



Programação estocástica robusta aplicada ao planejamento agregado de safra em usinas cooperadas do setor sucroenergético

Stochastic robust optimization model applied to the aggregate production planning in mill cooperative societies in the sugar-energy sector

Rafael Piatti Oiticica de Paiva¹
Reinaldo Morabito²

Resumo: Neste trabalho, apresenta-se um modelo de programação estocástica robusta aplicado ao planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético. Esta modelagem considera a relação hierárquica existente entre o planejamento anual da cooperativa e o planejamento tático de safra das usinas cooperadas, além de contemplar importantes incertezas existentes nos parâmetros de entrada do modelo. Para resolver os problemas de programação linear e programação inteira mista envolvidos, utiliza-se uma linguagem de modelagem algébrica e um *software* de última geração de programação matemática. Os resultados computacionais obtidos são comparados aos resultados da modelagem determinística PASUC, discutida em Paiva e Morabito (in press), utilizando os mesmos dados do estudo de caso da Usina Santa Clotilde e da Cooperativa Regional dos Produtores de Açúcar e Álcool de Alagoas.

Palavras-chave: Planejamento hierárquico. Setor sucroenergético. Programação estocástica robusta. Planejamento agregado de safra. Análise de incertezas.

Abstract: *This work presents a stochastic robust optimization model applied to the aggregate production planning in mill cooperative societies in the sugar-energy sector. This mathematical model is based on a hierarchical relationship between the annual planning of the cooperative and the tactical planning horizon of the sugarcane mills taking into account important uncertainties in several parameters of this model. In order to solve the linear and mixed integer programming problems involved, an optimization modeling language solver was used. Computational results are presented and compared with the deterministic approach PASUC, discussed by Paiva e Morabito (in press) using the same data from the case studies conducted in the Santa Clotilde milling company and in the regional cooperative society of sugar and ethanol producers of Alagoas.*

Keywords: *Hierarchical planning. Sugarcane mills. Stochastic robust programming. Aggregate production planning. Uncertainty analysis.*

1 Introdução

O processo de planejamento tático de safra na agroindústria canavieira é uma atividade complexa em diversos aspectos, em especial na adequação e programação dos processos industriais de produção de açúcar, álcool e melação à logística de cana-de-açúcar e à cogeração de energia elétrica. Alguns exemplos de estudos e modelagens relacionados com esta problemática podem ser encontrados em Paiva (2006); Paiva e Morabito (2007, 2009); Carvalho (2009); Silva (2009). Estes estudos estão calcados no conhecimento da literatura técnica de engenharia

açucareira e alcooleira encontrada, por exemplo, em Hugot (1977); Castro, Andrade e Albuquerque (2002); Fernandes (2003); Albuquerque (2009), para elaborar modelos determinísticos de otimização do planejamento agregado da produção no setor sucroenergético. Entretanto, o setor sucroenergético possui uma grande quantidade de incertezas que impactam neste planejamento e que devem ser incorporadas de alguma maneira ao processo decisório.

Neste artigo, a incorporação de incertezas no processo de planejamento é feita por meio da aplicação

¹ Usina Santa Clotilde S/A, Fazenda Pau Amarelo, CEP 57100-000, Rio Largo, AL, Brasil, e-mail: rafael_paiva@hotmail.com

² Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Rod. Washington Luís, Km 235, SP-310, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: morabito@ufscar.br

da técnica de programação estocástica robusta, inicialmente proposta por Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995). Esta abordagem consiste na integração de conceitos de programação de metas e de programação estocástica em dois estágios com recurso, tornando possível a consideração de penalidades para a violação das restrições nos diferentes cenários e a flexibilização da função objetivo, de forma a contemplar diferentes critérios de otimalidade, tais como: valor médio esperado; valor esperado para a combinação entre média e variância das soluções de cada cenário; valor esperado do arrependimento, ou seja, minimização do máximo desvio entre a meta e o resultado encontrado para os cenários, como pode ser visto, por exemplo, em Vladimirov e Zenios (1997); Takriti e Ahmed (2004); Yamashita, Armentano e Laguna (2007); Khor et al. (2008).

Em um estudo anterior (PAIVA, 2009; PAIVA; MORABITO, in press), apresentou-se um modelo de otimização para o planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético. Esta modelagem determinística, denominada PASUC (Planejamento Agregado de Safra em Usinas Cooperadas do Setor Sucroenergético), considera a relação hierárquica existente entre o planejamento anual da cooperativa e o planejamento tático de safra das usinas cooperadas. No nível de decisão da cooperativa (primeiro nível), um modelo de programação linear multiproduto, dois estágios, dinâmico, capacitado, com horizonte de planejamento anual e agregação temporal mensal, determina as metas de produção de cada usina e define a política de estocagem e o atendimento da demanda.

No nível de decisão de cada usina cooperada (segundo nível), um modelo de programação inteira mista multiproduto, monoestágio, multiproduto, dinâmico, capacitado, com horizonte de planejamento do período de moagem (menos de um ano) e agregação temporal semanal, combina decisões de dimensionamento e sequenciamento dos lotes de produção para o atendimento das metas do primeiro nível hierárquico. Este modelo possibilita definir, entre outros, a quantidade de cana-de-açúcar colhida, a quantidade de cana transportada por prestador de serviço e a seleção dos processos de produção de açúcar, álcool, melão e energia elétrica para cada usina cooperada.

No presente artigo, o modelo hierárquico de dois níveis PASUC é estendido para tratar algumas importantes incertezas inerentes no planejamento de safra, por meio da aplicação de técnicas de programação estocástica robusta. Para tanto, faz-se uma comparação entre os resultados do modelo determinístico PASUC e o modelo de programação estocástica robusta deste artigo, utilizando os mesmos dados do estudo de caso da Usina Santa Clotilde (USC) e da Cooperativa Regional dos Produtores de

Açúcar e Álcool de Alagoas (CRPAAA), analisados em Paiva (2009) e Paiva; Morabito (in press).

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2, faz-se uma breve análise das incertezas estudadas; na seção 3, apresenta-se a extensão do modelo determinístico PASUC utilizando programação estocástica robusta; na seção 4, discutem-se os resultados da aplicação do modelo proposto fazendo uma comparação dos resultados obtidos com os apresentados no modelo determinístico PASUC; e, na seção 5, apresentam-se as conclusões deste trabalho e perspectivas para trabalhos futuros.

2 Análise da incerteza nos parâmetros do modelo PASUC

Conforme mencionado, incertezas em diversos parâmetros do modelo PASUC podem ter impactos importantes na solução do modelo. A título de ilustração, a Figura 1 compara os valores líquidos de venda de um produto p ($p = \text{"Superior"} - \text{açúcar cristal superior}$) nos períodos t ($t = \text{"set, out, ..., ago"}$), parâmetro denominado no modelo PASUC por VP_{pt} , para elaborar o planejamento de produção da CRPAAA e da USC na safra 2007/2008, e os valores líquidos que depois foram observados nas vendas deste produto ao longo desta safra pela CRPAAA nos meses de outubro a abril.

A incerteza no parâmetro VP_{pt} é uma incerteza mercadológica que aparece na função objetivo do modelo PASUC, apresentado resumidamente no Anexo 1. Desta forma, os preços dos açúcares e dos alcoóis estão sujeitos às variações do mercado de derivativos, tornando de fundamental importância a análise da incerteza. Considera-se como normal o fato desta variação ocorrer e também o fato desta variação tender a ser maior nos meses mais distantes do horizonte de planejamento (e.g., compare as variações nos meses de outubro a dezembro com as variações nos meses de janeiro a abril na Figura 1).

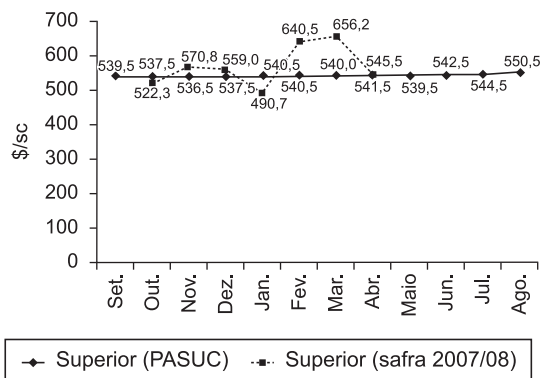


Figura 1. Valores líquidos do açúcar cristal superior utilizados no modelo PASUC e valores reais (VP_{Superior}).

Além de VP_{pt} , outros parâmetros das funções objetivos do modelo PASUC (níveis 1 e 2), tais como custos de produção por usina, custos de estocagem, custos industriais, custos agrícolas, custos de corte, carregamento e transporte (CCT), também podem ser considerados incertos. Entretanto, estes parâmetros não foram contemplados na modelagem deste trabalho em função da dificuldade encontrada para uniformizar a metodologia de contabilização dos custos em cada usina cooperada (e.g., custos de produção por usina), e devido à dependência existente entre alguns destes custos (e.g., entre os custos de alguns processos industriais). A análise destas incertezas é um tópico para pesquisas futuras.

Uma discussão mais aprofundada sobre a incerteza nos parâmetros do modelo PASUC pode ser encontrada em Paiva (2009), no qual são avaliados os parâmetros de eficiência global em ATR ($Eatr_{ut}$), ATR da cana (ATR_{ut}), tempo aproveitado de moagem (φ_t), fibra da cana ($Fibra_{mt}$) e a matriz de rendimentos industriais (A_{pkt}). Em função de limitação de espaço, neste artigo, são apresentados modelos de programação estocástica robusta apenas para os parâmetros incertos VP_{pt} e A_{pkt} do modelo PASUC. O Anexo 1 apresenta resumidamente as duas formulações matemáticas para os níveis 1 e 2 do modelo PASUC (PASUC/N1 e PASUC/N2). Para mais detalhes deste material, o leitor pode consultar Paiva e Morabito (in press). Estas formulações são utilizadas pelas abordagens de programação estocástica robusta apresentadas na próxima seção.

3 Modelagem de programação estocástica robusta

3.1 Incerteza nos preços dos produtos (PASUC/N1-M-VP)

Nesta seção, apresenta-se um modelo de programação estocástica robusta para o modelo PASUC/N1, considerando o valor líquido de venda do produto p no período t (VP_{pt}) como um parâmetro incerto. Este modelo é referido pela abreviação PASUC/N1-M-VP, na qual a letra M identifica a utilização da técnica de programação estocástica robusta inicialmente proposta por Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995), e as letras VP representam a incorporação da incerteza no parâmetro VP_{pt} . Conforme Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995), um ponto fundamental para o desenvolvimento de um modelo de programação estocástica robusta é a definição dos cenários tratados e a determinação das variáveis de primeiro e segundo estágio.

