Tabla 3.

**Tabla 3-** Coordinación de la terminología usada con los elementos matemáticos

| Elemento | Coordinada | No coordinada | Implícita |
|---|---|---|---|
| 8 | 108 | 7 | 0 |
| -2 | 93 | 5 | 17 |
| Producto | 104 | 7 | 4 |
| Resultado | 52 | 12 | 51 |

Fuente: Elaborado por los autores.

Puede observarse que no hay muchos casos en los que se demuestren dificultades a la hora de referir al 8 como un elemento positivo. En los siete casos donde no hay coordinación entre lo demandado y lo escrito en el problema, en cuanto al 8, se observa que el EPM dota de naturaleza negativa al 8, y de positiva al 2, como en el siguiente ejemplo: "Tengo 0€ en la cuenta bancaria, y llevo atrasados dos pagos de 8€ cada uno. Si el banco me cobra los pagos que debo, ¿cuánto tendré?" (T1-16).

En cuanto al -2, hay 22 casos donde la redacción del problema no permite interpretar dicha cantidad como negativa de forma directa, ya sea por no existir coordinación entre la negatividad de -2 y lo planteado en el problema, o por estar implícito en el contexto o en aspectos gramaticales. Un ejemplo del primer caso es el siguiente: "Dos obreros excavan un pozo. El primer obrero excava 8 metros de profundidad, encontrándose a -8 metros sobre el nivel del suelo. El segundo, excava lo mismo, ¿A qué profundidad se encontrará?" (T1-13). Aquí vemos que el estudiante para maestro invierte la negatividad de los elementos involucrados.

En los otros 17 casos, se observa que hay un intento de dotar de naturaleza negativa al dos, añadiendo elementos contextuales que evocan elementos negativos: "Si tengo 8 lápices, pero a mi amigo Raúl le debo el doble de estos 8. ¿Cuántos lápices le debo a mi amigo Raúl?" (T1-9), o, "Un equipo de fútbol juega 8 partidos en una competición, y en cada partido pierde por 2-0. ¿por cuántos goles han perdido en todo el campeonato?" (T1-18). En estos dos ejemplos, vemos que los futuros maestros añaden términos como *debo*, y *pierde*, asociados habitualmente a contextos interpretables como números negativos, pero que en sus propuestas no llegan a adquirir dicho sentido negativo. Por otro lado, algunos estudiantes proponen problemas donde parecen pretender referirse al -2 a través de la verbalización *dos veces*, seguido de un adverbio comparativo (más, menos): "En Andalucía hoy hace 8 grados, pero en el País Vasco hace dos veces menos. ¿Cuántos grados hace en el País Vasco?" (T1-57), o, "Hoy Finlandia amaneció con 8 grados de temperatura. Debido a los fuertes vientos y a la inestabilidad atmosférica de la época, el hombre del tiempo anuncia que en unas horas la temperatura será dos veces más fría. ¿Qué temperatura hará entonces?" (T2-6). En estos dos problemas, se usan estrategias equivalentes para intentar, sin éxito, dotar de naturaleza negativa al 2. En ambos casos, al referir a una temperatura inferior, ya sea hablando de veces menos, o de *veces más frío*, se usa una estrategia basada en tratar de explotar el contexto. Otro ejemplo de uso del contexto es el problema anteriormente mostrado, planteado por el estudiante T1-16, donde se refiere al dos como cantidad de pagos atrasados, evocando dicho atraso a la negatividad pretendida. Cabe destacar aquí la ambigüedad de la expresión *veces menos*, que puede llevar tanto a restar el doble de la cantidad de referencia, como a dividir dicha cantidad entre dos, dentro de un uso relajado del lenguaje. Finalmente, hay casos donde se usa una doble referencia a la naturaleza negativa del -2, probablemente para reforzar el hecho de que el -2 ha de ser considerado como negativo: "Mi padre, cuando nos portamos mal mis 7 hermanos y yo, nos quita 2€ menos de la paga semanal. Si esta semana nos hemos portado mal, ¿cuánto dinero hemos perdido en total los 8?" (T1-54). Es interesante ver cómo en este caso, desde una interpretación estricta de la lengua española, la referencia a "quitar 2€ menos" implica que existía una cantidad *quitada* anterior, y que dicha cantidad se reduce en 2€. Sin embargo, teniendo en cuenta el contexto del problema, asumimos que el EPM pretende reforzar la negatividad del -2, sin ser consciente del problema gramatical que puede generar.

