

## UMA ABORDAGEM ESTATÍSTICA PARA A PREVISÃO DE POTÊNCIA REATIVA EM SISTEMAS ELÉTRICOS

**Eliane da Silva Christo \***

**Reinaldo Castro Souza**

Departamento de Engenharia Elétrica

Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio)

Rio de Janeiro – RJ

[eliane@ele.puc-rio.br](mailto:eliane@ele.puc-rio.br); [reinaldo@ele.puc-rio.br](mailto:reinaldo@ele.puc-rio.br)

\* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

*Recebido em 03/2005; aceito em 03/2006 após 1 revisão*

*Received March 2005; accepted March 2006 after one revision*

### Resumo

As previsões das potências ativa e reativa se constituem numa ferramenta de extremo valor na monitoração de Sistemas de Energia Elétrica. Com base nisso, este trabalho tem por objetivo, apresentar uma nova técnica de previsão horária de potência reativa a curto prazo, por subestação, baseado na linearidade existente entre as potências ativa e reativa, ou seja, a potência reativa pode ser explicada diretamente pela potência ativa através de uma regressão linear. A fim de melhorar o desempenho da previsão, são incorporadas ao modelo simples, variáveis defasadas das potências acopladas a uma correção para autocorrelação serial (Método Iterativo de Cochrane-Orcutt). E, além disso, como os dados de potência reativa apresentam comportamento heterocedástico, o método de estimação dos coeficientes do modelo por mínimos quadrados não se mostra adequado, por isso, foi utilizada uma solução robusta conhecida como mínimos quadrados ponderados iterativamente (IRLS). A previsão de potência reativa a curto-prazo é dividida em “*in sample*” e “*out of sample*”, onde esta é aplicada a períodos horários em até um mês à frente. Com intuito de aumentar a precisão dos resultados, os dados são classificados através de uma rede neural não supervisionada conhecida como mapas auto-organizáveis de Kohonen (SOM).

**Palavras-chave:** mínimos quadrados ponderados iterativamente; potência reativa; mapas auto-organizáveis de Kohonen.

### Abstract

The forecasting of reactive and active power is an important tool in the monitoring of an Electrical Energy Systems. The present work has as main purpose the introduction of a new short-term reactive power hourly forecast technique by substations, based on the linearity between reactive and active power through linear regression. In order to improve the forecasting, distributed lags of powers are included in the simple model with a correction for serial autocorrelation (Iterative Method of Cochrane-Orcutt). Moreover as reactive power data have heterocedasticity behavior, the estimation method of the coefficients through least squares is not appropriate. For that reason, it is used a robust solution known as Iteratively Reweighted Least Squares Estimation (IRLS). The short-term reactive power forecast is divided two periods “*in sample*” and “*out of sample*”. In order to increase the forecast results, it is necessary to reduce the sample dimension using a methodology to cluster of data. These clusters are classified via an unsupervised learning neural network Kohonen Self-Organized Map.

**Keywords:** iteratively reweighted least squares; reactive power; Kohonen self-organized map.

## 1. Introdução

A previsão de carga é um assunto de grande interesse para as áreas de Planejamento da Expansão e Planejamento da Operação de Sistemas Elétricos de Potência, como uma contribuição para um melhor desempenho do sistema elétrico (estabilidade e regime permanente).

Além de prever a potência ativa do sistema, que corresponde à maioria dos modelos desenvolvidos até momento, há uma necessidade de controlar a tensão nas barras de carga que representam as subestações nas quais estão conectados os sistemas de distribuição. E conseqüentemente manter dentro de certos limites aceitáveis as instalações consumidoras durante os períodos de operação normal e emergência do sistema.

A partir disso, surge a preocupação com o controle de reativos, os quais são os maiores responsáveis pelos valores assumidos pelas tensões nos diferentes pontos de um sistema de energia. Diversos procedimentos podem ser adotados para a correção dos perfis de tensões nos Sistemas de Energia Elétrica, como: conexão de compensadores e reatores estáticos, uso de transformadores com *taps* variáveis, uso de compensadores síncronos rotativos e ainda o controle da excitação dos geradores, sendo que a escolha de um deles depende das disponibilidades do sistema e das capacidades dos próprios equipamentos (Abreu & Vilela, 2001).

Conclui-se, portanto que o conhecimento prévio, em qualquer instante, dos valores aproximados de potência reativa requerida pelo sistema ou pelas barras de carga tem uma grande importância. A previsão da potência reativa em conjunto com a previsão da demanda se constituem numa ferramenta de extremo valor na monitoração de Sistemas de Energia Elétrica.

Contudo, é de suma importância desenvolver novas técnicas que estimem valores futuros, a curto e longo-prazos, das potências ativa e reativa. Uma hipótese simplificadora seria supor que o fator de potência da carga se manterá no futuro e a partir deste fato elaborar uma previsão de demanda reativa. Os estudos de dados de medição mostraram que tal hipótese pode induzir a erros quando se busca uma curva horária de demanda reativa, principalmente nos horários de transição entre os patamares de carga (leve-média-pesada).

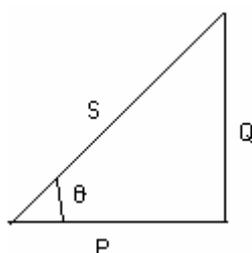
Com base nisso, este estudo tem por objetivo, apresentar uma nova técnica de previsão horária de potência reativa a curto prazo, por subestação, baseado na linearidade existente entre as potências ativa e reativa, ou seja, a potência reativa pode ser explicada diretamente pela potência ativa através de uma regressão linear simples (Christo *et al.*, 2002). Porém, a fim de melhorar o desempenho da previsão, são incorporadas ao modelo de regressão simples, variáveis atuais e defasadas das potências ativa e reativa, associando, uma correção para uma eventual autocorrelação serial dos erros (Método Iterativo de Cochrane-Orcutt). E, além disso, como os dados de potência reativa apresentam comportamento heterocedástico, o método de estimação dos coeficientes por Mínimos Quadrados não se mostra adequado, por isso, é utilizada uma solução robusta conhecida como Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente (IRLS).

A previsão da carga reativa a curto-prazo é dividida em “*in sample*” e “*out of sample*”. A previsão “*out of sample*” é aplicada a períodos horários em até um mês à frente. Com intuito de aumentar a precisão dos resultados, os dados são agrupados conforme as semelhanças de consumo de energia entre os meses e dias da semana, com isso, reduzem-se os efeitos de sazonalidade existentes. A metodologia de agrupamento escolhida foi uma rede neural não supervisionada Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen (SOM), pois segundo Hippert *et al.* (2004), este tipo de método é muito comum em análises de séries temporais de potência por apresentar maior robustez nos resultados.

A modelagem proposta é dividida em duas etapas. A primeira é formada pela metodologia de agrupamento dos dados, e a segunda é composta pelo modelo proposto, Modelo de Regressão Dinâmica Robusta. A aplicação é feita nos dados de uma subestação de uma concessionária de Energia Elétrica do Sudeste brasileiro e comparado ao modelo de Regressão Dinâmica convencional e ao modelo de Redes Neurais Artificiais supervisionada (“backpropagation”).

## 2. Potência Reativa

As potências ativas (P) e reativas (Q) possuem uma relação geométrica entre elas. Na verdade, a potência reativa depende linearmente da potência ativa através da tangente do ângulo ( $\theta$ ) entre a potência aparente (S) e a potência ativa. A potência aparente é representada pela soma vetorial das demais. O conjunto forma o que se denomina de Triângulo de Potência (Figura 1).



**Figura 1** – Triângulo de potência.

O valor  $\cos \theta$  é definido como Fator de Potência, que corresponde à relação entre a potência ativa e a potência aparente. Quanto menor for este ângulo, menor será a componente reativa do sistema, e tanto mais o fator de potência irá se aproximar do valor unitário.