Para o caso do modelo PASUC/N1-M-VP, substitui-se o parâmetro VP_{pt} pelo novo parâmetro VP_{pts} , que representa o valor líquido de venda do

produto p no período t em cada cenário s . Note que este parâmetro possibilita a incorporação de incerteza no parâmetro VP_{pt} por meio dos cenários considerados. Outra modificação é a transformação das variáveis de atendimento da demanda do produto p no período t (D_{pt}), estoque do produto p no depósito e no final do período t (I_{pet}^+), e atraso na entrega do produto p no final do período t (I_{pt}^-), em variáveis de segundo estágio, isto é, nas variáveis D_{pts} , I_{pets}^+ e I_{pts}^- , que representam, respectivamente, a demanda, o estoque e o atraso em cada cenário s . As variáveis de primeiro estágio do modelo PASUC/N1-M-VP são as mesmas variáveis de produção do produto p na usina u no período t (PU_{put}) e moagem da usina u no período t (M_{ut}) do modelo PASUC/N1. Desta forma, pode-se dizer que as variáveis de primeiro estágio estão representando a etapa produtiva do modelo e as variáveis de segundo estágio correspondem às decisões de comercialização dos produtos acabados e ajustes de estoque e falta.

Além das modificações discutidas acima, é necessário incorporar ao modelo PASUC/N1 (Anexo 1) outros parâmetros e variáveis, conforme segue:

3.1.1 Parâmetros adicionais do modelo PASUC/N1-M-VP

λ – fator penalização do desvio da função objetivo em cada cenário s ;

ω – fator de ajuste do *trade-off* entre otimalidade e robustez do modelo;

p_s – vetor de probabilidade de ocorrência do cenário s .

3.1.2 Variáveis adicionais do modelo PASUC/N1-M-VP

θ_s^+ – variável auxiliar que representa o desvio positivo entre o valor do critério de otimalidade de cada cenário s ;

θ_s^- – variável auxiliar que representa o desvio negativo entre o valor do critério de otimalidade de cada cenário s ;

Z_{pts}^+ – variável auxiliar que representa a infactibilidade positiva para cada produto p , período t e cenário s ;

Z_{pts}^- – variável auxiliar que representa a infactibilidade negativa para cada produto p , período t e cenário s .

Com a utilização destes parâmetros e variáveis, é possível apresentar a formulação matemática do modelo PASUC/N1-M-VP. Para isso, considere inicialmente os critérios de otimalidade (σ) e de penalidade por infactibilidade (ρ) definidos a seguir (Equações 1,2):

$$\sigma = \sum_s p_s \left(\left(\sum_t \sum_p VP_{pts} D_{pts} \right) - \left(\sum_t \sum_u \sum_p CP_{pu} PU_{put} + \sum_t \sum_p \sum_e CE_{pe} I_{pets}^+ + \sum_p \sum_t CA \cdot I_{pts}^- \right) \right) + \lambda \sum_s p_s (\theta_s^+ + \theta_s^-) \quad (1)$$

$$\rho = \sum_s \sum_t \sum_p p_s (z_{pts}^+ + z_{pts}^-) \quad (2)$$

Considere também a variável ζ_s como sendo a função objetivo do modelo determinístico original PASUC/N1 para cada cenário s (Equação 3), como segue:

$$\zeta_s = \left(\sum_t \sum_p VP_{pts} D_{pts} \right) - \left(\sum_t \sum_u \sum_p CP_{pu} PU_{put} + \sum_t \sum_p \sum_e CE_{pe} I_{pets}^+ + \sum_p \sum_t CA \cdot I_{pts}^- \right) \quad \forall s \quad (3)$$

Comparando com o modelo determinístico PASUC/N1 (Anexo 1), as modificações mais importantes na formulação que segue podem ser observadas na função objetivo (Expressão 4), nas restrições (Expressões 5,6) e na definição das variáveis de domínio (Expressão 18).

Modelo PASUC/N1-M-VP

$$\max \xi = \sum_s p_s \zeta_s - \lambda \sum_s p_s (\theta_s^+ + \theta_s^-) - \omega \sum_s \sum_t \sum_p p_s (z_{pts}^+ + z_{pts}^-) \quad (4)$$

Restrições do modelo PASUC/N1-M-VP

$$\zeta_s - \sum_{s'=1}^S p_{s'} \zeta_{s'} = \theta_s^+ - \theta_s^- \quad \forall s \quad (5)$$

$$\sum_e I_{pets}^+ = \sum_e I_{p,e,t-1,s}^+ + \sum_u PU_{put} - D_{pts} + I_{pts}^- - I_{p,t-1,s}^- + z_{pts}^+ - z_{pts}^- \quad \forall p,t,s \quad (6)$$

$$D_{pts} \geq D_{min_{pt}} \quad \forall p,t,s \quad (7)$$

$$D_{max_p} \geq \sum_t D_{pts} \quad \forall p,s \quad (8)$$

$$C_{u0} = \sum_t M_{ut} \quad \forall u \quad (9)$$

$$M_{min_u} \cdot n_{ut} \cdot \Phi_{ut} \leq M_{ut} \leq M_{max_u} \cdot n_{ut} \cdot \Phi_{ut} \quad \forall u,t \quad (10)$$

$$I_{pets}^+ \leq E_{max_{pe}} \quad \forall p,e,t,s \quad (11)$$

$$\sum_e I_{p,e,"T",s}^+ \geq EP_p \cdot I_{p,"T",s}^- = 0 \quad \forall p,s \quad (12)$$

$$PU_{put} \geq CP_{max_{pu}} \cdot n_{ut} \quad \forall p,u,t \quad (13)$$

$$\sum_{pa} PU_{pa,u,t} \leq CF_{max_u} \cdot n_{ut} \quad \forall u,t \quad (14)$$

$$\sum_{pe} PU_{pe,u,t} \leq CD_{max_u} \cdot n_{ut} \quad \forall u,t \quad (15)$$

$$M_{ut} \cdot ATR_{ut} \cdot Eatr_{ut} / 1000 = \sum_p PU_{put} \cdot Patr_p \quad \forall u,t \quad (16)$$

$$\sum_{pe} PU_{pe,u,t} \cdot Patr_{pe} + \sum_{pm} PU_{pm,u,t} \cdot Matr_u \geq \sum_{pa} PU_{pa,u,t} \cdot \theta_{pa,u} \cdot Matr_u \quad \forall u,t \quad (17)$$

$$M_{ut} \geq 0; PU_{put} \geq 0; I_{pets}^+ \geq 0; I_{pts}^- \geq 0; D_{pts} \geq 0; \theta_s^+ \geq 0; \theta_s^- \geq 0; z_{pts}^+ \geq 0; z_{pts}^- \geq 0 \quad \forall p,e,u,t,s \quad (18)$$

O modelo PASUC/N1-M-VP (Expressões 4-18) tem como base o modelo determinístico PASUC/N1 e incorpora a modelagem de programação estocástica robusta, com características de programação multiobjetivo, em que o fator de ajuste ω desempenha o papel de controlar o peso entre a robustez da solução e a robustez do modelo, e o parâmetro λ penaliza o desvio entre o valor da função objetivo de cada cenário s . Para mais detalhes dos conceitos de robustez da solução e robustez do modelo e das funções destes parâmetros envolvidos, o leitor pode consultar, por exemplo, Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995); Vladimirou e Zenios (1997); Paiva (2009).

Em Paiva (2009), também foi estudado outro modelo de programação estocástica robusta que considera incerteza no parâmetro de eficiência global das usinas ($Eatr_{ut}$) do modelo PASUC/N1. Este modelo utiliza as mesmas variáveis de primeiro e segundo estágio do modelo PASUC/N1-M-VP, mas adota um parâmetro adicional $Eatr_{uts}$ que determina o valor da eficiência global de conversão de ATR da usina u no período t para cada cenário s . Outra diferença existente entre este modelo e o modelo PASUC/N1-M-VP é a remoção da incerteza no parâmetro VP_{pt} (preços dos produtos) e a modificação da variável auxiliar que representa a infactibilidade do modelo de otimização robusta. Por motivo de limitação de espaço, este modelo não será tratado no presente trabalho.

3.2 Incerteza na matriz de rendimentos industriais (PASUC/N2-M-A)

Para o desenvolvimento do modelo de programação estocástica robusta com incerteza na matriz de rendimentos industriais (A_{pkt}) do segundo nível de análise (PASUC/N2-M-A), reformula-se o modelo determinístico PASUC/N2 do Anexo 1, para incorporar a variável de produção do produto p no período t (PU_{pt}), que substitui o termo $\sum_k A_{pkt} M''_{kt}$ do modelo PASUC/N2. Esta modificação simplifica a identificação das variáveis de segundo estágio do modelo PASUC/N2-M-A. Devido a limitações de espaço, não apresentamos neste trabalho o modelo PASUC/N2 reformulado. Entretanto, esta reformulação pode ser verificada na apresentação do modelo PASUC/N2-M-A adiante, com a substituição do termo $\sum_k A_{pkt} M''_{kt}$ do modelo PASUC/N2 do Anexo 1 pela variável PU_{pt} e a incorporação da restrição (24). Diversos testes executados com o modelo PASUC/N2 reformulado comprovaram sua consistência com o modelo PASUC/N2 do Anexo 1.

Para a construção do modelo PASUC/N2-M-A, faz-se necessário a substituição do parâmetro A_{pkt} pelo parâmetro A_{pkts} , que representa o rendimento industrial do produto p com processo k no período t para cada cenário s . Além disso, consideram-se como variáveis de segundo estágio a produção do produto p no período t no cenário s (PU_{pts}); a variável de quantidade de capital disponível para giro financeiro no período t no cenário s (S_{ts}); assim como todas as variáveis relacionadas com os cálculos de cogeração de energia em cada período t e cada cenário s (e.g., estoque de bagaço - Ib_{ts} ; quantidade de bagaço consumido para geração de vapor - Mb_{ts} ; quantidade de vapor produzido - VAP_{ts} ; quantidade de energia produzida - EG_{ts} ; quantidade de energia exportada - EE_{ts}). Estas variáveis são consideradas de segundo estágio por ser possível calcular seu valor com base nas variáveis de primeiro estágio,

tais como, as variáveis de seleção de processos (X_{kt}), as variáveis de moagem ($M_t, M'_{mt}, M''_{ft}, M'''_{kt}$) e as variáveis de disponibilidade de cana (C_{mt}). Ou seja, são variáveis que podem ter seus resultados definidos após a realização da incerteza; fato que não acontece com as variáveis de primeiro estágio.

Além das modificações apresentadas acima, é necessário incorporar no modelo PASUC/N2-M-A as variáveis auxiliares do critério de otimalidade de cada cenário s (θ_s^+ e θ_s^-), o parâmetro de penalização do desvio da função objetivo em cada cenário s (λ) e o vetor de probabilidade de ocorrência do cenário s (p_s). Para o caso da variável auxiliar de infactibilidade do modelo de programação estocástica robusta (z_s) e do parâmetro de penalização do *trade-off* entre otimalidade e robustez (ω), utiliza-se, respectivamente, a variável de atraso no atendimento da meta repassada pelo primeiro nível de decisão para cada produto p no período t no cenário s (I_{pts}^-), e o parâmetro de penalização por atraso na entrega da demanda (CA), ambos já existentes no modelo PASUC/N2.

