Interlocuções e saberes docentes em interações *on-line*: um estudo de caso com professores de Matemática

Marcelo A. Bairral*, Arthur B. Powell**

* Instituto de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Brasil. mbairral@ufrrj.br

** Rutgers University, Department of Urban Education, Newark, New Jersey, USA. powellab@andromeda.rutgers.edu

Resumo

Integrando matemática, educação, comunicação, TIC e ciência cognitiva, este artigo é resultado de um projeto de pesquisa em Educação Matemática que, através de estudos empíricos, tem como objetivo analisar situações cognitivas e condições pedagógicas que favoreçam a aprendizagem em ambientes virtuais. O enquadramento teórico da investigação é baseado em estudos sobre aprendizagem matemática que combinam a comunicação e o pensamento, bem como as interações e as interlocuções. Aqui analisamos reflexões *on-line* entre os professores de Matemática dentro de um ambiente chamado Virtual Math Teams (VMT), colaborando para resolver um problema de geometria do táxi. Ilustramos diferentes tipos de interlocução (informativa, negociativa, avaliativa e interpretativa), bem como domínios de conhecimentos (epistemologia, didática e mediação) identificados com o conhecimento profissional dos professores. Nossos resultados indicam que interlocuções interpretativas e negociativas têm maior potencial para aprimorar o pensamento matemático dos interlocutores. O estudo também destaca que, por meio da identificação e da análise de propriedades de interlocução, os pesquisadores podem obter *insights* sobre o conhecimento profissional dos professores.

Palavras-chave

ambiente virtual; VMT; interações docentes; raciocínio matemático; geometria do táxi.

Teachers' interlocution and knowledge in online interactions: a case study with mathematics teachers

Abstract

Integrating mathematics, education, communication, ICT, and cognitive science, this study is the result of a research program in mathematics education that aims to analyze cognitive situations and pedagogic conditions, through empirical studies, that favor learning in virtual environments. The theoretical framework of the investigation is based on studies of mathematics learning that combine communication and thought as well as interactions and interlocutions. In this article, we analyze interactions among mathematics teachers who interact online within an environment, called Virtual Math Teams (VMT), collaborating to solve a problem in taxicab geometry. We illustrate different types of interlocution (evaluative, informative, interpretative, negotiatory) as well as knowledge domains (epistemology, didactics, and mediation) identified by the teachers' professional knowledge. Our results indicate that interpretative and negotiatory interlocutions have greater potential to enhance interlocutors' mathematical thinking. Our study also highlights that by identifying and analyzing interlocution properties, researchers can obtain insights into the teachers' professional knowledge.

Key words

virtual environment; VMT; teachers' interaction; mathematical reasoning; taxicab geometry.

Introdução

Pesquisas em Educação Matemática têm indicado estreitas relações entre comunicação e pensamento (Sfard, 2008), bem como entre o discurso matemático e o grupo colaborativo ou a cognição social (Martin et al., 2006; Powell, 2006; Stahl, 2009). Os trabalhos de Toulmin (1969) e Walton (1992, 2007) têm sido utilizados para compreender, respectivamente, argumentos matemáticos formais e informais (Aberdein, 2006; Inglis et al., 2007; Rasmussen; Stephan, 2008; Stephan; Rasmussen, 2002; Weber et al., 2008). Essas investigações têm se voltado para o aprendizado de estudantes em aulas presenciais e, particularmente, Weber e colaboradores (2008) analisaram a argumentação envolvendo aprendizes com o pensamento matemático mais avançado. Conjuntamente, esses estudos têm gerado resultados sobre a maneira como os alunos desenvolvem argumentos matemáticos. Todavia, ainda existe pouca pesquisa sobre como envolver docentes ou futuros professores de Matemática para discutir e resolver *on-line* problemas matemáticos.