En general, casi todos los estudiantes son capaces de verbalizar la relación entre cantidades para que sea de producto entre las mismas, usando habitualmente los términos *veces*, y *cada*: “Cada año la temperatura de la Tierra, debido a la contaminación, baja 2º. Actualmente vivimos en el Polo Norte, y hoy la temperatura es de 0º. ¿Cuál será la temperatura dentro de 8 años?” (T2-39). Sólo en 7 casos observamos dificultades a la hora de estructurar la alusión al producto, respondiendo en general a problemas aditivos: “Si sabemos que en el Polo Norte hace -2º, y en el Polo Sur hace ocho grados menos. ¿Cuántos grados hace en el Polo Sur?” (T2-7). En estos casos intervienen tanto el 8 como el -2, pero no se articulan a través de ningún significado del producto. En los otros 4 casos, la propuesta es parecida a la de T1-57, usando la expresión *veces menos*, que puede referir, en un uso poco riguroso del lenguaje matemático, tanto al producto (y posterior resta) como a la división.

En cuanto a la coordinación entre la forma de plantear el requerimiento y la naturaleza negativa de la solución del problema, en 52 casos existe coordinación, y en 63 o es implícita o no parece existir. Esto suele responder a casos en los que el EPM propone problemas demandando una cantidad de la misma naturaleza que el -2: “Manolo necesita ir a la Universidad durante 8 días en autobús, puesto que se le ha averiado el coche. Para ello, retira de la cartera de su padre 2€ cada día. ¿Cuánto dinero ha retirado Manolo en total de la cartera de su padre?” (T1-50). Vemos que en este problema el EPM estructura un requerimiento que tiene en cuenta la repetición reiterada de una retirada de dinero, dotando así de naturaleza (potencialmente) negativa al 2. Sin embargo, al formular la pregunta en términos de cuánto ha sido retirado en total, obvia la naturaleza pretendidamente negativa del 2, debiendo ser el resultado positivo, aunque poseyendo un significado asociable, por el contexto, a la negatividad. Es interesante, en este sentido, y en relación con el contexto, que 42 de los 55 problemas formulados en contextos económicos (ver Tabla 2) plantean requerimientos que responden a esta casuística, planteando, por ejemplo, una situación de deuda acumulada, y demandando en la pregunta el total al que asciende la deuda. Sólo en 13 propuestas se demanda una cantidad relativa al balance final como, por ejemplo: “María tiene su cuenta a cero, y no va a ingresar dinero en ella durante los próximos ocho meses. Si cada mes le descuentan la factura de la luz y son 2€, ¿cuánto dinero tiene en la cuenta María pasados esos 8 meses?” (T1-30). En este caso, un problema de dos etapas (0+8x(-2)), al preguntar por el dinero final, contrapone la naturaleza de lo descontado, frente a lo habido, permitiendo que el resultado sea negativo. Este problema pone de relieve también que, en ciertos casos, el uso del contexto es un tanto forzado, siendo poco realista el hecho de que la factura de la luz ascienda a dos euros.

Como veremos más adelante, el hecho de que 52 de las soluciones se consideren coordinadas en término de la negatividad no necesariamente implica que los elementos multiplicados o incluso la propia multiplicación esté coordinada. Sólo 25 problemas están plenamente coordinados.

En cuanto a la resolubilidad, el análisis muestra que 109 de los problemas formulados tienen solución, frente a 6 problemas irresolubles. Sin embargo, en estos 109 problemas, las soluciones tienen una amplia variabilidad (Tabla 4).