Com a utilização destes novos parâmetros e variáveis, é possível apresentar a formulação matemática do modelo PASUC/N2-M-A. Para isso, considere a seguinte definição para os critérios de otimalidade (σ) e penalidade por infactibilidade (ρ) (Equações 19,20):

$$\sigma = \sum_s \sum_t p_s \left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} \sum_{pa} (PU_{pa,t,s} ConvA_{pa}^{CRPAAA} / ProdA) RecA \\ + \sum_{pe} (PU_{pe,t,s} ConvE_{pe}^{CRPAAA} / ProDE) RecE \\ + \sum_{pm} (PU_{pm,t,s} Matr_{USC''} / ProdM) RecM \end{matrix} \right) + EE_{ts} VE \end{matrix} \right) + \lambda \sum_s p_s (\theta_s^+ + \theta_s^-) \quad (19)$$

$$\rho = \sum_s \sum_t \sum_p p_s I_{pts}^- \quad (20)$$

Considere também a variável ζ_s como sendo a função objetivo do modelo determinístico reformulado PASUC/N2 para cada cenário s (Equação 41), como segue (Equação 21):

$$\zeta_s = \sum_t \left(\begin{matrix} \left(\begin{matrix} \sum_{pa} (PU_{pa,t,s} ConvA_{pa}^{CRPAAA} / ProdA) RecA \\ + \sum_{pe} (PU_{pe,t,s} ConvE_{pe}^{CRPAAA} / ProDE) RecE \\ + \sum_{pm} (PU_{pm,t,s} Matr_{USC''} / ProdM) RecM \end{matrix} \right) + EE_{ts} VE - \left(\begin{matrix} \sum_m CM_{mt} M'_{mt} \\ + \sum_f CF_{ft} M''_{ft} \\ + \sum_k CK_{kt} M'''_{kt} \end{matrix} \right) \end{matrix} \right) \forall s \quad (21)$$

Comparando com o modelo determinístico PASUC/N2 reformulado, as modificações mais importantes na formulação que segue podem ser observadas na função objetivo (Equação 22), na restrição (Equação 23), na definição das variáveis de domínio (Equação 43).

Modelo PASUC/N2-M-A com variável auxiliar de produção

$$\begin{aligned} \max \xi = & \sum_s p_s \zeta_s - \lambda \sum_s p_s (\theta_s^+ + \theta_s^-) - \\ & - CA \sum_s \sum_t \sum_p p_s I_{pts}^- \end{aligned} \quad (22)$$

Restrições do modelo PASUC/N2-M-A

$$\zeta_s - \sum_{s'=1}^S p_{s'} \zeta_{s'} = \theta_s^+ - \theta_s^- \quad \forall s \quad (23)$$

$$\sum_k A_{pkts} M_{kt}''' \geq PU_{pts} \quad \forall p, t, s \quad (24)$$

$$\sum_{t'=1}^t PU_{pt's} + I_{pt's}^- \geq \sum_{t'=1}^t Meta_{pt'} \quad \forall p, t, s \quad (25)$$

$$\sum_m M_{mt}' = \sum_f M_{ft}'' = \sum_k M_{kt}''' = M_t \quad \forall t \quad (26)$$

$$C_{mt} = C_{m,t-1} - M_{m,t-1}' \geq M_{mt}' \quad \forall m, t \quad (27)$$

$$\sum_m C_{m0} = \sum_t \sum_m M_{mt}' \quad (28)$$

$$\sum_{mp} C_{mp,t} \leq Disp_t \quad \forall t \quad (29)$$

$$\sum_{mf} M_{mf,t}' \leq \alpha_t \cdot M_t \quad \forall t \quad (30)$$

$$Mmin.n_t \cdot \varphi_t \leq M_t \leq Mmax.n_t \cdot \varphi_t \quad \forall t \quad (31)$$

$$\begin{aligned} S_{ts} = & S_{t-1,s} + \left(\sum_p \left(RCa_p + \left(Patr_p RCB \right) \right) PU_{pts} + RCc_t \right) - \\ & - \left(\sum_m GM_{mt} M_{mt}' + \sum_f GF_{ft} M_{ft}'' + \sum_k GK_{kt} M_{kt}''' \right) \quad \forall t, s \end{aligned} \quad (32)$$

$$M_{ft}'' \leq Fmax_f \cdot n_t \cdot \beta_{ft} \quad \forall t, s \quad (33)$$

$$PU_{pts} \leq CPmax_p \cdot n_t \quad \forall p, t, s \quad (34)$$

$$\sum_{pa} PU_{pa,t,s} \leq CFMax \cdot n_t \quad \forall t, s \quad (35)$$

$$\sum_{pe} PU_{pe,t,s} \leq CDMax \cdot n_t \quad \forall t, s \quad (36)$$

$$\sum_k X_{kt} = 1 \quad \forall t \quad (37)$$

$$M_{kt}''' \leq G \cdot X_{kt} \quad \forall k, t \quad (38)$$

$$\begin{aligned} Ib_{t,s} = & Ib_{t-1,s} + \sum_m \left(M_{mt}' Fibr_{mt} / (1 - UB_t) \right) - \\ & - Mb_{ts} \geq \sum_m \left(M_{mt}' Fibr_{mt} / (1 - UB_t) \right) EB \quad \forall t, s \end{aligned} \quad (39)$$

$$Ib_{T',s} \geq EPb \quad \forall s \quad (40)$$

$$\begin{aligned} VAPMax \cdot n_t \geq & Mb_{ts} RC = \\ = & VAP_{ts} \geq \sum_k M_{kt}''' CFVAP + \\ & + EG_{ts} / RCF \geq \sum_k \sum_p CVAP_p PU_{pts} \quad \forall t, s \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} EGMax \cdot n_t \geq & EG_{ts} = EE_{ts} + \\ & \left(\sum_k CFE \cdot M_{kt}''' + \sum_k \sum_p CVE_{pk} PU_{pts} \right) \quad \forall t, s \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} X_{kt} \in & \{0, 1\}; M_t \geq 0; M_{mt}' \geq 0; \\ M_{ft}'' \geq & 0; M_{kt}''' \geq 0; C_{mt} \geq 0; \\ PU_{pts} \geq & 0; S_{ts} \geq 0 \\ Ib_{ts} \geq & 0; Mb_{ts} \geq 0; VAP_{ts} \geq 0; \\ EG_{ts} \geq & 0; EE_{ts} \geq 0; \theta_s^+ \geq 0; \\ \theta_s^- \geq & 0; I_{pts}^- \geq 0 \quad \forall k, m, f, p, t, s \end{aligned} \quad (43)$$

Note que é possível considerar a variável de produção por período (PU_{pts}) como uma variável de segundo estágio pelo fato das decisões de mix de produção e de ritmo de moagem de cana serem obtidas por meio das variáveis de moagem (M_{kt}''' , M_{ft}'' , M_{mt}') e de seleção de processos (X_{kt}), todas consideradas de primeiro estágio.

Em Paiva (2009), também foi estudado outro modelo de programação estocástica robusta que considera incerteza no parâmetro de tempo aproveitado de moagem (φ) do modelo PASUC/N2. Neste

modelo, foram consideradas as mesmas variáveis de primeiro e segundo estágio do modelo PASUC/N2-M-A, e adotou-se um novo parâmetro ϕ_{ts} que determina o percentual de tempo aproveitado de moagem no período t no cenário s . Por motivo de limitação de espaço, este modelo não será tratado no presente trabalho.

4 Resultados computacionais

Nesta seção, são apresentados os resultados computacionais obtidos com a utilização dos modelos de programação estocástica robusta, descritos na seção anterior e utilizando os dados do estudo de caso apresentados em Paiva (2009); Paiva e Morabito (in press). A seção 4.1 analisa os resultados do modelo PASUC/N1-M-VP e a seção 4.2 analisa os resultados obtidos conjuntamente para a incerteza na matriz de rendimentos industriais (A_{pkt}) e no preço dos produtos (VP_{pt}) (PASUC-M). Os resultados aqui reportados referem-se a soluções ótimas e foram obtidos utilizando a linguagem de modelagem GAMS, versão 22.7, com o solver CPLEX 11 em um computador Pentium 4 3,2 GHz, 2 GB de memória RAM e sistema operacional Windows XP, service pack 2, ou seja, o mesmo ambiente computacional utilizado por Paiva e Morabito (in press).

4.1 Resultados do modelo de programação estocástica robusta com incerteza nos preços dos produtos (PASUC/N1-M-VP)

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com a utilização do modelo PASUC/N1-M-VP adotando duas abordagens para tratar a incerteza no preço dos produtos finais (VP_{pt}). A primeira abordagem (PASUC/N1-M-VP/A1) considera desvios percentuais constantes entre os preços definidos para o modelo determinístico (valor nominal) e o preço adotado para cada cenário do modelo de programação estocástica robusta. A segunda abordagem (PASUC/N1-M-VP/A2) considera uma variação crescente do desvio percentual adotado para os cenários, ou seja, supõe-se que a incerteza nos preços dos produtos é maior para períodos mais distantes; consequentemente, menor para os períodos mais próximos, conforme ilustrado na Figura 2. Deste modo, os cenários da segunda abordagem apresentam desvios diferentes para cada período de análise. Entretanto, para facilitar a comparação entre os modelos PASUC/N1-M-VP/A1 e PASUC/N1-M-VP/A2, os valores adotados para os desvios foram definidos de forma que o percentual total (incerteza total) em todos os períodos seja o mesmo para cada uma das situações.

As aplicações reportadas neste estudo consideram três possíveis realizações para o parâmetro incerto

VP_{pts} : variação negativa no valor do parâmetro VP_{pts} (Cenário A); uma variação positiva no valor do parâmetro VP_{pts} (Cenário C); e a permanência dos preços no valor nominal adotado no modelo determinístico PASUC/N1 (Cenário B). Neste estudo, considera-se que as probabilidades de ocorrência do cenário A e C são de 25% e a probabilidade de ocorrência do cenário B é de 50%, conforme sugerido pelo corpo técnico da USC.

Os resultados obtidos nesta seção são avaliados por meio de três dados de saída do modelo PASUC/N1-M-VP, o primeiro é o valor da penalidade por infactibilidade (ρ), o segundo é o valor provável da função objetivo associada ao modelo determinístico original ($\zeta = \sum_s p_s \zeta_s$), e o terceiro é a função objetivo do modelo de programação estocástica robusta (ξ). Com estes resultados, pretende-se avaliar a deterioração dos valores de ρ , ζ , e ξ , de acordo com a variação do parâmetro ω (fator de ajuste do trade-off entre otimalidade e robustez do modelo) e do parâmetro λ (fator de penalização do desvio da função objetivo), apresentados na seção 3.1. A variação de ω inicia em zero e segue até o valor em que o aumento de ω não impacte mais a função objetivo do modelo. Para o caso do parâmetro λ , adota-se apenas os valores 1, 2 e 3, para viabilizar a análise pretendida e não acarretar distorções da modelagem proposta.