Com base em estudos prévios (Bairral et al., 2007; Powell; Lai, 2009; Salles; Bairral, 2012a, 2012b), neste artigo analisamos interações de professores no ambiente virtual VMT-Chat (Virtual Math Teams). Os participantes interagiram na resolução de um problema introdutório da geometria não euclidiana do táxi. Ilustraremos quatro tipos de interlocução (informativa, negociativa, avaliativa e interpretativa) e três domínios (epistemológico, didático e da mediação) identificados no conhecimento profissional dos educadores. Nosso referencial teórico dialoga com estudos que articulam comunicação e pensamento, e interações e interlocuções no aprendizado matemático.

Comunicação e pensamento matemático

Como em situações *off-line*, em ambientes *on-line* os usuários expressam objetos, relações e outras ideias gráficas, textualmente ou mediante outros tipos de registros. Todas são categorias semióticas de signos. Um signo é um produto humano — uma palavra, um gesto ou uma marca — pelo qual um pensamento, um comando ou um desejo é expresso. Conforme sinaliza Sfard (2000, p. 45, tradução nossa), “em semiótica cada expressão linguística, bem como toda ação, pensamento ou sentimento, conta como um sinal”. Um sinal expressa alguma coisa e, portanto, é significativo, pelo menos, para o seu produtor. Eventualmente, também pode ser para os outros. Alguns sinais, como a fala, são efêmeros. Outros, como desenhos e registros, persistem. Seja efêmero ou duradouro, o significado de um sinal não é estático. Sua denotação e conotação estão propensas a mudanças ao longo do tempo no âmbito de seu uso discursivo.

Signos podem ser utilizados para representar ideias. Todavia, Sfard (2000) argumenta que um signo é constitutivo e não estritamente representacional desse significado, ou seja, a significação não está somente ilustrada no signo, mas ela passa a existir através dele. Especificamente, Sfard (2000, p. 47, grifo no original, tradução nossa) afirma que

> o discurso matemático e seus objetos são *mutuamente constituídos*: é a atividade discursiva, incluindo a sua produção contínua de símbolos, que cria a necessidade de objetos matemáticos e esses objetos matemáticos (ou melhor, o uso de objetos mediado de símbolos) que, por sua vez, influenciam o discurso e propaga-o em novas direções.

Esse posicionamento teórico sobre a natureza mutuamente constitutiva de significado e signo fornece uma base para a análise do desenvolvimento das ideias matemáticas, do raciocínio e do estudo de heurísticas. Por um lado, os signos podem representar significados codificados que, com base em interações anteriores, os interlocutores podem verificar como decodificar. Por outro lado, os indivíduos também podem criar signos e, durante as suas ações comunicativas, podem compartilhá-los. Nesse sentido, a equivalência de significado para os interlocutores, que permite a comunicação de sucesso, não é algo preexistente, mas uma realização de atos comunicativos.

Signos (objetos, relações, símbolos, etc.) são componentes do discurso matemático e estão inter-relacionados na constituição de significados matemáticos. Signos existem em formas variadas. Eles são produzidos para consumo pessoal ou público e para uma variedade de propósitos: descobrir, construir, investigar ou comunicar ideias. Como matemáticos e educadores matemáticos também enfatizaram (Dörfler, 2000; Lesh; Lehrer, 2000; Speiser et al., 2002; Speiser et al., 2003), construir e discutir inscrições (registros) é essencial para a construção e a comunicação de conceitos matemáticos e científicos. Nas ciências, Lehrer e coautores (2000, p. 357) ilustraram como aprendizes trabalharam "em um mundo de inscrições, de modo que, ao longo do tempo, os mundos (natural e inscrito), se tornaram mutuamente articulados". Os autores ressaltaram a importância de uma "história compartilhada de inscrição". Em Matemática, a invenção, a aplicação e a modificação dos símbolos apropriados para expressar e ampliar as ideias são atividades constitutivas, inclusive, da própria história da matemática (Struik, 1967).