A ocorrência de energia reativa em circuitos elétricos sobrecarrega as instalações, ocupando uma capacidade de condução de corrente que poderia ser mais bem aproveitada para realizar trabalho útil. Isto é válido tanto para a concessionária que entrega energia elétrica ao consumidor como também para o próprio consumidor em seus circuitos de distribuição.

Quando o ângulo  $\theta$  é grande aumenta a corrente, havendo, portanto, uma maior perda na linha de transmissão o que, obriga a concessionária a instalar e manter capacitores na geração e nas subestações das linhas de transmissão objetivando diminuir estas perdas.

As concessionárias estipulam o fator de potência maior possível para incentivar a correção, adotando a seguinte fórmula para cobrança:

$$x = 0,92 * \text{Preço(kWh)} / \cos \theta \quad (1)$$

onde x é um fator de cobrança.

Fazendo uma inspeção na expressão (1), comprova-se que quando o usuário consegue corrigir o fator de potência para um valor maior do que 0,92 ele pagará menos, enquanto que se o fator de potência desse consumidor permanece menor do que 0,92 ele pagará mais.

Esta regra faz com que o conhecimento das potências ativas e reativas futuras seja necessário para controlar e equilibrar o fornecimento e a demanda das mesmas, ou seja, gerar uma harmonia entre cliente e concessionária.

### 3. Modelagem Proposta

A modelagem proposta para previsão de potência reativa, consiste de duas etapas:

- 1ª Etapa – Classificação dos dados de potência reativa e ativa por subestação, através do método não supervisionado Mapa Auto-Organizável de Kohonen;
- 2ª Etapa – Aplicação do Modelo de Regressão Dinâmica Robusta Proposto (RDR) em cada grupo obtido na etapa anterior.

Cada etapa do processo de modelagem de previsão de potência reativa é apresentada a seguir.

#### 3.1 Agrupamento dos dados

Para reduzir o tamanho da amostra com intuito de aumentar a precisão dos resultados, será utilizada uma metodologia para agrupamento dos dados. Diante de resultados satisfatórios em aplicações de potência ativa (Hippert, 2004), a ferramenta escolhida aqui será uma rede neural não supervisionada, também conhecida como Mapa Auto-Organizável de Kohonen (SOM).

Uma rede neural artificial é um processador distribuído que possui capacidade de armazenar conhecimento experimental e capacidade de disponibilizar conhecimento para uso prático (Haykin, 1999).

O Mapa Auto-Organizável produz um ajuste seletivo dos neurônios criando um mapa topográfico dos padrões de entrada. Ainda que esta técnica não tenha sido originalmente concebida para classificação de padrões ou segmentação, é possível tirar-se grande proveito das suas propriedades de auto-organização para tais aplicações (Kohonen, 2000).

O objetivo básico dos Mapas de Kohonen é agrupar  $m$  elementos de um conjunto de padrões de entrada,  $X$ , em  $J$  neurônios, ou seja, projeta-se o espaço de entrada em um espaço de menor dimensão (normalmente bidimensional). A “comunicação” entre os ambientes de entrada (subespaço natural dos padrões de entrada) e o de saída do algoritmo (malha) é feita por protótipos, ou seja, a cada neurônio no espaço de saída corresponde um vetor-peso que pode ser visto como um protótipo de características do espaço original.

Também, a título de comparação de resultados no final do trabalho, será utilizada uma rede neural com treinamento supervisionado, que implica na apresentação de vários vetores de entrada e saída correspondentes aos valores desejados, até que o erro alcance um nível satisfatório. Dentre os algoritmos de treinamento supervisionado encontramos o de retropropagação dos erros (“*backpropagation*”), usado neste trabalho para comparação.

O treinamento não-supervisionado usado nos Mapas de Kohonen não requer vetor de saída; o sistema extrai as características do conjunto de padrões, agrupando-os em classes. Desta forma, o treinamento não-supervisionado se aplica apenas a problemas de agrupamentos e otimização, enquanto o treinamento supervisionado é mais genérico, podendo ser empregado em previsões de séries temporais.

### 3.2 Modelo de Regressão Linear

Um modelo de Regressão Linear Simples pode ser extraído do triângulo de potência (Figura 1) apresentado na equação 2. Isto é, o coeficiente angular representa a tangente do ângulo entre as cargas ativa e reativa, que, através de uma geometria simples, calcula-se o fator de potência (cosseno do ângulo entre elas) da carga, e o coeficiente linear representa a potência reativa devido aos compensadores (fixos e/ou síncronos) instalados no sistema. Este modelo é escrito da seguinte forma (Civanlar, 1988):

$$Y_t' = \tan(\theta)X_t + u_t \quad (2)$$

$$Y_t = Y_t' - (c_0 + c_t) \quad (3)$$

substituindo (2) em (3), temos:

$$Y_t = -(c_0 + c_t) + \tan(\theta)X_t + u_t$$

onde

$Y_t$ : potência reativa no instante  $t$ ;

$X_t$ : potência ativa no instante  $t$ ;

$c_0$ : potência reativa devido aos capacitores fixos (*shunt*);

$c_t$ : potência reativa devido aos capacitores síncronos (*switched*);

$\tan(\theta)$ : tangente do ângulo entre as potências ativa e reativa;

$u_t$ : erro aleatório no instante  $t$ .

O termo  $c_t$  pode ser expresso em termos de cada capacitor individualmente da seguinte forma:

$$c_t = \sum_{i=1}^{n_s} I_{ci} B_{t,i} \quad B_{t,i} = \{0 \text{ ou } 1\} \quad (4)$$

onde

$I_{ci}$ : o índice KVAR do  $i$ -ésimo capacitor do alimentador;

$B_{t,i}$ : indica as posições ON/OFF do  $i$ -ésimo capacitor síncrono no tempo  $t$ ;

$n_s$ : o número de capacitores síncronos.

Para este estudo, não se dispõem dos dados de potência reativa devido aos compensadores instalados no sistema, o que se tem são os valores médios anuais. Deste modo, não foi possível uma comparação precisa dos coeficientes estimados com os dados reais de carga.

Este modelo de regressão linear simples que agrega as próprias características das potências ativa e reativa não se mostra eficiente quando se trata de previsão de potência reativa. O que leva a crer que a potência reativa não pode ser explicada somente através da potência ativa no mesmo instante, outras variáveis explicativas devem ser incluídas no modelo. Ou seja, como a potência reativa se trata de uma série temporal, a previsão se torna mais precisa na presença de um modelo autorregressivo. Então, torna-se interessante uma descrição deste tipo de modelo, o qual será abordado no próximo item.

### 3.3 Modelo Híbrido Proposto

O modelo híbrido proposto, chamado de Modelo de Regressão Dinâmica Robusta (RDR), parte do princípio que na explicação da potência reativa horária são necessários dados históricos das mesmas e da potência ativa. Com isso, na estimação dos parâmetros, a correlação entre as variáveis explicativas deve ser considerada, já que se trata de um estudo de séries temporais.

As análises são feitas para cada grupo formado pela classificação dos dados de reativa. Ou seja, modelos diferentes são utilizados para grupos diferentes. Ainda sim, a metodologia de estimação proposta é desenvolvida para cada caso. De maneira geral, o modelo de regressão proposto é dado por:

$$\begin{cases} y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} \beta_{ji} x_{jt-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + u_t \end{cases} \quad (5)$$

onde:

$y_t$ : potência reativa no instante  $t$ ;

$x_t$ : potência ativa no instante  $t$ ;

$y_{t-i}$ : potência reativa no instante  $t-i$ ;

$x_{jt-i}$ : potência ativa da  $j$ -ésima variável independente no instante  $t-i$ ;

$\beta_0$ : constante;

$\beta_{ji}$ : coeficiente da  $j$ -ésima variável independente na defasagem  $i$ ;

$k$ : quantidade de variáveis independentes;

$\phi_i$ : coeficiente da variável dependente na defasagem  $i$ ;

$q_j$ : ordem de defasagem da  $j$ -ésima variável independente;

$p$ : ordem de defasagem da variável dependente;

$u_t$ : erro correlacionado.