Com os resultados da Tabela 1, percebe-se que o valor da função objetivo (ξ) decresce com o aumento do fator de ajuste de robustez do modelo (ω). Esta constatação é justificada pela utilização da variável de ajuste de robustez (z_{pts}^+ ou z_{pts}^-), que funciona como uma variável de folga e possibilita uma melhora no valor da função objetivo em casos de penalização baixa (problema de maximização). Desta forma, pode-se dizer que o modelo PASUC/N1-M-VP/A1 possui maior grau de liberdade quanto à infactibilidade, se comparado com o modelo determinístico PASUC/

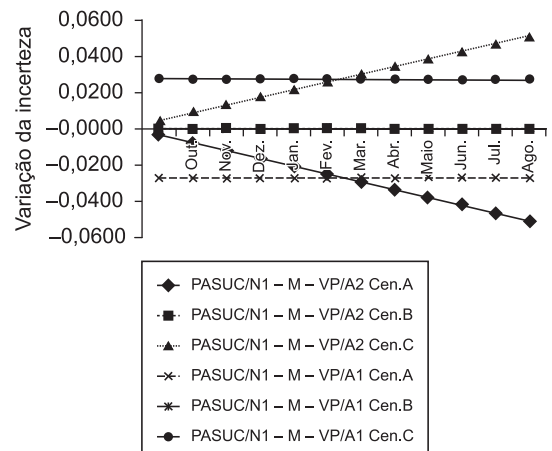


Figura 2. Percentual de incerteza em cada abordagem/cenário do modelo PASUC/N1-M-VP.

N1 do Anexo 1. Esta explicação também pode ser usada para justificar o comportamento da função objetivo associada ao modelo determinístico original (ζ). Os resultados reportados para a penalidade por infactibilidade (ρ) são intuitivos e indicam que quanto maior a penalização adotada para a infactibilidade do modelo PASUC/N1-M-VP/A1, menor é o uso deste artifício (Tabela 1).

No caso do fator de penalização do desvio da função objetivo (λ), tem-se uma potencialização dos efeitos apresentados no parágrafo anterior, fazendo com que o modelo estabilize mais rapidamente em casos de λ maiores. Além disso, constatou-se que valores de penalização muito altos impossibilitam o correto funcionamento do modelo. As considerações apresentadas até este momento referem-se ao modelo PASUC/N1-M-VP/A1. Com os resultados da Tabela 1, percebe-se que o valor da função objetivo (ξ) decresce com o aumento do fator de ajuste de robustez do modelo (ω). Esta constatação é justificada pela utilização da variável de ajuste de robustez (z_{pts}^+ ou z_{pts}^-), que funciona como uma variável de folga e possibilita uma melhora no valor

da função objetivo em casos de penalização baixa (problema de maximização). Desta forma, pode-se dizer que o modelo PASUC/N1-M-VP/A1 possui maior grau de liberdade quanto à infactibilidade, se comparado com o modelo determinístico PASUC/N1 do Anexo 1. Esta explicação também pode ser usada para justificar o comportamento da função objetivo associada ao modelo determinístico original (ζ). Os resultados reportados para a penalidade por infactibilidade (ρ) são intuitivos e indicam que quanto maior a penalização adotada para a infactibilidade do modelo PASUC/N1-M-VP/A1, menor é o uso deste artifício (Tabela 1).

A Tabela 2 apresenta os mesmos resultados obtidos para o modelo PASUC/N1-M-VP/A2.

Com os resultados apresentados na Tabela 1, é possível fazer uma comparação entre o valor obtido para a função objetivo associada ao modelo determinístico original (ζ) e a função objetivo do modelo determinístico PASUC/N1 (PAIVA; MORABITO, in press). Neste comparativo, pode-se dizer que ζ de PASUC/N1-M-VP/A1, quando $\lambda = 1$ e $\omega = 1000$, assume valores equivalentes ao encontrado

Tabela 1. Resultados do modelo PASUC/N1-M-VP/A1.

ω	ξ (10 ⁶ unidades)			ζ (10 ⁶ \$)			ρ (10 ³ unidades)		
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$
0	3608,3	1951,9	535,06	5290,5	5239,2	3424,4	13982,0	13874,7	10000,4
100	2404,3	823,25	16,39	5089,6	5019,0	211,57	10659,9	10460,5	166,6
200	1352,3	90,66	12,30	5008,1	3260,0	112,05	10421,5	6677,95	26,02
300	339,80	42,59	9,84	3262,0	207,98	110,11	6682,53	161,32	24,56
400	88,95	39,25	8,15	212,03	116,33	53,27	148,89	27,14	0,44
500	77,99	36,83	8,15	182,79	112,24	52,13	93,54	20,19	0,00
600	68,88	34,81	8,15	163,54	112,24	52,13	71,09	20,18	0,00
700	65,84	33,15	8,15	115,03	106,06	52,13	19,99	13,22	0,00
800	64,26	32,59	8,15	106,18	91,26	52,13	10,19	0,00	0,00
900	63,57	32,59	8,15	98,24	91,26	52,13	0,49	0,00	0,00
1000	63,56	32,59	8,15	97,79	91,26	52,13	0,00	0,00	0,00

Tabela 2. Resultados do modelo PASUC/N1-M-VP/A2.

ω	ξ (10 ⁶ unidades)			ζ (10 ⁶ \$)			ρ (10 ³ unidades)		
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$
0	3631,3	1975,6	546,94	5296,7	5277,2	3500,4	13981,8	13938,4	10127,6
100	2426,8	840,13	16,84	5095,6	5056,4	215,0	10659,9	10525,6	167,53
200	1369,8	97,85	12,58	5045,5	3334,6	113,7	10486,3	6805,08	25,94
300	355,25	43,81	10,11	3336,5	2147,4	111,8	6809,64	167,14	24,53
400	90,52	39,89	8,25	221,14	117,17	56,84	163,57	26,88	1,59
500	78,87	37,43	8,23	183,54	113,75	52,70	93,01	21,15	0,00
600	69,80	35,31	8,23	165,42	113,74	52,70	71,88	21,13	0,00
700	66,53	33,52	8,23	117,91	106,67	52,70	21,75	13,27	0,00
800	64,84	32,76	8,23	108,06	92,08	52,70	11,26	0,46	0,00
900	63,97	32,75	8,23	102,72	91,50	52,70	4,61	0,00	0,00
1000	63,92	32,75	8,23	98,69	91,50	52,70	0,00	0,00	0,00

para a função objetivo do modelo PASUC/N1. Avaliação análoga pode ser feita para o caso do modelo PASUC/N1-M-VP/A2. Com os resultados da Tabela 1, percebe-se que o valor da função objetivo (ξ) decresce com o aumento do fator de ajuste de robustez do modelo (ω). Esta constatação é justificada pela utilização da variável de ajuste de robustez (z_{pis}^+ ou z_{pis}^-), que funciona como uma variável de folga e possibilita uma melhora no valor da função objetivo em casos de penalização baixa (problema de maximização). Desta forma, pode-se dizer que o modelo PASUC/N1-M-VP/A1 possui maior grau de liberdade quanto à infactibilidade, se comparado com o modelo determinístico PASUC/N1 do Anexo 1. Esta explicação também pode ser usada para justificar o comportamento da função objetivo associada ao modelo determinístico original (ζ). Os resultados reportados para a penalidade por infactibilidade (ρ) são intuitivos e indicam que, quanto maior a penalização adotada para a infactibilidade do modelo PASUC/N1-M-VP/A1, menor é o uso deste artifício (Tabela 1); entretanto, neste caso, o resultado encontrado para ζ é ligeiramente superior ao resultado reportado para o modelo PASUC/N1.

Além disso, comparando os valores obtidos para as duas abordagens do modelo PASUC/N1-M-VP pode-se concluir que o padrão dos resultados é o mesmo, ou seja, existe um decréscimo dos valores estudados (ξ , ζ , ρ) até o ponto em que a alteração de ω já não impacta os resultados analisados. Desta forma, pode-se dizer que o modelo de programação estocástica robusta passa a apresentar resultados equivalentes a um modelo de programação estocástica em dois estágios com recurso para o caso em que ω tende a infinito, conforme discutido em Vladimirov e Zenios (1997).

A Figuras 3-5 ilustram o impacto de ω e λ nos resultados do modelo PASUC/N1-M-VP/A2. A Figura 3, corrobora a afirmativa anterior de que o modelo de programação estocástica robusta passa a apresentar resultados equivalentes a um modelo de programação estocástica em dois estágios com recurso quando ω tende a infinito. Na Figura 4, percebe-se que não existe um padrão tão regular para a parcela da função objetivo que corresponde à margem de contribuição provável (ζ). Isto pode ocorrer devido ao impacto da utilização da variável de ajuste de robustez (z_{pis}^+ ou z_{pis}^-) em apenas alguns cenários específicos, fazendo com que a variação entre os resultados de ζ fosse maior e, conseqüentemente, o resultado médio da margem de contribuição também fosse maior. Este fato pode ser verificado quando se analisa o resultado do maior valor de λ ($\lambda = 3$), no qual se percebe que existe um comportamento mais próximo ao resultado da Figura 3.

Na Figura 5, é possível verificar que o decréscimo da parcela da função objetivo que representa a

penalidade por infactibilidade no modelo PASUC/N1-M-VP/A2 apresenta o padrão esperado, conforme discutido anteriormente nos resultados da Tabela 2, por meio da análise dos dados apresentados nesta seção, adotaram-se os valores de $\lambda = 1$ e $\omega = 1000$ para os demais resultados dos modelos de programação estocástica robusta deste artigo, de forma que a factibilidade e a robustez do modelo sejam tratadas prioritariamente nas análises subsequentes. É interessante notar que o modelo determinístico pode ser considerado um caso particular do modelo de programação estocástica robusta, quando $\lambda = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$.

Para uma análise mais detalhada dos resultados de cada cenário dos modelos PASUC/N1-M-VP/A1 e PASUC/N1-M-VP/A2, é importante avaliar o resultado obtido nos dois níveis de decisão e também os resultados das variáveis de decisão envolvidas. Para ilustrar esta análise, as Tabelas 3,4 apresentam, respectivamente, os resultados das margens de contribuição e o valor obtido para a variável de atendimento da demanda para o açúcar refinado ($D^{''Refinado''is}$) em cada abordagem/cenário considerada.