**Tabla 4-** Soluciones de los problemas propuestos

| Solución | Frecuencia | Solución | Frecuencia |
|---|---|---|---|
| -24 | 1 | 0 | 1 |
| -16 | 36 | 4 | 1 |
| -10 | 1 | 8 | 1 |
| -8 | 9 | 16 | 55 |
| -4 | 1 | 24 | 1 |
| -0.25 | 1 | 32 | 1 |

Fuente: Elaborado por los autores.

Resulta interesante observar que, del total de problemas formulados, 36 tienen la solución esperada (-16), mientras que 55 tienen como solución 16. Asimismo, en 9 casos, la solución es -8. Dentro de los problemas que tienen estas tres cantidades por solución, resulta interesante apreciar cómo estos suelen responder a diferentes casuísticas en la estructuración de los mismos. Así, los problemas cuya solución es -16, derivan de tres tipos diferentes: i) problemas que se resuelven a través de la operación (-8)x2: "Dos obreros excavan un pozo. El primer obrero excava 8 metros de profundidad, encontrándose a -8 metros sobre el nivel del suelo. El segundo, excava lo mismo, ¿A qué profundidad se encontrará?" (T1-13); ii) problemas que se resuelven a través de la operación 8x(-2): "Actualmente poseo 0 €. Durante 8 días me han descontado 2 € cada día, ¿cuánto dinero tendré en el banco al finalizar el octavo día?" (T1-40); iii) problemas que se resuelven a través de la operación -(8x2): "Tengo que comprar 8 libros, cada uno vale 2€. ¿Cuánto dinero me restará del dinero que me ha dado mi madre?" (T1-3). En el primer tipo de problemas, el estudiante para maestro no atiende a la demanda de que la operación mediante la que se resuelva el problema sea explícitamente 8x(-2), sino que invierte los signos, llevando ambos al mismo resultado. El segundo tipo de problema atiende a lo demandado en el enunciado de la tarea, y deriva de considerar la naturaleza negativa del -2, mientras que en el tercero, el problema completo es estructurado teniendo en cuenta 8 y 2 positivos, obligando, con la forma de estructurar la cuestión, a que se cambie la naturaleza del resultado a negativo.

Los problemas cuya solución es 16, en general, se caracterizan por el hecho de que la forma de demandar la solución hace que esta deba expresarse como un número positivo con un significado negativo, por ejemplo, de deuda: "Un niño está jugando a las canicas con sus 8 amigos. Cuando acaba el juego, le debe 2 canicas a cada uno. ¿Cuántas canicas debe en total?" (T2-16). Este problema es representativo de los problemas cuya solución es 16, en los que la forma de estructurar la cuestión lleva a que se considere -2 en valor absoluto, resolviéndose a través de la operación 8x2, ya que se pide, como en este caso, el total de canicas adeudadas. Otro ejemplo representativo es el siguiente: "Tengo una caja con arañas, si se me escapan 2 de ellas, ¿cuántas patas menos tendré en la caja?" (T2-5). En este caso, de nuevo el problema se resuelve a través de la operación 8x2. Sin embargo, se menciona explícitamente el término *menos* en el requerimiento, intentando contemplar la naturaleza negativa del -2. Ahora bien, al preguntar cuántas patas menos hay en la caja, obvia la naturaleza negativa del resultado buscado.

En cuanto a los problemas cuya solución es -8, suelen responder a problemas de dos etapas, por ejemplo: “Tengo 8€, pero le debo dinero a 2 amigos míos. A ambos les debo 8€. Si devolviera todo lo que debo, ¿con cuánto dinero me quedaría?” (T2-24). Este problema responde a una solución a través de la expresión 8+(-8)x2, que se hace equivaler de forma inmediata a 8-8x2. Otro ejemplo lo tenemos en el siguiente problema: “Estoy en la planta 8, y mi coche se encuentra aparcado el doble de plantas para abajo. ¿En qué planta está mi coche?” (T2-1). En este segundo problema, de nuevo de dos etapas, la verbalización es confusa, respecto del significado de “el doble para abajo”, aunque entendemos que supone un esfuerzo por dotar de naturaleza negativa a la diferencia entre plantas, ligándola al descenso. Esto llevaría a una solución del tipo: 8-8x2.