A equação (5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi(B)Y_t &= \alpha + \beta(B)X_t + u_t \\ B^k U_t &= U_{t-k} \end{aligned} \quad (6)$$

onde:

$Y_t$ : Variável dependente no instante  $t$ ;

$X_t$ : Variável independente no instante  $t$ ;

$\beta(B)$ :  $1 - \beta_1 B \dots \beta_{p_j} B^{p_j}$  polinômio AR( $p_j$ ) das variáveis independente;

$\phi(B)$ :  $1 - \phi_1 B \dots \phi_p B^p$  polinômio AR( $p$ );

$\alpha$ : constante;

$u_t$ : ruído aleatório associado ao modelo, onde se supõem que são independentes e identicamente distribuídos com densidade  $N(0, \sigma^2)$ ;

$B$ : operador de atraso.

Para estimar os coeficientes com maior precisão, a metodologia utilizada é o algoritmo de mínimos quadrados ponderados iterativamente [com função de peso do tipo Biquadrada (Tabela 1)] – que apresentou melhor resultado – associado a uma correção de autocorrelação Cochran-Orcutt. Esse modelo atribui pesos à observação de acordo com o valor do seu resíduo. Os pesos são posteriormente utilizados para diminuir a influência da observação e revisados após cada iteração até que um ajuste robusto seja encontrado (Neter *et al.*, 1996) tanto para os coeficientes da regressão quanto para o coeficiente dos resíduos, visto que, eles possuem correlação de primeira ordem.

**Tabela 1** – Função peso Biquadrada.

Método	Função Objetivo	Função Peso
Biquadrada	$\rho_B(e) = \begin{cases} \frac{k^2}{6} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{e}{k} \right)^2 \right]^3 \right\} & \text{se }  e  \leq k \\ \frac{k^2}{6} & \text{se }  e  > k = 4.685 \end{cases}$	$\varpi_B(e) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{e}{k} \right)^2 \right]^2 & \text{se }  e  \leq k \\ 0 & \text{se }  e  > k = 4.685 \end{cases}$

O algoritmo implementado no software *Matlab* é apresentado a seguir:

1. Considerar, inicialmente,  $r_i=0$ ;  $i=1,2,\dots,r$ .
2. Estimar  $\mathbf{b}^{(0)}$ , inicialmente por mínimos quadrados.
3. Calcular os resíduos  $u_i^{(t-1)}$  e os pesos associados  $w_i^{(t-1)} = w[u_i^{(t-1)}]$ . A cada iteração  $t$ .
4. Calcular as novas estimativas de  $\mathbf{b}^{(t)}$  por mínimos quadrados ponderados

$$\mathbf{b}^{(t)} = \left[ \mathbf{X}' \mathbf{W}^{(t-1)} \mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}^{(t-1)} \mathbf{y}_t$$

onde  $\mathbf{X}$  é a matriz cujas colunas representam a constante, a variável exógena nos instantes  $t-i$ , e a variável dependente nos instante  $t-i$ , e  $\mathbf{W}^{(t-1)} = \text{diag}\{w_i^{(t-1)}\}$  é a matriz peso.

5. Calcular os resíduos  $u_t = y_t - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_{ji} x_{jt-i} - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i}$ .
6. Analisar a autocorrelação de primeira ordem dos resíduos através do teste Durbin.
7. Estimar  $\mathbf{r}^{(0)}$ , inicialmente, por mínimos quadrados.
8. Calcular os resíduos  $\varepsilon_i^{(t-1)}$  e os pesos associados  $w_{i1}^{(t-1)} = w_1[\varepsilon_i^{(t-1)}]$ . A cada iteração  $t$ .
9. Calcular as novas estimativas de  $\mathbf{r}^{(t)}$  por mínimos quadrados ponderados

$$\mathbf{r}^{(t)} = \left[ \mathbf{U}_{t-1}' \mathbf{W}_1^{(t-1)} \mathbf{U}_{t-1} \right]^{-1} \mathbf{U}_{t-1}' \mathbf{W}_1^{(t-1)} \mathbf{u}_t$$

onde  $\mathbf{U}_{t-1}$  é a matriz dos resíduos no instante  $t-1$ ,  $u_i$  a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{U}(\mathbf{u}_i)$ , e  $\mathbf{W}_1^{(t-1)} = \text{diag}\{w_{i1}^{(t-1)}\}$  é a matriz peso.

10. Calcular os valores transformados  $Y_t^* = R(B) Y_t$  e  $X_t^* = R(B) X_t$ .
11. Estimar  $\mathbf{b}^{*(0)}$ , inicialmente, por mínimos quadrados.
12. Calcular os resíduos  $u_i^{*(t-1)}$  e os pesos associados  $w_i^{*(t-1)} = w^*[u_i^{*(t-1)}]$ . A cada iteração  $t$ .
13. Calcular as novas estimativas de  $\mathbf{b}^{*(t)}$  por mínimos quadrados ponderados
 
$$\mathbf{b}^{*(t)} = \left[ X^{*'} W^{*(t-1)} X^* \right]^{-1} X^{*'} W^{*(t-1)} y_t^*$$
 onde  $X^*$  é a matriz cujas colunas representam os valores transformados da constante, das variáveis exógenas nos instantes  $t-i$ , e das variáveis dependentes nos instantes  $t-i$ .  $W^{*(t-1)} = \text{diag}\{w_i^{*(t-1)}\}$  é a matriz peso.
14. Substituir os valores dos  $\beta^*$  obtidos na regressão original (5) e calcular os novos resíduos.
15. Repetir os passos 7 a 14 até a convergência dos coeficientes  $\mathbf{r}_i^* \mathbf{s}, \beta^* \mathbf{s}$ .

Como o Modelo Híbrido Proposto utiliza conceitos de regressão dinâmica e, principalmente, o método de estimação dos parâmetros por mínimos quadrados reponderados iterativamente, estas questões são definidas mais detalhadamente nos próximos itens.

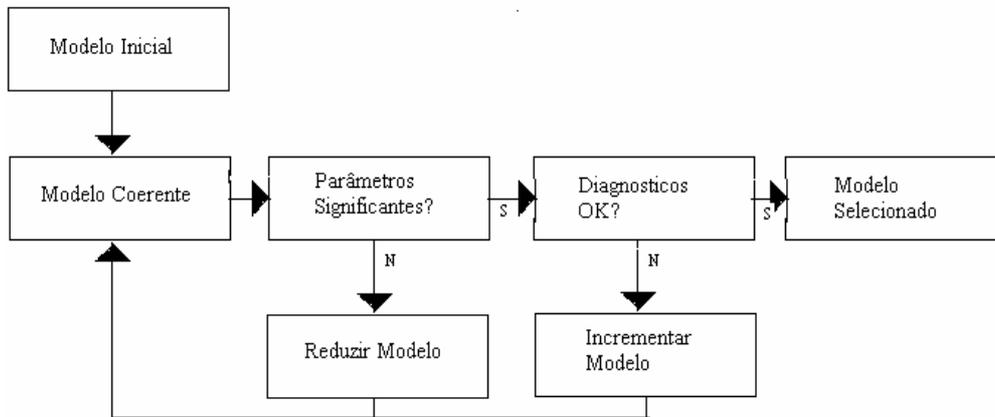
### 3.4 Especificação do Modelo Dinâmico

Muitas vezes, a elaboração de um modelo de regressão dinâmica é um procedimento difícil, pois precisa escolher não apenas as variáveis a serem incluídas no modelo, mas também os “lags” (defasagens) destas variáveis.