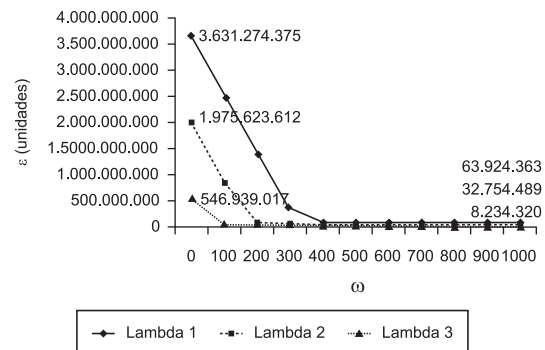


Figura 3. Impacto dos parâmetros de robustez e variabilidade entre cenários na função objetivo do modelo PASUC/N1-M-VP/A2.

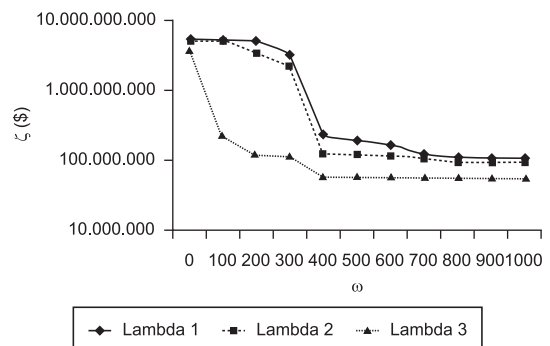


Figura 4. Impacto dos parâmetros de robustez e variabilidade entre cenários na margem de contribuição provável do modelo PASUC/N1-M-VP/A2.

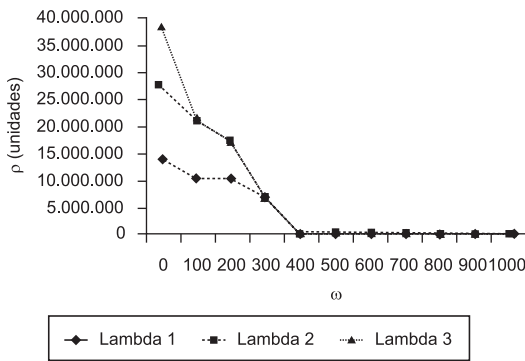


Figura 5. Impacto dos parâmetros de robustez e variabilidade entre cenários na penalização por infactibilidade da função objetivo do modelo PASUC/N1-M-VP/A2.

Ao serem analisados os resultados da Tabela 3, percebe-se que os valores obtidos para a margem de contribuição da abordagem A2 são, em geral, um pouco maiores que os valores da abordagem A1, para todos os cenários analisados e para ambos os níveis. Este resultado indica que a abordagem com incerteza crescente (A2) propicia uma antecipação dos efeitos da queda mais acentuada dos preços, fazendo com que o atendimento da demanda seja alterado em cada cenário e, conseqüentemente, a margem de contribuição seja superior à obtida na abordagem A1.

Na Tabela 4, é possível verificar a alteração da variável de atendimento da demanda (variável de segundo estágio), mencionada anteriormente. Percebe-se que a variável de decisão de atendimento da demanda apresentou o mesmo valor para todos os cenários da abordagem A1, fato que não ocorreu para a segunda abordagem, em que os meses de setembro, outubro, março e julho apresentam valores de atendimento da demanda distintos para cada cenário. Esta situação também foi observada para outros produtos e outras variáveis de segundo estágio, tais como o estoque ($I_{p,ts}^+$) e a falta de produtos ($I_{p,ts}^-$).

Tendo como base as considerações apresentadas nesta seção, adota-se a abordagem A2 para as demais análises do modelo de programação estocástica robusta desta seção. O tempo computacional para obter a solução ótima do modelo PASUC/N2-M-VP foi de 349 segundos para a abordagem A1 e de 4416 segundos para a abordagem A2.

4.2 Resultados do modelo de programação estocástica robusta com incerteza na matriz de rendimentos industriais e no preço dos produtos (PASUC-M)

Nesta seção, são apresentados os resultados da incorporação da incerteza no parâmetro de preço dos produtos (nível 1), juntamente com a incerteza proveniente da matriz de rendimentos industriais

(nível 2). Esta abordagem de análise conjunta de dois parâmetros incertos faz com que o número de cenários cresça para um total de 9 (Cenários A, B, ..., I), formados pela composição da incerteza em VP_{pts} (3 possibilidades – Cenários A^{VP} , B^{VP} , C^{VP}) e da incerteza em A_{pkts} (3 possibilidades – Cenários A^A , B^A , C^A). Isto se deve à natureza estocástica dos parâmetros de saída do primeiro nível que são utilizados como dados de entrada no segundo nível, especificamente os parâmetros relacionados com a receita da CRPAAA ($RecA_s$, $RecE_s$, $RecM_s$).

As probabilidades de ocorrência dos cenários A, C, G e I foram consideradas como 6,3%, as probabilidades de ocorrência dos cenários B, D, F e H como 12,5% e a probabilidade de ocorrência do cenário E como 25%. Estes valores foram obtidos com a combinação das probabilidades que representam a ocorrência de cada cenário s para os parâmetros incertos VP_{pts} e A_{pkts} [(0,25; 0,50; 0,25) . (0,25; 0,50; 0,25) = (0,063; 0,125; 0,063; 0,125; 0,25; 0,125; 0,063; 0,125; 0,063)]. Por exemplo, a probabilidade de ocorrência do cenário A^{VP} é de 25% e a probabilidade de ocorrência do cenário C^A é de 25%, o cenário combinado (A^{VP} , C^A) corresponde ao cenário C que possui probabilidade de 6,3% de ocorrer. Os valores de VP_{pts} foram calculados da mesma forma que a abordagem 2 do modelo PASUC/N1-M-VP e os valores de A_{pkts} foram calculados de acordo com um desvio percentual uniforme de -1% nos cenários A, D e G (cenários com variação negativa para a eficiência industrial) e +1% para os cenários C, F e I (cenários com variação positiva para a eficiência industrial). Considera-se que existe independência entre os parâmetros incertos VP_{pts} e A_{pkts} , assim como entre os cenários formados.

A seguir, são apresentados os resultados encontrados para o modelo PASUC/M, enfocando os valores obtidos com algumas variáveis de segundo estágio do nível 1 e do nível 2, tais como: atendimento da demanda por parte da CRPAAA ($D_{p,ts}$), produção da USC por produto p , período t e cenário s ($PU_{p,ts}$), geração de energia (EG_{ts}) e saldo financeiro (S_{ts}); além da variável de primeiro estágio que define a meta de produção ($Meta_{pt}$) para o caso da USC (primeiro nível).

Os resultados da margem de contribuição da CRPAAA e atendimento da demanda do modelo PASUC/N1-M são os mesmos valores apresentados para o modelo PASUC/N1-M-VP/A2, dado que nesta seção está sendo utilizada a mesma abordagem e os mesmos dados da seção 4.1. Estes valores estão apresentados na Tabela 3,4 respectivamente. São apresentados apenas os dados de atendimento da demanda de forma mais agregada, conforme Tabela 5.

Nesta análise percebe-se que o modelo PASUC/N1-M obteve o mesmo resultado do modelo PASUC/N1 (PAIVA; MORABITO, in press). Este resultado mostra que as alterações ocorridas na variável de atendimento da demanda ($D_{p,ts}$), no caso do modelo PASUC/N1-M, são apenas alterações entre os períodos

Tabela 3. Margem de contribuição do modelo PASUC/N1-M-VP (valores em \$).

Cenários	PASUC-M-VP/A1		PASUC-M-VP/A2	
	Nível 1	Nível 2	Nível 1	Nível 2
A	78.198.731	17.044.226	79.022.260	17.195.707
B	97.794.874	19.154.816	97.740.687	19.359.375
C	117.391.000	21.265.405	120.256.600	21.839.269

Tabela 4. Atendimento da demanda de açúcar refinado por abordagem/cenário - PASUC/N1-M-VP (t).

Açúcar refinado	PASUC/N1-M-VP/A1			PASUC/N1-M-VP/A2		
	Cenário A	Cenário B	Cenário C	Cenário A	Cenário B	Cenário C
set.	1.891	1.891	1.891	1.891	1.891	
out.	9.000	9.000	9.000	14.260	9.000	9.000
nov.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
dez.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
jan.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
fev.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
mar.	14.080	14.080	14.080	9.000	14.260	9.000
abr.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
maio	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
jun.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000
jul.	9.000	9.000	9.000	9.000	9.000	16.151
ago.	0	0	0	0	0	0

de planejamento. Também é importante destacar que não ocorreu falta (ou atraso) no último período do planejamento ($I_{p,T}^- = 0$).

A Tabela 6 apresenta a meta de produção mensal da USC ($Meta_{pt}$), assim como um comparativo entre a meta acumulada para toda a safra e a produção real da USC na safra 2007/2008. A meta de produção total da USC (coluna e) está sendo comparada com a produção real da USC na safra 2007/2008 (coluna f). Esta comparação é meramente ilustrativa, pelo fato de ocorrerem alterações normais no direcionamento do mix de produção no decorrer da safra. Estas modificações não foram incorporadas no modelo PASUC/N1-M, pois os dados utilizados referem-se aos dados de planejamento e projeção da produção executados em agosto de 2007 e, portanto, antes do término da safra que ocorreu em abril de 2008.

Os resultados da geração de energia estão apresentados na Figura 6, em que se percebe uma geração um pouco superior a 1.000.000 Mwh/semana para as primeiras semanas de safra (semana 1 a semana 9) e uma geração máxima de 1680 Mwh/semana na semana 18. Este padrão de geração de energia elétrica também foi verificado nos resultados apresentados por Paiva e Morabito (in press). Além disso, este padrão de geração de energia elétrica total foi obtido para todos os cenários do modelo PASUC/N2-M. As diferenças entre estes cenários só aparecem no valor da energia elétrica exportada (EE_{is}), e ainda assim com valores muito reduzidos.

A Figura 7 apresenta a projeção de saldo financeiro obtida para o modelo PASUC/N2-M. Analisando esta figura, é possível dizer que cada conjunto de cenários apresenta um fluxo financeiro próprio. A explicação para esta situação é o impacto exercido pela incerteza no rendimento industrial, que gera uma redução na produção da USC e, conseqüentemente, modifica os repasses da CRPAAA. Este resultado é interessante para embasar negociações com bancos para a obtenção de linhas de crédito de capital de giro, sendo possível verificar o impacto da incerteza envolvida no saldo financeiro da empresa. Além disso, também é possível utilizar os resultados da Figura 7 para negociar com a CRPAAA um melhor repasse financeiro (RCa_p , RCb , RCc_r), para que o risco de atingir um saldo negativo em algum momento da safra seja reduzido.