Los ejemplos que llevan al resto de soluciones se caracterizan por el hecho de no articular correctamente las operaciones demandadas. Por ejemplo, el siguiente problema: “Durante 8 días ha hecho -2 grados cada día. Si dicen que al noveno día van a bajar el doble, ¿cuántos grados va a hacer?” (T1-23). En este caso, el estudiante no articula la relación entre 8 y -2 como multiplicativa, sino que la reduce el 8 a un elemento contextual del problema. En otros casos, el estudiante articula la relación entre los elementos sin conseguir que 2 tenga una naturaleza negativa, y generando un problema de dos etapas: “Un niño tiene 8 caramelos, y su madre le compra el doble de lo que tiene, pero al salir de la tienda los pierde. ¿Cuánto podría haber tenido?” (T2-43). Vemos como en este problema, hay elementos contextuales que evocan la pérdida o disminución de una cantidad de objetos, pero tanto el propio contexto, en el que es imposible tener una cantidad negativa de objetos, como la pregunta, que pide una proyección de la suma de las cantidades, hacen que el problema no cumpla los requerimientos.

Para finalizar el análisis, es interesante observar, en relación con cada una de las estructuras semánticas, y de las palabras clave, cuántos problemas se resuelven usando la operación 8x(-2) como parte de la resolución (Tabla 5).

**Tabla 5-** Problemas resolubles y que requieren la operación 8x(-2) para resolverse, según estructura semántica

| Estructura | Frec. | Palabra clave | Frecuencia | Resolución 8x(-2) |
|---|---|---|---|---|
| Isomorfismo de medidas | 63 | cada | 63 | 13 |
| Relación escalar | 44 | veces | 27 | 12 |
| | | doble | 17 | 0 |
| Producto de medidas | 1 | combinaciones | 1 | 0 |

Fuente: Elaborado por los autores.

Observamos que sólo un total de 25 estudiantes plantean problemas que se adaptan a la resolución pretendida. Esto sólo ocurre cuando los términos que se usan para referir a cada uno de los elementos matemáticos están coordinados con cada uno de los elementos matemáticos demandados, además de poseer un contexto para el que tenga sentido la situación problemática. En particular, desde el punto de vista de la estructura semántica de relación escalar, encontramos que ninguno de los problemas formulados por los EPM en el que se involucre la palabra clave "doble" se resuelve usando la operación 8x(-2), hecho matemáticamente esperable. Porcentualmente, sólo el 20,6% de los problemas ligados a isomorfismos de medida se adaptan a lo demandado, mientras que el porcentaje asciende al 30% en el caso de los estructurados como una relación escalar.

## Síntesis de resultados

Del análisis anterior, se desprende que los problemas formulados por los EPM, bajo la demanda de que se resuelvan usando la operación 8x(-2), se organizan alrededor de las estructuras semánticas de isomorfismo de medidas y de relación escalar, indistintamente. Pasamos ahora a comentar algunos de los aspectos más significativos derivados del análisis, que pueden explicar este bajo porcentaje.

Los EPM, en general, muestran saber coordinar la redacción del problema con el hecho de que los términos multiplicados sean 8 y -2 (Tabla 3). Merece especial atención el -2, donde se usan tanto estrategias basadas en la explotación de contextos asociados a cantidades negativas, habitualmente asociadas a problemas de isomorfismos de medida, como a contextos de duplicación, en los que se intenta dotar a dicha duplicación de una naturaleza negativa, a través del contexto, o a través del uso de la expresión *veces menos*. Es interesante observar que en los casos en los que el problema se refiere al 8 como cantidad negativa, y al 2 como cantidad positiva, existe una estrategia de compensación de signos para que el resultado sea equivalente. En cuanto al producto, en general sólo se evidencian dos tipos de dificultades; las primeras están derivadas del uso de la expresión *veces menos*, que genera ciertos problemas de significado, ya que dependiendo de lo relajado del uso del lenguaje se puede entender como producto de número negativo o se asocia a la división; y las otras están ligadas a la estructuración del problema como problema aditivo. Si centramos la atención en la demanda implícita de que el resultado sea -16, encontramos que supone un reto mayor para los EPM. Alrededor de la mitad de los problemas formulados plantean el requerimiento del problema demandando una cantidad de naturaleza negativa, de tal manera que el resultado lleva al valor absoluto de la misma. Esto es especialmente relevante en el contexto deber/tener asociado a cuestiones económicas, donde es habitual preguntar por la cuantía de una deuda, llevando a una respuesta positiva.