Na definição do modelo adequado é necessário levar em conta não só a significância dos parâmetros, mas também uma certa estrutura “lógica” do modelo. Em resumo, a escolha de um modelo de regressão não é necessária apenas encontrar um ajuste de parâmetros de adequado, também é necessário verificar se os coeficientes estimados são coerentes.

A estratégia usualmente empregada para construir um modelo de regressão dinâmica é uma estratégia “bottom-up”, isto é, parte-se de um modelo simples e refina-o incluindo novas variáveis até encontrar um modelo apropriado.

O fluxograma (Figura 2) indica, de maneira genérica, os passos usados na construção de um modelo de regressão dinâmica.



**Figura 2** – Fluxograma da construção de um modelo de regressão dinâmica.

A especificação correta de um modelo de regressão envolve uma precisa especificação de ambas a relação causal entre as variáveis e da estrutura dinâmica do modelo. Como comprovação estatística, é utilizado o Teste com Multiplicador de Lagrange (LM) para avaliar.

A adição de variáveis, dada pela expressão a seguir, tem como distribuição assintótica uma Qui-Quadrado com  $k$  graus de liberdade.

$$LM = T.S'(\theta_0).I^{-1}.S(\theta_0) \quad (7)$$

$$S(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial(\theta)}$$

onde

$S(\theta_0)$  = o escore sob hipótese nula;

$l(\theta)$  = logaritmo da função de verossimilhança;

$I^{-1}$  = a inversa da matriz de informação de Fisher;

$T$  = número de observações na série.

O “score” mede a inclinação da log-verossimilhança, e a estatística LM calcula a taxa de crescimento da log-verossimilhança quando se afasta da hipótese nula.

O teste LM é de mais fácil aplicação, pois não envolve o cálculo da log-verossimilhança sob a hipótese alternativa.

Alguns outros testes estatísticos são necessários para que o modelo híbrido de previsão de reativo tenha um desempenho favorável. Foram escolhidos alguns testes estatísticos dentre os existentes para medir normalidade (Kolmogorov Smirnov), homocedasticidade (Levene) e autocorrelação dos erros (Durbin e Durbin-Watson). Todos são considerados com nível de significância de 5%.

#### 4. Algoritmo Conjunto

Figura 3 mostra o algoritmo do Modelo Híbrido de Previsão de Reativo proposto. Este algoritmo foi implementado no software MATLAB 6.0.

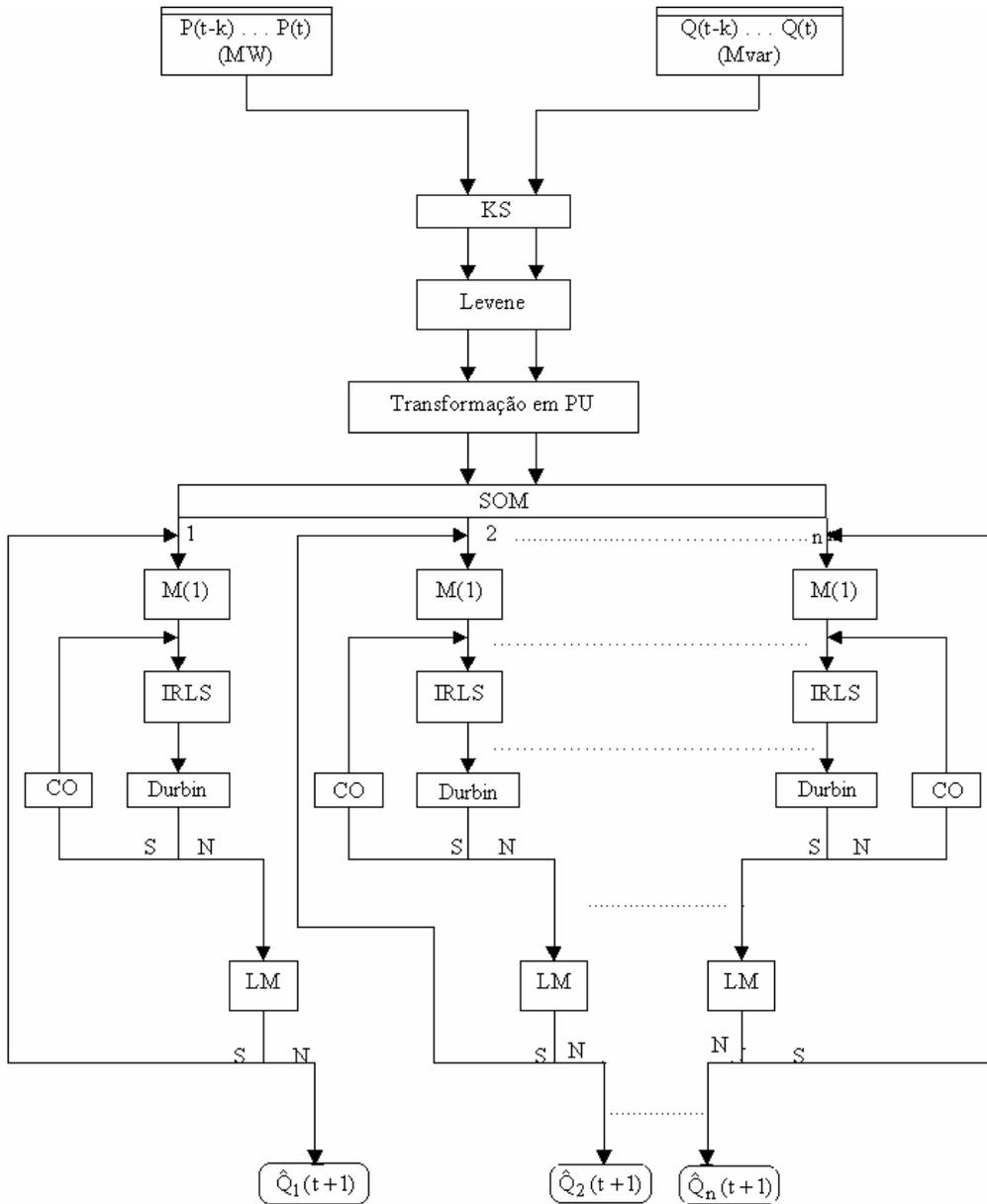


Figura 3 – Algoritmo Conjunto.

Onde

$P(t)$  = potência ativa em MW;

$Q(t)$  = potência reativa em Mvar;

KS = Kolmogorov Smirnov;

SOM = Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen;

$M(1)$  = modelo inicial;

IRLS = mínimos quadrados reponderados iterativamente;

CO = Cochrane-Orcutt;

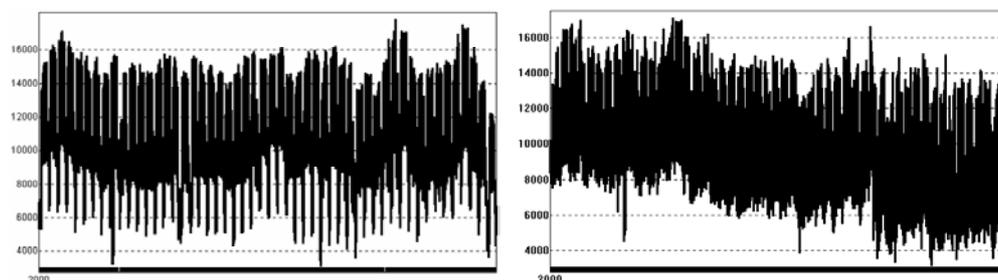
LM = multiplicador de Lagrange;

$\hat{Q}_i(t+1)$  = potência reativa prevista no instante  $t+1$ .

## 5. Análises dos Resultados

O modelo proposto é aplicado aos dados de potência ativa e reativa do ano de 2000 de duas subestações SUB 1 e SUB 2 da concessionária de energia elétrica do Sudeste brasileiro.