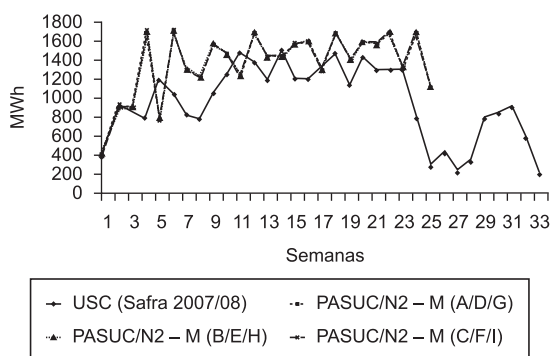
Para finalizar a análise do modelo PASUC-M, as Tabelas 7-9 apresentam a comparação dos resultados globais. É interessante notar na Tabela 7 que existe uma relação de proporcionalidade inversa entre a produção de açúcar e álcool e a quantidade de energia exportada. Isto se deve à necessidade de consumo de vapor e energia elétrica para produzir esses produtos, fazendo com que a quantidade de energia disponível para exportação seja reduzida. Observa-se a possibilidade de atraso no atendimento das metas da cooperativa (I_{pt}^-) para o cenário apresentado neste estudo, conforme relação entre as colunas a-d da Tabela 7.

Tabela 5. Tabela de atendimento da demanda por produto (t ou m3) – PASUC/N1-M.

Produtos	Demanda mínima ($D_{min_{pt}}$)	Demanda máxima (D_{max_p}) [c]	Demanda atendida ($\sum_i D_{ptis}$) [d]	Saldo demanda [c-d]	Atraso ($I_{p''T''}$)	Estoque inicial ($\sum_e I_{ped}$)
Standard	3.000	53.500	3.000	50.500	0	2000
Superior	18.000	53.500	18.000	35.500	0	0
Especial	18.000	53.500	53.500	0	0	1000
Extra	75.000	80.000	80.000	0	0	0
Refinado	90.000	100.000	97.151	2.849	0	500
VHP	480.000	10.000.000	480.000	9.520.000	0	1000
VHP+	80.000	1.000.000	80.000	920.000	0	0
VHPe	1.500	20.000	1.500	18.500	0	0
Melaço	0	10.000	4.721	5.279	0	0
AEHC	96.000	155.000	155.000	0	0	5000
AEAC	116.000	180.000	180.000	0	0	5000
AEHren	4.800	5.000	4.800	200	0	0

Tabela 6. Resultado obtido para a meta de produção da USC (t ou m3) – PASUC/N1-M.

Produtos	Meta de produção mensal da USC ($Meta_{pt}$)							Meta PASUC/ N1-M total [e]	Prod. USC Real [f]	[(e-f)/f]
	set.	out.	nov.	dez.	jan.	fev.	mar.			
Standard								0		-
Superior								0		-
Especial	2443	11368	1500	9221	12000			36531	39868	-8,37%
Extra						6778		6778	14317	-52,7%
Refinado								0		-
VHP			18111	12904		17793	5625	54433	40725	33,7%
VHP+								0		-
VHPe								0		-
Melaço								0		-
AEHC	2415	6195	2610	1651	2096	2953	1349	19268	12268	57,1%
AEAC			3480	3540	3480			10500	16752	-37,3%
AEHren								0		-

**Figura 6.** Geração de energia planejada pelo modelo PASUC/N2-M e dados da safra 2007/2008.

Os dados apresentados na Tabela 7 ilustram, primeiramente, a meta de produção repassada pelo modelo PASUC/N1-M para o modelo PASUC/N2-M (coluna [a]). Na sequência, são apresentados os resultados da produção total de cada produto em cada cenário (colunas b-d) e, na coluna e, são apresentados os resultados do modelo determinístico PASUC/N2 (PAIVA; MORABITO, in press). Analisando esses dados, é possível notar que todos os cenários do modelo de programação estocástica robusta consideram a produção do açúcar tipo Extra, fato que não ocorreu no modelo PASUC/N2. Este resultado, juntamente com a verificação do desvio relativo entre os cenários A/D/G (menor valor para o parâmetro da matriz de

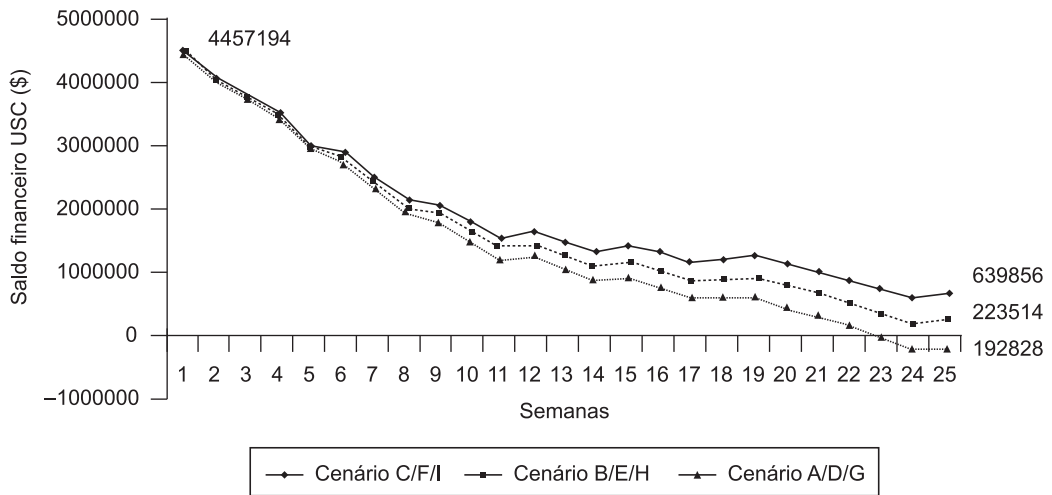


Figura 7. Projeção de saldo financeiro da USC segundo o modelo PASUC/N2-M.

Tabela 7. Comparação dos resultados de produção - PASUC-M.

Resultados	Unid	Meta USC PASUC/N1-M [a]	PASUC/N2-M (A/D/G) [b]	PASUC/N2-M (B/E/H) [c]	PASUC/N2-M (C/F/I) [d]	PASUC/N2 [e]	Desvio relativo [(b-e)/e]
Produção total	Standard	t					
	Superior	t					
	Especial	t	39.868	36.494	36.862	37.232	-29,9%
	Extra	t	14.317	7.053	7.124	7.195	-
	VHP	t	40.725	53.216	53.757	54.293	11,5%
	VHP+	t					
	VHPe	T					
	AEAC	m ³	12.268	19.254	19.450	19.650	36,3%
	AEHC	m ³	16.752	10.868	10.974	11.085	-20,7%
	Melaço	t					
	Energia Exp	MWh		13642	13599	13561	-3,1%

Tabela 8. Comparação da margem de contribuição por cenário - PASUC/N1-M (mil \$).

Cenários	Receita CRPAAA			Margem CRPAAA		
	PASUC/N1-M [a]	PASUC/N1 [b]	Desvio relativo [(a-b)/b]	PASUC/N1-M [c]	PASUC/N1 [d]	Desvio relativo [(c-d)/d]
A/D/G	697.962.500	717.811.700	-2,77%	79.022.260	97.794.883	-19,20%
B/E/H	717.916.500		0,01%	97.740.687		-0,06%
C/F/I	741.156.500		3,25%	120.256.600		22,97%

rendimentos industriais) e o modelo determinístico, indicam que o *mix* sugerido pelo modelo determinístico não é necessariamente próximo dos resultados obtidos para o modelo de programação estocástica robusta.

Na Tabela 9, percebe-se que o segundo nível do modelo PASUC-M (PASUC/N2-M) apresenta um conjunto de resultados de margem de contribuição variando entre 15,83 milhões e 22,02 milhões de

unidades monetárias (coluna g). Estes resultados ajudam a entender o impacto da variação dos parâmetros considerados na análise, possibilitando um direcionamento mais ou menos conservador, dependendo do perfil de cada decisor. Os resultados apresentados na Tabela 8 são os mesmos resultados apresentados na Tabela 3, para o modelo PASUC/N1-M-VP/A2, dado que estas abordagens são idênticas

Tabela 9. Comparação da margem de contribuição por cenário – PASUC/N2-M (mil \$).

Cenários	Receita USC			Margem USC		
	PASUC/N2-M [e]	PASUC/N2 [f]	Desvio relativo [(e-f)/f]	PASUC/N2-M [g]	PASUC/N2 [h]	Desvio relativo [(g-h)/h]
A	73.729.664	78.301.976	-5,84%	15.833.035	18.228.645	-13,14%
B	74.482.489		-4,88%	16.579.489		-9,05%
C	75.235.314		-3,92%	17.325.944		-4,95%
D	75.874.080		-3,10%	17.977.451		-1,38%
E	76.648.566		-2,11%	18.745.567		2,84%
F	77.423.051		-1,12%	19.513.682		7,05%
G	78.332.766		0,04%	20.436.137		12,11%
H	79.132.087		1,06%	21.229.087		16,46%
I	79.931.407		2,08%	22.022.038		20,81%

para o primeiro nível de decisão. A Tabela 8 acrescenta apenas um comparativo deste resultado com o valor obtido no modelo determinístico, apresentado por Paiva e Morabito (in press).

Outra característica dos modelos de programação estocástica robusta, que é realçada pela existência de vários cenários, é a necessidade de inferir a probabilidade de ocorrência dos valores associados a cada parâmetro incerto. Esta característica é frequentemente criticada pelos trabalhos que tratam dos modelos de otimização robusta (BERTSIMAS; SIM, 2004). Entretanto, outros autores consideram este item como um ponto positivo por ser possível incorporar as informações de probabilidade quando este dado está disponível (BEYER; SENDHOFF, 2007). Neste trabalho, entende-se como uma desvantagem dos modelos de programação estocástica robusta a necessidade de determinação da probabilidade de cada cenário, pois se considera complicada a obtenção deste dado de forma confiável para a maioria dos parâmetros incertos encontrados na prática. O tempo computacional necessário para obter a solução do modelo PASUC/N2-M foi de 2521 segundos (~42 minutos).

5 Conclusões

Analisando os resultados reportados neste artigo, é possível verificar que os modelos de programação estocástica robusta permitem analisar o efeito de incertezas existentes nos parâmetros do problema, tais como no preço dos produtos e nos rendimentos industriais. A seguir, são apresentadas algumas considerações sobre a utilização desta técnica, destacando as vantagens e as limitações percebidas. Algumas vantagens da abordagem de programação estocástica robusta são:

- Possibilita uma análise multiobjetivo considerando penalidades para a violação das restrições nos cenários considerados e a

utilização de diferentes critérios de otimização, tais como: valor médio esperado; valor esperado para a combinação entre média e variância das soluções de cada cenário; minimização do máximo arrependimento. O critério de valor médio utilizado neste artigo proporcionou resultados adequados para este estudo;

- Durante a análise dos parâmetros do modelo de programação estocástica robusta, foi possível avaliar o *trade-off* entre a robustez do modelo e a robustez da solução (critérios da função multiobjetivo). Neste estudo, decidiu-se por priorizar a robustez do modelo em detrimento da robustez da solução, procurando gerar soluções factíveis em todos os cenários;
- Durante a análise da incerteza no preço dos produtos, foi possível adotar diferentes padrões de comportamento da variável aleatória que representa a incerteza analisada, tornando flexível a incorporação de cenários com padrões totalmente independentes;
- As variáveis de segundo estágio da abordagem incorporam o ajuste das decisões tomadas ao longo do horizonte de planejamento de acordo com a realização dos parâmetros incertos, facilitando a análise de diferentes políticas para tratar as incertezas;
- Constatou-se um potencial de melhoria no processo de tomada de decisão por meio destas técnicas de otimização, principalmente pela possibilidade de analisar conjuntamente vários cenários.