Ao analisar os registros dos indivíduos que trabalham *on-line* em pequenos grupos, como o caso da presente pesquisa, o pesquisador pode estudar como os participantes constituem as suas ideias matemáticas e desenvolvem o seu raciocínio através dos significados que atribuem às suas inscrições. E, também, como suas inscrições podem influenciar significados emergentes. Como sinalizam Speiser et al. (2003), o que conta como matemático na análise de inscrições não é a inscrição em si, mas a forma como os sujeitos escolheram para trabalhar com as suas inscrições. Sendo assim, reconhecendo que interlocuções constituem um campo discursivo fértil para o estudo de inscrições em ambientes virtuais, a seguir discorremos sobre como articulamos interlocuções e saberes docentes no âmbito da resolução de problemas matemáticos *on-line*.

Interlocuções, tarefas matemáticas e domínios do conhecimento profissional docente

Em sintonia com Martin (2001) e Davis (1996), nossa investigação sublinha a importância de analisar interlocuções *on-line* como uma estratégia de análise do desenvolvimento das ideias matemáticas dos docentes. Utilizamos o termo "interlocução" para denotar práticas discursivas dos atores (professores de Matemática) na sua conversação *on-line*.

Em uma interlocução ocorrem unidades de conversas, sejam elas interações orais ou escritas. Essas análises das interlocuções surgiram da ampliação feita por Powell (2006), que não analisa apenas a escuta, como Davis, mas também faz um questionamento das práticas discursivas dos alunos em suas trocas conversacionais. Essa ampliação apresenta quatro propriedades, que se baseiam nos três modos de escutar que Davis (1996) propôs e que são conhecidas como: avaliativa, informativa, interpretativa e negociativa.

- Avaliativa: o interlocutor se mantém avaliador e não participativo. Suas afirmações são apresentadas de forma crítica, sem qualquer intervenção. São feitos julgamentos pontuais, como certo ou errado.

- Informativa: o interlocutor solicita ou menciona alguma informação para satisfazer ou gerar uma pergunta ou curiosidade, mas sem evidência alguma em seu julgamento.
- Interpretativa: o interlocutor se posiciona de maneira a entender e interpretar o que seu parceiro está querendo dizer ou pensando. É como se o interlocutor refletisse em voz alta, para descobrir o seu próprio pensamento.
- Negociativa: o interlocutor e seu parceiro interagem mutuamente, com uma sequência de questionamentos, participando juntos na busca de uma solução. Cada sujeito participa na formação e na transformação da experiência, mediante questionamentos contínuos das ideias que constituem sua percepção e suas ações.

Essas quatro propriedades não são hierárquicas, nem mutuamente exclusivas. Elas podem ser notadas em vários momentos de uma conversação e não, necessariamente, em instantes isolados. Apesar de Powell (2006) apresentar a divisão dessas quatro propriedades, as diferentes formas de participação nas unidades de conversação mantêm-se em constante alternância.

É importante destacar que, em situações presenciais, quando estudantes estão engajados nessas categorias de interlocução, eles estão abertos ao que Powell (2006) denominou "cognição socialmente emergente". Ou seja, participantes engajados em interlocuções negociativas têm o potencial de desenvolver conjuntamente ideias matemáticas e formas de raciocínio que emergem no discurso dos interlocutores e que, posteriormente, são reflexivas na compreensão de cada sujeito.

A interlocução, como uma categoria conceitual em nossa pesquisa, permite-nos acompanhar a participação, as mudanças na compreensão e na autonomia dos aprendizes na sua construção do conhecimento matemático. Além do mais, como pesquisadores, percebemos que o estudo das interlocuções nos permite analisar como os sujeitos compartilham significados, ideias e conceitos, que, em nosso entendimento, são indicadores de colaboração na resolução da atividade proposta.