A série de potência reativa não tem um comportamento estatisticamente bem definido, porém algumas subestações (com pouca presença de capacitores síncronos) podem apresentar um comportamento satisfatório. Isto se comprova na Figura 4a, onde a série apresentada tem um perfil estacionário na média, porém com bastante volatilidade.



**Figura 4** – Perfil de carga reativa em KVar no ano 2000, subestações: a) SUB 1 e b) SUB 2.

Já a Figura 4b, apresenta o perfil de uma subestação com presença forte de compensadores fixos e síncronos, o que acarreta um comportamento heterocedástico – variância não constante, exigindo um modelo mais robusto para uma previsão precisa.

Na etapa I do modelo, os dados das subestações SUB 1 e SUB 2 são reunidos em 6 grupos (“verão”/“inverno”; fim de semana / dia útil; dia útil com segunda-feira / dia útil sem segunda-feira). O período considerado “verão” equivale aos meses de Janeiro, Fevereiro, Outubro, Novembro e Dezembro. Já o período denominado “inverno” constitui os meses de Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Setembro. Para este trabalho foram considerados dos dias úteis sem segunda-feira somente por motivo de teste inicial.

No período “verão” tem 81 dados, sendo os dias úteis excluindo as 2<sup>as</sup> feiras, então 65 dados estão “in sample” e “16 out of sample”, correspondendo ao mês de Dezembro. Enquanto que,

no período “inverno” são 112 dados com 97 dados “in sample” e 15 dados “out of sample”, que corresponde ao mês de Setembro, também dias úteis excluindo as 2ª feiras.

Poderia-se utilizar variáveis *dummy* como variáveis exógenas para designar os períodos encontrado no agrupamento dos Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen (SOM), como feito em Albertson & Aylen (2003), porém, visto que as equações são horárias, o número de termos se tornaria elevado.

As análises também foram feitas para os horários de carga leve (“verão”=24h às 8h; “inverno”=23h às 7h), carga média (“verão”=9h às 18h; “inverno”=8h às 17h) e carga pesada (“verão”=19h às 23; “inverno”=18h às 22h).

Como a unidade de medida da potência ativa é kW e a de potência reativa é kVAr, usou-se, por conveniência, os dados tanto de potência reativa e ativa em PU (por unidade) para evitar incompatibilidade de unidades e grandezas. Os perfis de curva de carga em PU são formados pelas cargas horárias normalizadas ( $C_{i,h}$ ) pela demanda média de energia diária ( $DM_i$ ) ou seja:

$$P.U._{i,h} = \frac{C_{i,h}}{DM_i}, \quad i = 1 \dots 365 \quad \text{e} \quad h = 1 \dots 24 \quad (8)$$

onde

$$DM_i = \frac{\sum_{h=1}^{24} C_h}{24}, \quad i = 1 \dots 365.$$

Dois modelos, Etapa II da modelagem proposta, com variáveis explicativas diferentes foram encontrados (Tabela 2), um para cada período (“verão” e “inverno”) classificado pelo Mapa Organizável de Kohonen (Etapa I da modelagem proposta):

**Tabela 2** – Estimativas das duas subestações para os modelos “inverno” e “verão”.

	SUB 1			SUB 2	
	Componente	Estimativa	E.P.*	Estimativa	E.P.*
<b>INVERNO</b>	Constante	99677,90	0,000	646699,74	1,424
	X <sub>t</sub>	8853337,26	0,000	8340105,90	0,000
	X <sub>t-1</sub>	-6330976,41	0,000	-6730332,47	0,000
	Y <sub>t-1</sub>	6738030,89	0,000	7195227,09	0,000
	Y <sub>t-168</sub>	649412,87	8,226	687195,34	0,212
<b>VERÃO</b>	Constante	1173341,77	1,986	817080,80	0,001
	X <sub>t</sub>	2799037,98	0,000	531856,96	0,004
	Y <sub>t-1</sub>	5665435,79	0,000	7939908,98	0,000
	Y <sub>t-168</sub>	503425,14	7,622	804997,48	8,611

\*Erro-Padrão das estimativas no nível de significância de 5%.

O modelo do “verão” só difere do “inverno” pela ausência da potência ativa em  $t-1$ . Apesar de algumas componentes apresentarem estimativas não significantes, elas permaneceram no modelo devido a sua importância temporal. Por exemplo, a componente da potência reativa defasada de 168 horas ( $Y_{168}$ ) foi não significativa em todos os casos, porém, a presença dela reduz consideravelmente o erro percentual absoluto médio (MAPE) da previsão.

Vale citar que, vários modelos foram implementados para comparação ao modelo de regressão proposto, contudo neste estudo serão apresentados somente os de melhores resultados. São eles, o modelo de regressão dinâmica convencional estimado por mínimos quadrados ordinários e uma rede neural artificial *backpropagation* com a arquitetura apresentada na Tabela 3. Os neurônios de entrada representam cada parâmetro, exceto a constante, dos modelos propostos para o período “inverno” e “verão” respectivamente. Sendo que, como a previsão é horária, as entradas são matrizes cujas linhas representam os dias e as colunas as horas. Por exemplo, para o período “inverno” a entrada é uma matriz de dimensão 366 x 4.

**Tabela 3** – Descrição das variáveis das redes neurais.

<b>Camada de Entrada</b>	<b>Descrição</b>
4 neurônios (“inverno”); 3 neurônios (“verão”)	$X(d,h)$ , $h^*=1...24$ $d^{**}=1...366$
<b>Camada Escondida</b>	
3 neurônios (“inverno”) 2 neurônios (“verão”)	
<b>Camada de Saída</b>	
1 neurônio	$Y(d,h)$ $h^*=1...24$ $d^{**}=1...366$

\*h=Hora do dia; \*\*d=dia do ano.

A Tabela 4 mostra o Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE) horário dos modelos em questão para os grupos “inverno” e “verão” obtidos através dos Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen (SOM) das subestações SUB 1 e SUB 2.

Observa-se que, na média horária, o modelo proposto (RDR) apresentou melhores resultados. As diferenças foram mais significativas na subestação SUB 2. O que pode ser explicado pelo comportamento mais homogêneo dos dados de potência reativa da subestação SUB 1 que é predominantemente industrial, contrapondo-se à característica residencial da SUB 2.

Na subestação SUB 1, o modelo proposto apresentou desempenho inferior à regressão dinâmica convencional no período ‘inverno’ para carga média, mas, ao nível de significância de 5%, esta diferença não é estatisticamente significativa.

Na subestação SUB 2, cujos dados de potência reativa apresentam maior volatilidade, o modelo proposto superou significativamente em desempenho os demais modelos.

As Figuras 5 e 6 apresentam as autocorrelações (ACF) dos resíduos das previsões, para cada subestação, dos meses setembro (“inverno”) e dezembro (“verão”) respectivamente. O intervalo de confiança considerado é de 95%.

Observa-se que, como o modelo híbrido proposto incorpora uma correção na autocorrelação dos erros, ao nível de significância de 5%, os resíduos das previsões são significativamente nulos.

Vale lembrar que a correção incorporada ao modelo proposto é uma correção de autocorrelação de primeira ordem. Então, caso existam autocorrelações de ordem superiores, o desempenho do modelo pode ser afetado. Todavia, de maneira geral, os resultados foram satisfatórios.