Es sorprendente la amplísima variabilidad que existe en las soluciones de los problemas formulados por los EPM, con doce valores diferentes. Destacan sobre el resto los problemas cuya solución es 16, habitualmente ligados al hecho de formular una pregunta que lleva al valor absoluto, por la negatividad implícita asociada al significado o contexto del resultado.

## Conclusiones

La formulación de problemas es una competencia profesional que implica al profesor como un gestor en la creación y proposición del contenido a abordar. En este estudio nos hemos centrado en explorar las características de los problemas formulados por los EPM a la demanda de generar problemas que involucraran la operación 8x(-2), en relación con la información, el requerimiento, y el contexto, asumiendo que el entorno matemático venía dado por las estructuras multiplicativas aplicadas a números enteros.

Proponer problemas, especialmente problemas multiplicativos que impliquen números negativos, no es trivial. En esta tarea se involucran diversos factores que deben ser articulados para llegar a un problema que responda a las condiciones matemáticas pretendidas en la resolución del mismo. Hemos mostrado que, en particular, resulta especialmente conflictivo para los EPM articular el requerimiento del problema con el signo de la solución pretendida. Entendemos que esto puede deberse a la tendencia de los estudiantes a asumir que los problemas aditivos y multiplicativos tienen una estructura unificada (GLAESER, 1981), no teniendo en cuenta la problemática del cambio de signo, así como a la habitual tendencia, en problemas aditivos, a no sentir la necesidad de usar números negativos en el resultado (BRUNO; ESPINEL; MARTINÓN, 1997). En este sentido, es crucial la articulación precisa de los términos que finalmente constituyan el enunciado del problema, ya que estos determinan tanto el signo de las cantidades involucradas, como la estructura semántica del problema.

En lo relativo al signo de las cantidades, el contexto demuestra jugar un rol importante, ya que ciertos contextos han demostrado ser útiles para referir a cantidades negativas, trascendiendo lo ya estudiado para contextos aditivos (BRUNO, 1997; NIETO *et al.*, 1994), dando sentido también a problemas multiplicativos.

Cabe destacar la necesidad, de cara a la formación de estos estudiantes, de invitarlos a discernir entre la presencia explícita o implícita de los elementos matemáticos demandados, de cara a que desarrollen procesos reflexivos sobre aquellos problemas que, como futuros profesores, planteen a sus estudiantes, de manera que el trabajo matemático de los mismos no implique una complejidad mayor de la pretendida.

En futuros desarrollos, creemos que sería interesante explorar otras variables de la formulación de problemas, más allá de las puramente matemáticas, como pueden ser el potencial didáctico, o la efectividad didáctica (WILHELMI; GODINO; LACASTA, 2007), que caractericen la formulación de problemas desde la óptica de los aspectos intrínsecamente ligados a la profesión docente.