As tarefas que utilizamos são situações que oportunizam a tomada de decisões e favorecem a colaboração. Elas possuem características das atividades ricas de Lo e Gaddis (2010), isto é:

1. São acessíveis.
2. Articulam-se a conhecimentos matemáticos prévios.

3. Incentivam conexões entre diferentes ideias matemáticas.

4. Admitem vários modos de resolução e de solução.

5. Podem ser expandidas e aplicáveis a ideias matemáticas importantes.

Em nossos estudos, temos visto que, quando os participantes de uma pesquisa se envolvem em tarefas com essas características, particularmente, em ambientes virtuais de aprendizagem, os dados gerados tendem a permitir aos pesquisadores uma análise mais detalhada do desenvolvimento de ideias e do raciocínio matemático mediante suas interlocuções e seus registros.

Assumimos que interações em ambientes virtuais com o uso de atividades ricas podem ter uma influência positiva no desenvolvimento de domínios do conhecimento profissional docente (CPD). Neste artigo, consideramos três domínios interligados no CPD dos professores: o epistemológico, o da mediação e o didático (estratégico). Esses domínios estão resumidos no quadro seguinte.

Quadro 1 – Domínios do CPD considerados

EPISTEMOLÓGICO	MEDIAÇÃO	DIDÁTICO
Fundamentação do ensino no poder mental dos aprendizes (Gattegno, 1987). Discussão de objetos e de relações entre eles.	Motivação para o uso das tecnologias da informação e comunicação no aprendizado e no ensino. Utilização de diferentes formas de representação (escrita, pictórica, etc.) para constituir e compartilhar ideias matemáticas e formas de raciocínio.	Proposição e resolução de problemas. Utilização de atividades que promovam interação e trabalho colaborativo.

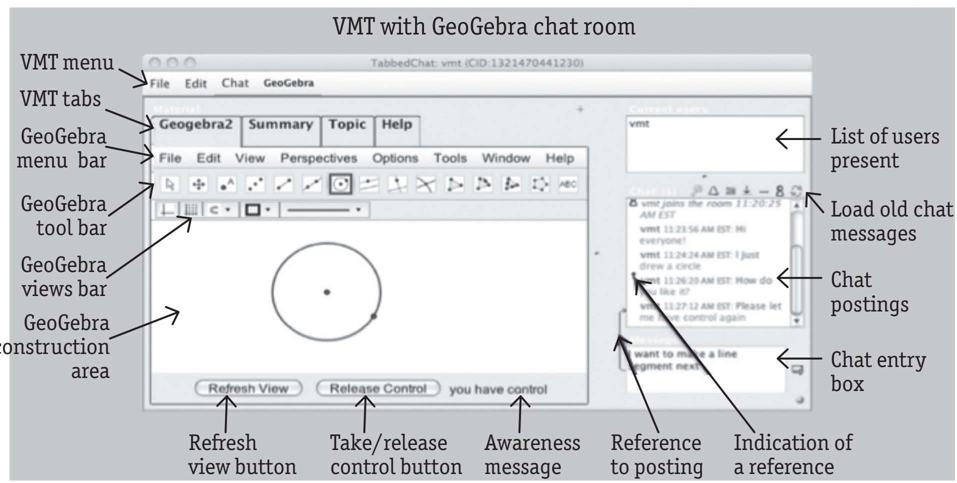
Tendo como referência os domínios do CPD e as propriedades da interlocução apresentados anteriormente, ilustramos análises de interações em *chat*. O contexto da pesquisa será detalhado a seguir.

O ambiente virtual da pesquisa e a coleta de dados

A presente investigação é integrante de um projeto internacional, intitulado *e*Math, envolvendo pesquisadores dos Estados Unidos e do Brasil[1]. Nosso propósito é contribuir com os estudos do campo da educação, da comunicação, da informática e da ciência cognitiva, no sentido de analisar aspectos cognitivos e condições pedagógicas que favorecem a aprendizagem matemática em ambientes virtuais.