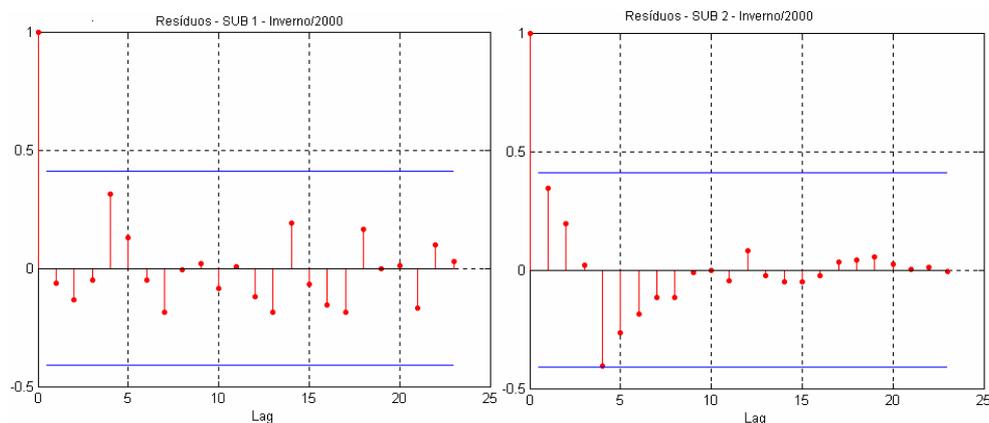
**Tabela 4** – MAPE Subestação SUB 1 e SUB 2 – ano 2000.

Hora	SUB 1						SUB 2					
	Setembro			Dezembro			Setembro			Dezembro		
	RDR <sup>1</sup>	RD <sup>2</sup>	RN <sup>3</sup>	RDR <sup>1</sup>	RD <sup>2</sup>	RN <sup>3</sup>	RDR <sup>1</sup>	RD <sup>2</sup>	RN <sup>3</sup>	RDR <sup>1</sup>	RD <sup>2</sup>	RN <sup>3</sup>
1	1.60	2.29	2.01	1.94	4.72	2.71	7.68	14.91	11.21	10.15	6.28	9.48
2	1.16	1.59	1.91	2.02	14.19	2.14	3.72	5.11	9.42	3.18	10.70	8.10
3	1.45	2.38	1.65	1.54	6.60	1.57	2.14	4.30	25.71	3.18	2.43	3.32
4	1.30	1.44	1.31	1.99	6.40	2.11	2.25	5.85	5.20	2.24	1.92	2.34
5	1.81	2.21	1.72	1.68	4.60	2.31	3.67	7.83	15.58	3.63	3.88	4.35
6	1.36	1.83	2.16	2.66	11.31	2.60	2.16	9.02	18.94	4.44	7.83	5.82
7	1.70	1.29	1.60	3.31	3.66	6.39	3.83	3.83	19.51	4.70	17.89	8.58
8	0.90	0.87	1.22	1.20	4.19	1.21	3.76	5.24	13.47	3.19	5.00	3.06
9	0.54	0.71	0.98	1.16	4.94	2.12	4.31	4.35	4.48	1.97	9.49	2.47
10	0.88	0.89	0.97	1.39	2.68	1.77	1.91	2.28	5.37	2.15	7.81	19.60
11	1.27	1.41	1.94	1.67	2.99	1.99	2.32	1.59	4.31	1.18	6.40	1.75
12	1.38	1.34	2.09	2.30	3.83	1.30	1.38	1.49	3.05	1.46	7.15	2.75
13	0.51	0.44	1.55	2.82	3.74	2.22	1.20	0.88	3.03	3.41	1.76	3.34
14	1.11	1.36	1.05	1.92	2.69	2.27	2.80	3.14	4.64	1.09	3.47	2.48
15	0.82	1.19	1.12	1.74	5.03	2.60	1.64	2.40	3.02	2.05	5.25	4.30
16	0.92	0.80	1.18	2.94	2.79	2.63	1.37	1.08	2.82	1.85	3.43	2.30
17	1.52	0.83	1.21	1.90	4.71	3.21	2.59	2.37	2.98	2.08	8.68	3.76
18	1.08	1.51	0.99	3.00	2.18	2.08	3.31	2.11	11.77	2.39	3.24	3.47
19	1.35	0.85	1.29	2.00	2.39	2.47	2.54	5.18	3.50	1.92	2.41	2.53
20	0.96	1.24	1.76	3.27	3.10	2.98	2.77	3.52	6.06	6.16	3.96	5.62
21	1.14	1.13	1.24	1.14	2.67	1.16	3.44	2.55	7.65	1.96	2.74	4.36
22	1.24	1.42	1.21	1.58	2.76	1.87	2.09	1.74	4.80	2.68	3.01	2.78
23	1.06	0.95	2.24	2.09	2.14	2.73	4.41	5.09	7.64	1.84	1.86	5.29
24	1.05	1.30	1.54	2.79	4.64	4.23	3.69	4.73	8.66	3.20	3.24	4.51
<b>Média</b>	<b>1.17</b>	<b>1.30</b>	<b>1.50</b>	<b>2.09</b>	<b>4.54</b>	<b>2.44</b>	<b>2.96</b>	<b>4.19</b>	<b>8.45</b>	<b>3.00</b>	<b>5.41</b>	<b>4.85</b>
C. Leve	1.37	1.69	1.68	2.12	6.70	2.81	3.73	6.74	13.54	4.06	6.22	5.76
C. Média	0.99	0.98	1.33	2.08	3.56	2.22	2.33	2.48	4.72	1.96	5.67	4.62
C. Pesada	1.16	1.23	1.30	2.02	2.61	2.24	2.83	3.02	6.76	2.91	2.80	4.12

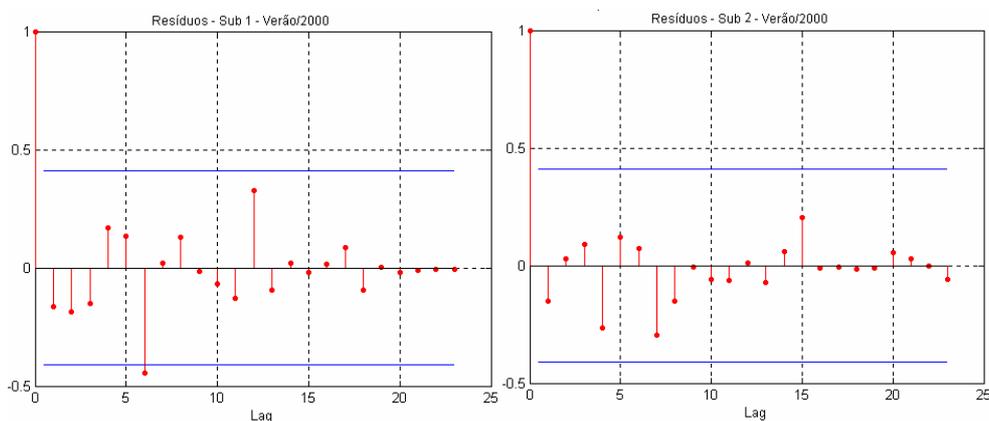
1 RDR – Regressão Dinâmica Robusto (Modelo Proposto)

2 RD – Regressão Dinâmica Convencional

3 RN – Redes Neurais



**Figura 5** – Autocorrelação dos resíduos das previsões de “inverno” das subestações SUB1 SUB2 ano 2000.



**Figura 6** – Autocorrelação dos resíduos das previsões de “verão” das subestações SUB1 SUB2 ano 2000.

## 6. Conclusões

Uma hipótese simplificadora para a previsão de potência reativa seria supor que o fator de potência da carga se manterá no futuro e a partir deste fato elaborar uma previsão de demanda reativa.

Os estudos de dados de medição mostraram que tal hipótese pode induzir a erros quando se busca uma curva de horária de demanda reativa, principalmente nos horários de transição entre os patamares de carga (leve-média-pesada).

O modelo proposto apresentou erros significativamente pequenos, ao nível de significância de 5%. Seu desempenho superou ainda outros modelos na maioria das horas. Os resultados foram melhores na SUB 1 devido ao fato de esta ser predominantemente industrial, pois com isso ela apresenta um comportamento mais homogêneo. Já a SUB 2 possui características

residenciais, com isso seu comportamento é mais heterogêneo o que afeta diretamente os resultados.

Como a correção de autocorrelação foi feita somente para primeira ordem, visto que o teste Durbin detecta somente este caso, as horas em que os erros de previsão foram elevados podem ser justificadas pela presença de autocorrelações superiores a ordem 1. Como solução para este problema, poderia ser usado ainda um teste capaz de detectar autocorrelações de ordens superiores.