Es asumido que los maestros en formación deberían poseer un cuerpo de conocimientos mínimos (CASTRO *et al.*, 2014), entre los que deberían estar incluidos los que les permitan abordar la resolución de problemas multiplicativos de números enteros. Sin embargo, la formulación de problemas como competencia profesional ha recibido una atención insuficiente. Creemos que, de cara a futuros desarrollos de esta investigación, debería analizarse qué conocimiento profesional se necesita para ser competente en la formulación de problemas aditivos de números enteros, complementando así los estudios que profundizan en el conocimiento profesional necesario tanto para resolver problemas como para gestionar la resolución de problemas en el aula (TARDIF, 2002; PIÑEIRO; CASTRO-RODRÍGUEZ, CASTRO, 2019; CARRILLO *et al*., 2019). En este sentido, y de cara al necesario proceso de transferencia de los resultados de investigación (GARCÍA; MAAS; WAKE, 2010), son necesarias investigaciones que caractericen la competencia profesional en formulación de problemas de forma profunda, para así poder comenzar a explorar la posibilidad de introducirla en la formación inicial.

## Referencias

ALMEIDA, Rut; BRUNO, Alicia. Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, United Kingdom, v. 45, n. 5, p. 719-737, 2014.

AYDOGDU-ISKENDEROGLU, Tuba. Fraction multiplication and division word problems posed by different years of pre-service elementary Mathematics teachers. **European Journal of Educational Research**, Netherland, v. 7, n. 2, p. 373-385, 2018.

BALL, Debora; FORZANI, Francesca. The work of teaching and the challenge for teacher education. **Journal of Teacher Education**, E.E.U.U., v. 60, n. 5, p. 497-511, 2009.

BROWN, Stiphen; WALTER, Marion. **The art of problem posing**. 2. ed. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1990.

BRUNO, Alicia. La Enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. **Números**, Tenerife, v. 29, p. 5-18, 1997.

BRUNO, Alicia; ESPINEL, María Candelaria; MARTINÓN, Antonio. Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 19, n. 4, p. 36-55, 1997.

BRYMAN, Alan. **Social research methods**. Oxford: Oxford University Press, 2013.

CAI, Jinfa; HWANG, Stephen. A perspective for examining the link between problem solving and problem posing. *In*: PATERMAN, Neil; DOUGHERTY, Barbara; ZILLIOX, Joseph (ed.). **PME CONFERENCE**, 27., 2003, Honolulu. 27 PME… v. 3. Honolulu: PME, 2003. p. 103-110.

CARRILLO, José; CRUZ, Jorge. Problem-posing and questioning: two tools to help solve problems. *In*: FELMER, Patricio; PEHKONEN, Erkki; KILPATRICK, Jeremy (ed.). **Posing and solving mathematical problems**. Cham: Springer, 2016. p. 23-36.

CARRILLO, José *et al*. Mathematics Teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. *In*: FEIMER, Patricio; LILIEDAHL, Peter; KOICHU, Boris (ed.). **Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development**. Cham: Springer, 2019. p. 297-316.

CASTRO, Angela *et al.* Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. *In*: GONZÁLEZ, María Teresa (ed.). **Investigación en educación matemática XVIII**. Salamanca: Seiem, 2014. p. 227-236.

CRESPO, Sandra. Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 52, n. 3, p. 243-270, 2003.

FELMER, Patricio; PEHKONEN, Erkki; KILPATRICK, Jeremy. **Posing and solving mathematical problems**. Cham: Springer, 2016.

FLICK, Uwe. **Introducción a la investigación cualitativa**. Madrid: Morata, 2007.

GARCÍA, Francisco Javier; MAAS, Katja; WAKE, Georff. Theory meets practice: working pragmatically within diferent cultures and traditions. *In*: LESH, Richard *et al.* (ed.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. London: Springer, 2010. p. 445-457.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **Recherches en Didactique des Mathematiques**, Grenoble, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

GONZÁLEZ, José Luis *et al*. **Números enteros**. Madrid: Síntesis, 1990.

GREER, Brian. Multiplication and division as models of situations. In: GROWS, Douglas (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992. p. 276-295.

GRUNDMEIER, Todd. Developing problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. *In*: SINGER, Florence; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa (ed.). **Mathematical problem posing**. Cham: Springer, 2015. p. 411-433.

IVARS, Pere; FERNÁNDEZ, Ceneida. Problemas de estructura multiplicativa: evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. **Educación Matemática**, México, DC., v. 28, n. 6, p. 9-38, 2016.