O ambiente virtual utilizado — Virtual Math Teams (VMT) — para a resolução dos problemas propostos aos professores é cedido pela Drexel University, Philadelphia, EUA. Para acessar o dispositivo (vmt.mathforum.org/VMTLobby/), é necessário cadastrar-se, a fim de gerar nome e senha de acesso. O VMT é constituído de quatro partes fundamentais e irrestritas aos participantes em sua funcionalidade: o quadro branco (*whiteboard*) para representações gráficas, a área de *chat* para registros escritos, a Wiki, e o GeoGebra. No entanto, a disponibilidade do ambiente virtual permite aos usuários trabalhar nos diferentes espaços. Pode-se associar uma representação gráfica a uma mensagem textual e vice-versa. A seguir ilustramos a tela atual do ambiente.

Figura 1 – Ilustração novo *design* do VMT-Chat



Neste estudo, analisamos interações apenas do *chat* e do quadro branco. Para a análise dos dados, o VMT dispõe de uma ferramenta (*VMT-Replayer*) que permite aos pesquisadores revisitar exaustivamente a sequência intera-

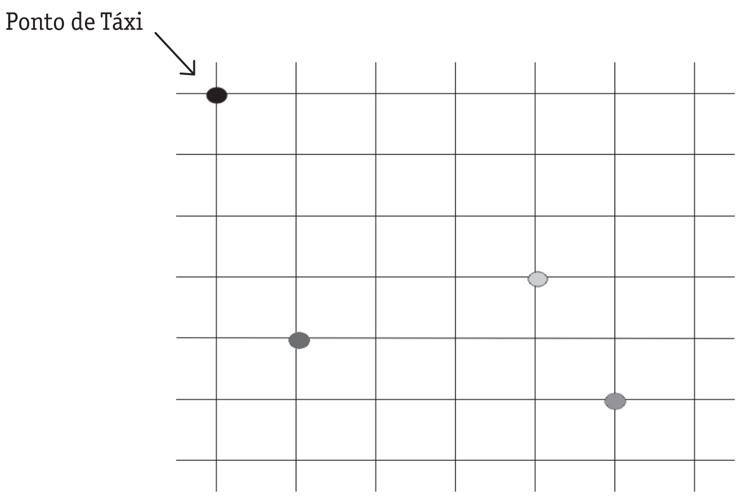
1. No Brasil, o projeto de pesquisa é financiado pelo CNPq e pela FAPERJ; nos Estados Unidos, pela National Science Foundations (NSF).

tiva desejada. Foram formadas sete salas no VMT.

Os professores trabalharam no Problema do Táxi. Essa atividade (Powell, 2003) aborda um tipo de geometria não euclidiana, a geometria do táxi. Vejamos:

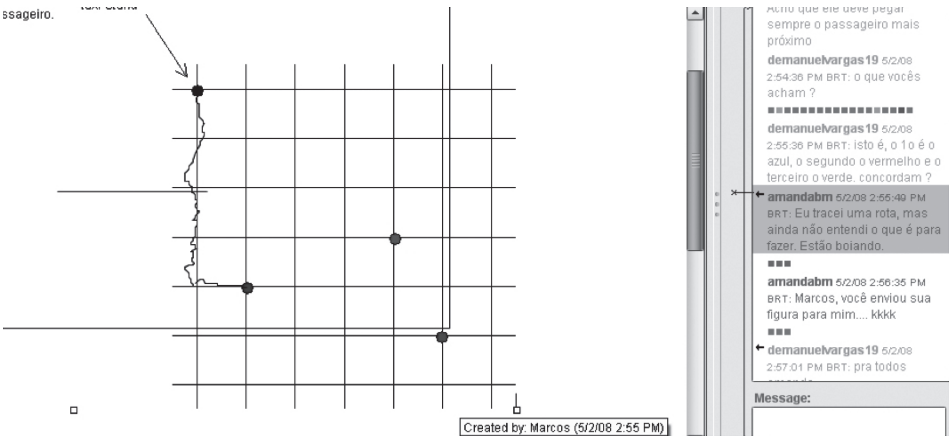
Uma taxista trabalha em uma região específica de uma cidade, conforme ilustrado abaixo. Todas as viagens se iniciam no mesmo ponto. Em uma noite de pouco trabalho, a motorista fez apenas três viagens. Ela pegou os passageiros nas interseções indicadas. Para passar o tempo, ela considerou todas as rotas que poderiam ser feitas do seu ponto para pegar cada passageiro e questionou-se sobre o trajeto que seria mais curto. Qual a menor rota do ponto de táxi para pegar cada passageiro? Como você sabe que esse é o menor trajeto? Existe mais de um menor trajeto para cada ponto? Caso contrário, por que não? Caso afirmativo, quantos? Justifique suas respostas.