Uma sugestão de trabalho futuro será aplicar o Modelo Híbrido Proposto para os demais grupos escolhidos pelos Mapas Auto-Organizáveis de Kohonen, tendo como expectativas resultados também favoráveis. Esta análise não foi feita aqui porque era necessário fazer um pré-teste do novo modelo para avaliar seu desempenho.

Outra sugestão será inserir, no Modelo Híbrido Proposto, variáveis exógenas como temperatura e potência reativa devida aos capacitores instalados na rede. Visto que isto não foi feito aqui porque estes dados não estavam disponíveis para o estudo.

### Referências Bibliográficas

- (1) Abreu, R.L. & Vilela, L.C. (2001). Serviços Ancilares – Uma proposta de classificação e precificação para o setor elétrico brasileiro. *XVI SNPTEE*, Campinas-SP.
- (2) Albertson, K. & Aylen, J. (2003). Forecasting the Behaviour of Manufacturing Inventory. *International Journal Forecasting*, **19**, 299-311.
- (3) Birkes, D. & Dodge, Y. (1993). *Alternative Methods of Regression*. Wiley Series in probability and mathematical statistics.
- (4) Christo, E.; Bezerra, E.C.; Souza, R.C. & Bonfim, A.L.B. (2002). Forecasting Reactive Power Series in Electrical Systems. *The 22<sup>nd</sup> International Symposium on Forecasting*, Dublin-Ireland.
- (5) Cinvanlar, S. & Grainger, J.J. (1988). Forecasting Distribution Feeder loads: Modeling and application to volt/var control. *IEEE Transactions on Power Delivery*, **3**, 255-264.
- (6) Durbin, J. (1970). Testing for Serial Correlation in Least-Square Regression when some of the regressors are lagged dependent variables. *Econometrica*, **38**, 410-421.
- (7) El-Hawary, F. & Mbamalu, G.A.N. (1993). Load Forecasting via suboptimal seasonal autoregressive models and Iteratively Reweighted Least Squares Estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, **8**, 343-348.
- (8) El-Hawary, F. & Mbamalu, G.A.N. (1996). Dynamic Heave Compensation using Robust Estimation Techniques. *Computers and Electrical Engineering*, **22**, 257-273.
- (9) Goodrich, R.L. (1992). *Applied Statistical Forecasting*. Business Forecasting Systems.
- (10) Haykin, S. (1999). *Redes Neurais Principios e prática*. 2<sup>a</sup> ed. Editora Bookman, Porto Alegre-RS.
- (11) Hill, C.; Griffiths, W. & Judge, G. (1999). *Econometria*. Ed. Saraiva.
- (12) Hippert, H.S.; Pedreira, C.E. & Souza, R.C. (2004). Neural Networks for Short-Term Load Forecasting: Review and Evaluation. *IEEE Transactions on Power Systems*, **16**, 44-55.

- (13) Holland, P.W. & Welsch, R.E. (1977). Robust Regression using Iteratively Reweighted Least-Square. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **A6**, 813-827.
- (14) Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley Series in probability and mathematical statistics.
- (15) Kiviet, J.F. & Dufour, J.M. (1997). Exact Tests in Single Equation Autoregressive Distributed Lag Models. *Journal of Econometrics*, **80**, 325-353.
- (16) Kohonen, T. (2000). *Self-organizing maps*. Third Edition. Springer.
- (17) Neter, J.; Kutner, M.; Nachtsheim, C. & Wasserman, W. (1996). *Applied Linear Statistical Models*. McGraw-Hill.
- (18) Song, H.; Witt, S.F. & Jensen, T.C. (2003). Tourism Forecasting: accuracy of alternative econometric models. *International Journal Forecasting*, **19**, 123-141.

## Apêndice

### 1. Modelo de Regressão Dinâmica

Os modelos de regressão dinâmica combinam a dinâmica de séries temporais e o efeito de variáveis explicativas. A estimação de parâmetros neste modelo é feita através de mínimos quadrados ordinários, a exemplo dos modelos de regressão usual. Entretanto, a estimação em modelos de regressão dinâmica envolve um procedimento iterativo com vários estágios.

Os modelos de regressão dinâmica também são conhecidos como modelos de defasagens distribuídas auto-regressivo, ADL( $p_j, p$ ), onde, os  $p_j$  e  $p$  indicam a ordem de defasagem da(s) variável(is) dependente(s) e independente(s), respectivamente. A representação geral do modelo é (Song *et al.*, 2003) e (Kiviet & Dufour, 1997):

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} \beta_{ji} x_{jt-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + u_t \quad (1)$$

onde:

$y_t$ : Variável dependente em  $t$ ;

$y_{t-i}$ : Variável dependente em  $t-i$ ;

$x_{jt-i}$ : A  $j$ -ésima variável independente em  $t-i$ , sendo  $i=\{1, \dots, p_j\}$  e  $j=\{1, \dots, p\}$ ;

$\beta_{ji}$ : Coeficiente da  $j$ -ésima variável independente em  $t-i$ ;

$\phi_i$ : Coeficiente da variável dependente em  $t-i$ ;

$\alpha$ : constante;

$u_t$ : ruído aleatório associado ao modelo, onde se supõem que são independentes e identicamente distribuídos com densidade  $N(0, \sigma^2)$ .

Um problema que pode surgir com o uso dos modelos de Defasagens Distribuídas Autorregressivas é a dependência temporal dos valores sucessivos dos resíduos, eles são correlacionados entre si. Em termos formais e considerando o modelo (1) a autocorrelação serial implica  $E(u_i u_j) \neq 0$  para  $i \neq j$  (Hill *et al.*, 1999). Esta pode ser causada por situações como:

- Omissão de variável explicativa (erro de especificação);
- Má especificação do modelo matemático, a qual pode se indicar uma forma diferente da linear;
- Má especificação do verdadeiro termo aleatório, ou seja, efeitos que se propagam ao longo do tempo;
- Ajustes imperfeitos de séries estatísticas causados, por exemplo, por interpolações ou extrapolação dos dados, e/ou causados pelas suavizações dos dados.

Quando os resíduos são autocorrelacionados, as estimativas de mínimos quadrados ordinários dos parâmetros não são eficientes, isto é, não apresentam variância mínima, além de seu erro-padrão ser tendencioso, o que conduz a testes e intervalos de confiança incorretos. Se a autocorrelação for positiva, os erros-padrão serão subestimados e, conseqüentemente, os valores da estatística  $t$ , superestimados. Se a autocorrelação for negativa, os erros-padrão serão superestimados e o valor de  $t$ , subestimado. Portanto, a autocorrelação positiva é a mais danosa, porque existirá, no caso do teste  $t$ , o risco de rejeitar-se a hipótese nula de ausência de efeito, quando se deveria aceitá-la.

Como muitas regressões envolvendo séries temporais são modelos autorregressivos, Durbin (1970) propôs um teste para detectar a presença de correlação no modelo de variável dependente defasada. Esse teste deve ser aplicado quando há uma variável dependente defasada no membro direito da equação, pois, nesse caso, o teste Durbin-Watson usual é tendencioso, já que normalmente não detecta qualquer correlação. O novo teste é válido em grandes amostras e se baseia na estatística,

$$h = \left(1 - \frac{d}{2}\right) \sqrt{\frac{n-1}{1 - (n-1)[dp(b)]^2}} \quad (2)$$

$$d \cong 2 \left(1 - \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}\right)$$

onde  $d$  é estatística de teste de Durbin-Watson usual para erros AR(1),  $n$  é o tamanho da amostra, e  $dp(b)$  é o desvio padrão do coeficiente estimado da variável dependente defasada em  $t-1$ . Mesmo que existam outros valores defasados da variável dependente, para o cálculo da estatística Durbin somente o desvio padrão do coeficiente estimado da variável dependente defasada em  $t-1$  é considerado. Em grandes amostras a estatística  $h$  tem distribuição normal padronizada se  $u_t$  não é autocorrelacionado. Se  $|h| \geq z_\alpha$ , rejeita-se a hipótese nula (se  $\alpha=5\%$ ), de nenhuma correlação, em favor da alternativa, de que existe correlação positiva.