Algumas desvantagens da abordagem de programação estocástica robusta são:

- Conforme mencionado anteriormente, entende-se que a necessidade de indicar a probabilidade

de ocorrência de cada cenário seja um ponto negativo, por ser complicada a determinação das probabilidades associadas aos parâmetros analisados na prática e pela dependência da análise elaborada pelos tomadores de decisão da empresa. Outros autores consideram este item como um ponto positivo da abordagem, por ser possível incorporar as informações de probabilidade quando este dado está disponível (BEYER; SENDHOFF, 2007);

- O modelo de programação estocástica robusta pode crescer muito com o aumento do número de cenários considerados, além de ser muito dependente da definição das variáveis de segundo estágio.

Como sugestão para pesquisas futuras, destaca-se a utilização de outros critérios de otimalidade, tais como a função média/variação de Markowitz ou o critério de maximização do mínimo arrependimento. Outra possibilidade é analisar o comportamento dos modelos propostos em termos de desempenho de solução, buscando aceleração da solução dos modelos apresentados por meio de heurísticas baseadas em pacotes de otimização e outros estudos relacionados ao desempenho computacional destas aplicações. Também pode ser considerada a inclusão de um terceiro estágio ao modelo apresentado, incluindo uma avaliação estratégica dos cenários mercadológicos de longo prazo e possíveis investimentos e melhorias dos processos de produção. Por fim, sugere-se incorporar incerteza em outros parâmetros dos modelos apresentados neste artigo como, por exemplo, os custos envolvidos, tanto no primeiro nível de decisão quanto no segundo.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos dois revisores anônimos deste artigo a valiosa contribuição, à Usina Santa Clotilde e à Cooperativa Regional dos Produtores de Açúcar e Álcool de Alagoas o apoio e o fornecimento de dados na realização desta pesquisa.

Referências

- ALBUQUERQUE, F. M. **Processo de fabricação de açúcar**. Recife: Ed. universitária UFPE, 2009.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. **Operations Research**, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1030.0065>
- BEYER, H.; SENDHOFF, B. Robust optimization - A comprehensive survey. **Computer Methods Applied to Mechanical Engineering**, v. 196, p. 3190-3218, 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.003>
- CARVALHO, M. D. **Proposta de um modelo de planejamento agregado da produção numa usina de açúcar e álcool vinculado à flutuação de preços em mercados à vista e no mercado futuro**. 2009. 199 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- CASTRO, S. B.; ANDRADE, G. T. C.; ALBUQUERQUE, F. M. **Engenharia e processamento do açúcar**. Usina Santa Clotilde, 2002. Apostila de treinamento e consultoria.
- FERNANDES, A. C. **Cálculos na agroindústria de cana-de-açúcar**. Piracicaba: EME/STAB, 2003.
- HUGOT, E. **Manual da engenharia açucareira**. São Paulo: Mestre Jou, 1977. v. 1-2.
- KHOR, C. S. et al. Two-stage stochastic programming with fixed recourse via scenario planning with economic and operational risk management for petroleum refinery planning under uncertainty. **Chemical Engineering and Processing**, v. 47, p. 1744-1764, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cep.2007.09.016>
- MULVEY, J. M.; VANDERBEI, R. J.; ZENIOS, S. A. Robust optimization of large-scale systems. **Operations Research**, v. 43, n. 2, p. 264-281, 1995. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.43.2.264>
- PAIVA, R. P. O. **Um modelo baseado em seleção de processos e dimensionamento de lotes para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool**. 2006. 184 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.
- PAIVA, R. P. O. **Modelagem do planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético utilizando programação matemática e otimização robusta**. 2009. Tese de doutorado (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.
- PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. Um modelo de otimização para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool. **Gestão & Produção**, v. 14, p. 25-41, 2007. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2007000100004>
- PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. An optimization model for the aggregate production planning of a Brazilian sugar and ethanol milling company. **Annals of Operations Research**, v. 169, p. 117-130, 2009. <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-008-0428-9>
- PAIVA, R. P. O.; MORABITO, R. Otimização do planejamento hierárquico da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético. **Produção**, In press.
- SILVA, A. F. **Modelagem do planejamento agregado da produção de uma usina sucroalcooleira**. 2009. 93 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2009.
- TAKRITI, S.; AHMED, S. On robust optimization of two-stage systems. **Mathematical Programming - Serie A**, v. 99, p. 109-126, 2004.
- VLADIMIROU, H.; ZENIOS, S. A. Stochastic linear programs with recourse. **European Journal of Operational Research**, v. 101, n. 1, p. 177-192, 1997. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00370-3](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(95)00370-3)
- YAMASHITA, D. S.; ARMENTANO, V. A.; LAGUNA, M. Robust optimization models for project scheduling with resource availability cost. **Journal of Scheduling**, v. 10, n. 1, p. 67-76, 2007. <http://dx.doi.org/10.1007/s10951-006-0326-4>

Anexo 1 – Modelos PASUC/N1 e PASUC/N2

Índices do modelo PASUC/N1

- u – unidades de produção: usinas cooperadas;
 t – períodos: meses do ano safra;
 p – produtos: produtos/coprodutos da fábrica de açúcar e da destilaria de álcool; e
 e – depósitos: conjunto de depósitos próprios e de terceiros.

Parâmetros do modelo PASUC/N1

- n_{ut} – dias disponíveis para moagem em cada usina u e período t (adimensional);
 φ_{ut} – tempo de moagem aproveitado na usina u durante um período t (%);
 $\theta_{pa,t}$ – melaço obtido por unidade de açúcar pa produzido na usina u (%);
 $Matr_u$ – ATR do mel final na usina u (%);
 $Patr_p$ – ATR correspondente ao produto p (t/t ou m³);
 $Eatr_{ut}$ – eficiência global em ATR na usina u e no período t (%);
 ATR_{ut} – ATR da cana da usina u no mês t (kg ATR/t de cana);
 $Mmin_u$ – moagem mínima da usina u (t/dia);
 $Mmax_u$ – moagem máxima da usina u (t/dia);
 $Emax_{p,e}$ – capacidade máxima de estoque do produto p no depósito e (t ou m³);
 $CPmax_{pu}$ – capacidade de produção diária do produto p na usina u (t ou m³/dia);
 $CFmax_u$ – capacidade diária total de produção da fábrica de açúcar na usina u (t/dia);
 $CDmax_u$ – capacidade diária total de produção da destilaria de álcool na usina u (m³/dia);
 CP_{pu} – custo de produção do produto p na usina u (\$/t ou m³);
 CE_{pe} – custo de estocagem do produto p no depósito e (\$/t ou m³);
 CA – penalização por atraso na entrega da demanda (\$/t ou m³);
 $Dmin_{pt}$ – demanda mínima para o produto p no período t (t ou m³);
 $Dmax_p$ – demanda máxima para o produto p durante todo o ano (t ou m³);
 VP_{pt} – valor líquido do produto p no período t (\$/t ou m³);
 C_{u0} – previsão de moagem de cana para toda a safra da usina u (t);
 I_{pe0} – estoque inicial de cada produto p no depósito e (t ou m³); e
 EP_p – estoque de passagem de safra do produto p (t ou m³).

Variáveis do modelo PASUC/N1

- M_{ut} – quantidade de cana moída na usina u , no período t (t);
 I_{pet}^+ – estoque do produto p , no depósito e , no final do período t (t ou m³);
 I_{pet}^- – atraso na entrega do produto p , no final do período t (t ou m³);
 PU_{put} – produção do produto p , na usina u , no período t (t ou m³); e
 D_{pt} – atendimento da demanda (venda) do produto p , no período t (t ou m³).

Função objetivo e restrições do modelo PASUC/N1

$$\max Z = \left(\sum_t \sum_p VP_{pt} D_{pt} \right) - \left(\sum_t \sum_u \sum_p CP_{pu} PU_{put} + \sum_t \sum_p \sum_e CE_{pe} I_{pet}^+ + \sum_p \sum_t CA \cdot I_{pt}^- \right)$$

$$\sum_e I_{pet}^+ = \sum_e I_{p,e,t-1}^+ + \sum_u PU_{put} - D_{pt} + I_{pt}^- - I_{p,t-1}^- \quad \forall p, t$$

$$D_{pt} \geq Dmin_{pt} \quad \forall p, t$$

$$Dmax_p \geq \sum_t D_{pt} \quad \forall p$$

$$C_{u0} = \sum_t M_{ut} \quad \forall u$$

$$M \min_u \cdot n_{ut} \cdot \phi_{ut} \leq M_{ut} \leq M \max_u \cdot n_{ut} \cdot \phi_{ut} \quad \forall u, t$$

$$I_{pet}^+ \leq E \max_{pe} \quad \forall p, e, t$$

$$\sum_e I_{pe}^+ \geq EP_p; I_{pT}^- = 0 \quad \forall p$$

$$PU_{put} \leq CP \max_{pu} \cdot n_{ut} \quad \forall p, u, t$$

$$\sum_{pa} PU_{pa,u,t} \leq CF \max_u \cdot n_{ut} \quad \forall u, t$$

$$\sum_{pe} PU_{pe,u,t} \leq CD \max_u \cdot n_{ut} \quad \forall u, t$$

$$M_{ut} \cdot ATR_{ut} \cdot Eatr_{ut} / 1000 = \sum_p PU_{put} \cdot Patr_p \quad \forall u, t$$

$$\sum_{pe} PU_{pe,u,t} \cdot Patr_{pe} + \sum_{pm} PU_{pm,u,t} \cdot Matr_u \geq \sum_{pa} PU_{pa,u,t} \cdot \theta_{pa,u} \cdot Matr_u \quad \forall u, t$$

$$M_{ut} \geq 0; I_{pet}^+ \geq 0; I_{pt}^- \geq 0; PU_{put} \geq 0; D_{pt} \geq 0 \quad \forall p, e, u, t$$

A função objetivo acima maximiza a margem de contribuição ao lucro da produção de todos os produtos em todas as usinas e em todos os períodos. As restrições em seguida referem-se, respectivamente: ao balanceamento de estoque de cada produto em cada período; ao atendimento da demanda mínima de cada produto em cada período; à limitação da venda de cada produto na safra ao valor de demanda máxima; à utilização de toda a cana disponível na safra em cada usina, à limitação de moagem de cada usina em cada período; à capacidade máxima de estoque de cada produto em cada depósito e em cada período; à regulação do estoque e atraso de cada produto no último período; às capacidades de produção de cada produto, de todos os produtos da fábrica de açúcar e de todos os produtos da destilaria de etanol, para cada usina em cada período; ao balanceamento de ATR para cada usina em cada período; à utilização do melaço produzido como coproduto da fábrica de açúcar na destilaria anexa de cada usina em cada período; aos domínios das variáveis do modelo.