KILPATRICK, Jeremy. Problem formulating: where do good problems come from? *In*: SCHOENFELD, Alan H. (ed.). **Cognitive science and mathematics education**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 123-147.

KLINSHTERN, Michal; KOICHU, Boris; BERMAN, Avi. What do high school teachers mean by saying "I pose my own problems"? *In*: SINGER, Mihaela; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa (ed.). **Mathematical problem posing.** Cham: Springer, 2015. p. 449-467.

KRIPPENDORF, Klaus. **Content analysis:** an introduction to its methodology. Thousand Oaks: Sage, 2013.

LEUNG, Shuk-kwan. On the role of creative thinking in problem posing. **ZDM**, Cham, v. 97, n. 3, p. 81-85, 1997.

MALASPINA, Uldarico. Variaciones de un problema: el caso de un problema de R. Douady. **Union**, Andújar, n. 34, p. 141-49, 2013.

MULLIGAN, Joanne. Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. **Mathematics Education Research Journal**, Cham, v. 4, n. 1, p. 24-41, 1992.

MULLIGAN, Joanne; MITCHELMORE, Michael. Young children's intuitive models of multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, p. 309-331, 1997.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

NESHER, Pearla. Solving multiplication word problems. *In*: LEINHARDT, Gaea; PUTNAM, Ralph; HATTRUP, Rosemary (ed.). **Analysis of arithmetic for mathematics teaching**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1992. p. 189-219.

NICOL, Cynthia; BRAGG, Leicha. Designing problems: What kind of open-ended problems do preservice teachers pose? *In*: TZEKAKI, Marianna; KALDRIMIDOU, Maria; SAKONIDIS, Haralambos (ed.). **PME CONFERENCE**, 33., 2009, Thesaloniki. 33 PME… v. 4. Thesaloniki: PME, 2009. p. 225-232.

NIETO, Pedro *et al*. **Números**: manual de matemáticas. Primer ciclo de ESO. Barcelona: Octaedro, 1994.

PIÑEIRO, Juan Luis; CASTRO-RODRÍGUEZ, Elena; CASTRO, Enrique. Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. **PNA**, Granada, v. 13, n. 2, p. 104-129, 2019.

PÓLYA, George. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

PUIG, Luis; CERDÁN, Fernando. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1996.

SHUTLER, Paul. A symbolical approach to negative numbers. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 14, n. 1, p. 207-240, 2017.

SILVER, Edward. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 1, p. 19-28, 1994.

SINGER, Florence; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa. **Mathematical problem posing**. Cham: Springer, 2015.

SINGER, Florence; VOICA, Cristian. A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 83, n. 1, p. 9-26, 2013.

STACEY, Kaye; HELME, Sue; STEINLE, Vicki. Confusions between decimals, fractions and negative numbers: a consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. *In*: HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (ed.). **PME CONFERENCE**, 25., 2001, Utrecht. 25 PME… v. 4. Utrecht: PME, 2001. p. 217-224.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.

TICHÁ, Marie; HOSPESOVÁ, Alena. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 83, n. 1, p. 133-143, 2013.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative structures. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha; BELLIN, Harry (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

WILHELMI, Miguel; GODINO, Juan Díaz; LACASTA, Eduardo. Didactic effectiveness of mathematical definitions: the case of the absolute value. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Eastbourne, v. 2, n. 2, p. 72-90, 2007.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 5, p. 540-563, 1996.

*Recibido en: 23.05.2020*
*Revisado en: 01.09.2020*
*Aprobado en: 12.11.2020*

**Miguel Montes** es doctor por la Universidad de Huelva. Profesor ayudante doctor en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación en Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social de la Universidad de Huelva (COIDESO) y del grupo de investigación Didáctica de Experimentales, Sociales y de la Matemática (DESYM)

**Maria Isabel Pascual** es profesora sustituta interina en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.

**José Carrillo** es doctor por la Universidad de Sevilla. Catedrático de universidad en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.

**Juan Pedro Martín-Díaz** es profesor sustituto interino en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.