Na presença de correlação serial, os estimadores de mínimos quadrados ordinários são ineficientes, com isso, é essencial procurar medidas corretivas. Porém, depende do conhecimento que se tem sobre a natureza da interdependência das perturbações, ou seja, do conhecimento que se tem sobre o coeficiente de autocorrelação  $r$  da equação (8). Na prática, raramente se conhece este coeficiente. Com isso, uma alternativa para estimá-lo é o método de Cochrane-Orcutt, que emprega os resíduos estimados  $\hat{u}_t$  para obter informações sobre o coeficiente  $r$  desconhecido.

Para explicitar o método Cochrane-Orcutt, considere o modelo simplificado de duas variáveis (Goodrich, 1992):

$$\begin{cases} Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\ R(B)u_t = \varepsilon_t \end{cases} \quad (3)$$

onde:  $R(B)=1-r_1B$ , isto é, um AR(1).

Se (8) for válida no período  $t$ , também será válida no período  $t-1$ . Daí,

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \quad (4)$$

Multiplicando ambos os lados de (4) por  $r$ , obtêm-se:

$$rY_{t-1} = r\beta_1 + r\beta_2 X_{t-1} + ru_{t-1} \quad (5)$$

Subtraindo (5) de (4), tem-se:

$$\begin{aligned} (Y_t - rY_{t-1}) &= \beta_1(1-r) + \beta_2 X_t - r\beta_2 X_{t-1} + (u_t - ru_{t-1}) \\ &= \beta_1(1-r) + \beta_2(X_t - rX_{t-1}) + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (6)$$

em que no último passo foi feito uso da segunda equação do sistema (3). Pode-se expressar (6) como,

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + \varepsilon_t \quad (7)$$

sendo:  $\beta_1^* = \beta_1(1-r)$ ;  $Y_t^* = R(B)Y_t$  e  $X_t^* = R(B).X_t$

$R(\beta)$  o fator comum e  $B$  o operador de atraso.

O procedimento de estimação é sequencial:

1. Faz-se, inicialmente,  $r_i = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$ ;
2. Estima-se  $\beta$ 's por mínimos quadrados ordinários;
3. Calcula-se  $u_i$ ;
4. Estima-se  $R(B)$ , ou melhor, os coeficientes  $r$ 's por mínimos quadrados ordinários na equação  $R(B).u_t = \varepsilon_t$ ;
5. Calculam-se os valores transformados  $Y_t^*$  e  $X_t^*$ ;
6. Re-estimam-se  $\beta$ 's por mínimos quadrados ordinários;
7. Como, *a priori* não se sabe se os  $r$ 's estimados são as “melhores” estimativas de  $R(B)$ , então se substituem os valores dos coeficientes  $\beta$ 's obtidos no passo 6 na regressão original (3) e calculam-se os novos resíduos;
8. Repetir passos 4 a 7 até a convergência de  $r$ 's,  $\beta$ 's ser alcançada.

## 2. Estimação por Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente

Neste tipo de estimação robusta, as estimativas são obtidas no fim de um processo iterativo, devido ao fato dos estimadores não terem uma expressão analítica explícita. Em vez disso está associado a cada um deles um algoritmo para a obtenção da estimativa. Este algoritmo pode ser conduzido baseado no conceito dos Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente (Holland *et al.*, 1977; El-Hawary *et al.*, 1993 e Huber, 1981).

Considerando o problema de estimação convencional dos parâmetros envolvendo a equação:

$$Y = \beta X + e_i \tag{8}$$

onde  $Y$  é um vetor de observações  $n \times 1$ ,  $X$  é uma matriz  $n \times p$  de coeficientes conhecidos,  $\beta$  é um vetor de parâmetros desconhecidos  $p \times 1$ , e  $e_i$  é um vetor de erros aleatórios  $n \times 1$ . Um estimador robusto para  $\beta$ , denotado por  $\hat{\beta}$ , define-se como a solução que minimiza a função objetivo (Birkes *et al.*, 1993).

$$\sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{e_i}{\hat{\sigma}}\right) = \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{Y_i - X_i\beta}{\hat{\sigma}}\right) \tag{9}$$

$X_i$  = é a  $i$ -ésima linha da matriz  $X(x)$

onde  $\hat{\sigma}$  é um estimador robusto do parâmetro de escala do ruído;  $\sigma$ , e é introduzido para assegurar no problema de minimização a invariância em relação à escala;  $\rho(u)$  é uma função com valores reais não constantes e tem por objetivo limitar no processo de estimação a influência dos resíduos  $e_i$  elevados. Uma função  $\rho(u)$  razoável tem as seguintes propriedades (El-Hawary *et al.*, 1996):

- $\rho(e) \geq 0$
- $\rho(0) = 0$
- $\rho(e) = \rho(-e)$  função par
- $\rho(e_i) \geq \rho(e_i')$  para  $|e_i| > |e_i'|$  função crescente

Por exemplo, para estimação Mínimos Quadrados Ordinários, a função empregada é  $\rho(e_i) = e_i^2$ .

Minimizar a equação (14) requer que a derivada de  $\beta$  seja zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho\left[\frac{(Y_i - X_i\beta)}{\hat{\sigma}}\right] \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \rho' \left[ \frac{(Y_i - X_i\beta)}{\hat{\sigma}} \right] X_i &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$X_i$  = é a  $i$ -ésima linha da matriz  $X(x)$

É conveniente definir uma função  $\psi$  e uma função peso  $w(e)$  por:

$$\begin{aligned} \psi &= \rho' \\ \sum \psi \left[ \frac{Y_i - X_i\beta}{\hat{\sigma}} \right] X_i &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\sum_{t=1}^n \psi\left(\frac{e_t}{\hat{\sigma}}\right) X_t = \sum_{t=1}^n \frac{e_t}{\hat{\sigma}} \frac{\psi(e_t / \hat{\sigma})}{(e_t / \hat{\sigma})} X_t = 0$$

A equação (16) mostra que os estimadores robustos podem ser vistos como estimadores de mínimos quadrados ponderados por  $w_t = \frac{\psi(e_t / \hat{\sigma})}{(e_t / \hat{\sigma})}$ .

No entanto, as ponderações  $w_t$  dependem dos resíduos, os resíduos dependem dos coeficientes estimados e os coeficientes estimados dependem dos pesos. Desse modo, uma solução iterativa (conhecida como mínimos quadrados reponderados iterativamente) será utilizada para estimação:

1. Selecionar inicialmente estimativas  $\mathbf{b}^{(0)}$ , tais como as estimativas por mínimos quadrados;
2. A cada iteração  $t$ , calcula-se os resíduos  $e_i^{(t-1)}$  e os pesos associados  $w_i^{(t-1)} = w[e_i^{(t-1)}]$ ;
3. Calcular as novas estimativas de mínimos quadrados ponderados

$$b^{(t)} = [\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(t-1)}\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{(t-1)}y$$

onde  $\mathbf{X}$  é a matriz modelo com  $x_i'$  como as  $i$ -ésimas linhas, e  $\mathbf{W}^{(t-1)} = \text{diag}\{w_i^{(t-1)}\}$  é a matriz peso;

4. Repetir os passos 2 e 3 até a convergência dos coeficientes.

Após uma breve descrição dos modelos teóricos utilizados no Modelo Híbrido Proposto, faz-se necessário apresentar a forma de especificação de novo modelo, ou seja, quais os critérios escolhidos para a inserção das variáveis.