Índices do modelo PASUC/N2

k – processos dentro da fábrica;

t – períodos: semanas de safra que indicam o início e o final da moagem;

p – produtos: produtos/coprodutos que podem ser produzidos pela usina;

m – matérias-primas: contratos de fornecimento de cana; e

f – frota: contratos de veículos para transporte de cana.

Parâmetros do modelo PASUC/N2

$ConvA_{pa}^{CRPAAA}$ – conversão de açúcares pa em cristal *Standard* (adimensional);

$ConvE_{pe}^{CRPAAA}$ – conversão dos alcoóis pe em AEAC (adimensional);

$Matr_{USC}$ – ATR do mel final na USC (%);

n_t – dias disponíveis para moagem em cada período t (adimensional);

φ_t – tempo de moagem aproveitado durante um período t (%);
 $Patr_p$ – ATR correspondente ao produto p (t/t ou m³);
 ATR_t – ATR da cana no período t (kg ATR/t de cana)
 $Mmin$ – moagem mínima da usina (t/dia);
 $Mmax$ – moagem máxima da usina (t/dia);
 $Fmax_f$ – capacidade máxima de transporte de cana pelos caminhões da frota f (t/dia);
 $CPmax_p$ – capacidade de produção diária do produto p (t ou m³/dia);
 $CFmax$ – capacidade diária total de produção da fábrica de açúcar (t/dia);
 $CDmax$ – capacidade diária total de produção da destilaria de álcool (m³/dia);
 α_t – percentual máximo de cana de fornecedores por período t (%);
 β_{ft} – disponibilidade para transporte dos caminhões da frota f , no período t (%);
 CF_{ft} – custo de corte, carregamento e transporte pela frota f , no período t (\$/t);
 CA – penalização por atraso na entrega da demanda (\$/t ou m³);
 $Gfixo$ – gasto fixo médio em um período t (\$);
 GK_{kt} – gastos variáveis na indústria por processo k , no período t (\$);
 GM_{mt} – gastos variáveis por tipo de matéria-prima m , no período t (\$);
 GF_{ft} – gastos variáveis por tipo de frota f , no período t (\$);
 $Giro_0$ – saldo de caixa inicial da empresa (\$);
 RCa_p – adiantamento da CPRAAA pela produção do produto p , no período t (\$/t ou m³);
 RCb – adiantamento da CPRAAA pelo ATR equivalente produzido (\$/kg de ATR);
 RCc_t – adiantamento extra da CPRAAA obtido no período t (\$/sem);
 C_0 – previsão de moagem de cana para toda a safra (t);
 $Disp_t$ – parâmetro limitante para o total de cana própria disponível no período t (t);
 G – número suficientemente grande (adimensional);
 Ib_0 – estoque inicial de bagaço (t);
 $Fibra_{mt}$ – fibra da cana tipo m , no período t (%);
 Ub_t – umidade do bagaço após a moenda, no período t (%);
 Eb – percentual mínimo de estoque do bagaço produzido (%);
 EPb – estoque de bagaço para passagem de safra (t);
 RC – rendimento médio das caldeiras (t vapor/t bagaço);
 RCF – rendimento médio da casa de força (MWh/t vapor);
 $CFVAP$ – consumo fixo de vapor na moagem (t de vapor/t de cana);
 $CVAP_p$ – consumo variável de vapor servido em cada produto p (t vapor/t ou m³);
 CFE – consumo fixo de energia na moagem (MWh/t de cana);
 CVE_p – consumo variável de energia em cada produto p e processo k (MWh/t ou m³);
 $VAPmax$ – produção diária máxima de vapor (t/dia);
 $EGmax$ – geração diária máxima de energia (MWh/dia); e
 VE – valor da energia vendida (\$/MWh).

Variáveis do modelo PASUC/N2

X_{kt} – decisão de utilizar ($X_{kt} = 1$) ou não ($X_{kt} = 0$) o processo k no período t ;
 M_t – quantidade de cana moída no período t (t);
 M'_{mt} – quantidade de cana colhida em cada fornecedor m , no período t (t);
 M''_{ft} – quantidade de cana transportada pelo tipo de transporte f , no período t (t);
 M'''_{kt} – quantidade de cana moída pelo processo k , no período t (t);
 C_{mt} – quantidade de cana disponível para colheita por matéria-prima m , no período t (t);
 S_t – quantidade de capital disponível para giro financeiro no período t (\$);
 F_{pt} – atraso no atendimento da demanda do produto p , no período t (t ou m³);
 Ib_t – estoque de bagaço para geração de energia no período t (t);
 Mb_t – quantidade de bagaço consumido para geração de vapor no período t (t);
 VAP_t – quantidade de vapor produzido no período t (t);
 EG_t – quantidade de energia produzida no período t (MWh); e
 EE_t – quantidade de energia exportada no período t (MWh).

Função objetivo e restrições do modelo PASUC/N2

$$\max Z = \sum_t \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{pa} \left(A_{pa,k,t} M'''_{kt} ConvA_{pa}^{CRPAAA} / ProdA \right) RecA + \right. \\ & \left. \sum_k \left(A_{pe,k,t} M'''_{kt} ConvE_{pe}^{CRPAAA} / Prode \right) RecE + \right. \\ & \left. \sum_{pm} \left(A_{pm,k,t} M'''_{kt} Matr_{USC} / ProdM \right) RecM \right) \\ & + EE_t VE - \left(\sum_m CM_{mt} M'_{mt} + \sum_f CF_{ft} M''_{ft} + \sum_k CK_{kt} M'''_{kt} + CA \sum_p I^-_{pt} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\sum_{t=1}^{t'} \sum_k A_{pkt} \cdot M'''_{kt} + I^-_{pt'} \geq \sum_{t=1}^{t'} Meta_{pt} \quad \forall p, t'$$

$$\sum_m M'_{mt} = \sum_f M''_{ft} = \sum_k M'''_{kt} = M_t \quad \forall t$$

$$C_{mt} = C_{m,t-1} - M'_{m,t-1} \geq M'_{mt} \quad \forall m, t$$

$$\sum_m C_{m0} = \sum_t \sum_m M'_{mt}$$

$$\sum_{mp} C_{mp,t} \leq Disp_t \quad \forall t$$

$$\sum_{mf} M'_{mf,t} \leq \alpha_t \cdot M_t \quad \forall t$$

$$M \min \cdot n_t \cdot \varphi_t \leq M_t \leq M \max \cdot n_t \cdot \varphi_t \quad \forall t$$

$$S_t = S_{t-1} + \left(\sum_p \sum_k (RCa_p + Patr_p RCb) A_{pkt} M'''_{kt} \right) - \left(\sum_m GM_{mt} M'_{mt} + \sum_f GF_{ft} M''_{ft} \right) + RCC_t - \left(\sum_k GK_{kt} M'''_{kt} + Gfixo \right) \quad \forall t$$

$$M''_{ft} \leq Fmax_f \cdot n_t \cdot \beta_{ft} \quad \forall f, t$$

$$\sum_k A_{pkt} \cdot M'''_{kt} \leq CPmax_p \cdot n_t \quad \forall p, t$$

$$\sum_{pa} \sum_k A_{pa,k,t} \cdot M'''_{kt} \leq CFMax \cdot n_t \quad \forall t$$

$$\sum_{pe} \sum_k A_{pe,k,t} \cdot M'''_{kt} \leq CDMax \cdot n_t \quad \forall t$$

$$\sum_k X_{kt} = 1 \quad \forall t$$

$$M'''_{kt} \leq G \cdot X_{kt} \quad \forall k, t$$

$$Ib_t = Ib_{t-1} + \sum_m (M'_{mt} \text{Fibra}_{mt} / (1 - UB_t)) - Mb_t \geq \sum_m (M'_{mt} \text{Fibra}_{mt} / (1 - UB_t)) \cdot EB \quad \forall t$$

$$Ib_{T'} \geq EPb$$

$$Ib_t = Ib_{t-1} + \sum_m (M'_{mt} \text{Fibra}_{mt} / (1 - UB_t)) - Mb_t \geq \sum_m (M'_{mt} \text{Fibra}_{mt} / (1 - UB_t)) \cdot EB \quad \forall t$$

$$VAPMax \cdot n_t \geq Mb_t \cdot RC = VAP_t \geq \sum_k M'''_{kt} \cdot CFVAP + EG_t / RCF \geq \sum_k \sum_p CVAP_p \cdot A_{pkt} \cdot M'''_{kt} \quad \forall t$$

$$EG_t = EE_t + \left(\sum_k CFE \cdot M'''_{kt} + \sum_k \sum_p CVE_p \cdot A_{pkt} \cdot M'''_{kt} \right) \leq EGMax \cdot n_t \quad \forall t$$

$$X_{kt} \in \{0, 1\}; M_t \geq 0; M'_{mt} \geq 0; M''_{ft} \geq 0; M'''_{kt} \geq 0; C_{mt} \geq 0; I_{pt}^- \geq 0;$$

$$S_t \geq 0; Ib_t \geq 0; Mb_t \geq 0; VAP_t \geq 0; EG_t \geq 0; EE_t \geq 0 \quad \forall k, m, f, p, t$$

A função objetivo acima maximiza a margem de contribuição da produção dos produtos por meio dos processos, da matéria-prima e do tipo de transporte da matéria-prima, em todos os períodos. As restrições em seguida referem-se respectivamente: ao atendimento da meta de produção acumulada de todos os produtos até certo período; às compatibilidades entre a quantidade de cana colhida, quantidade de cana transportada, quantidade de cana por processo e quantidade de cana moída em todos os períodos; à disponibilidade de cana de cada tipo no início de cada período; à utilização de toda cana disponível para colheita de cada tipo de cana; ao controle de quantidade de cana própria disponível em cada período; ao percentual de cana de fornecedor da cana processada em cada período; à limitação de moagem em cada período; ao balanceamento do saldo financeiro em cada período; à capacidade de transporte de cada frota em cada período; às capacidades de produção de cada produto, de todos os produtos da fábrica de açúcar e de todos os produtos da destilaria de etanol em cada período; à utilização de apenas um processo por período; à determinação em cada período de que a quantidade de cana por processo seja nula sempre que o processo equivalente não esteja sendo utilizado; ao balanceamento de estoque de bagaço em cada período; ao estoque de segurança de bagaço em cada período; ao estoque mínimo de passagem de bagaço no último período de safra; à produção de vapor de acordo com a quantidade de bagaço consumido em cada período; ao balanço de vapor de alta e baixa pressão de toda a planta industrial em cada período; à quantidade de energia excedente que pode ser comercializada em cada período; à capacidade de produção de vapor e energia elétrica em cada período; aos domínios das variáveis de decisão.