Figura 2 – Ilustração da cidade do Problema do Táxi



Os professores de Matemática interagiram cerca de três horas, divididas em duas sessões, cada uma de uma hora e 30 minutos. Eles não conheciam a atividade. A resolução do problema do táxi analisa distâncias em um espaço não euclidiano. Ela envolve uma outra métrica, ou seja, a da soma em espaços discretos. A seguir (na Figura 3), ilustramos uma tela com o início da interação dos docentes na resolução do problema. No quadro branco, vemos a malha quadrada sugerida no problema e que os educadores copiaram e colaram ali.

Figura 3 – Interação dos docentes: quadro branco com a malha dada no problema e o *chat* escrito



Na próxima seção, ilustramos como os docentes interagiram colaborativamente para compreender e resolver o Problema do Táxi e finalizamos, ilustrando exemplos dos domínios do CPD evidenciados na análise.

Resultados

Na resolução do problema, os futuros professores interagiram utilizando as diferentes propriedades da interlocução. De uma sessão de *chat* com 178 linhas de postagem, do índice 51 ao 59, a seguir, os participantes mostraram refinar suas ideias sobre o problema proposto e sobre como determinar o número mínimo de caminhos mais curtos para cada um dos pontos de táxi.

O excerto de *chat* anterior evidencia interlocuções do tipo informativo, interpretativo e avaliativo. No índice 51, *Elder* introduz a noção de combinação. Continuando a reflexão, *amandabm* (índice 52) interpreta a postagem de *Elder* sobre o número total de unidades (caminhos mais curtos) do ponto de táxi para cada destino e solicita retorno dos colegas sobre o seu raciocínio. Sua solicitação é respondida por *demanuelvargas19* (índice 53) e *Marcos* (índice 54). Este, também, avalia a contribuição de *amandabm*, relembrando o propósito do problema: *"Mas o problema é saber quantos caminhos mais curtos existem"* (índice 55).

Em sua primeira postagem no *chat*, *amandabm* afirma: *"Eu tracei uma rota, mas ainda não entendi o que é para fazer"* (índice 16, conforme rota ilustrada no quadro

ÍNDICE	AUTOR	MENSAGEM[2]
51	Elder	O nº de caminhos até o azul é combinação de (5,1), ou seja, (b,b,b,b,d) onde b=baixo e d=direita
52	Amandabm	Então para a bolinha azul são 5, vermelha 7 e verde 10?
53	demanuelvargas19	Isso Amanda
54	Marcos	Isso sim
55	Marcos	Mas o problema é saber quantos caminhos mais curtos existem
57	Elder	Para o ponto vermelho são (4,3), (d,d,d,d,b,b,b)
58	demanuelvargas19	Isso mesmo Elder
59	Elder	todos esses casos têm o caminho mais curto, eles são iguais

2. As interações serão reproduzidas na forma em que foram compartilhadas. Os negritos ou sublinhados são marcadores no discurso que ilustram a análise semântica realizada.

branco da Figura 3). E, em reflexão postada no índice 46, a docente explicita a sua compreensão sobre a métrica do problema: *"Exatamente. Existem caminhos que dão 12 e outros que dão mais. Ele quer o menor. Tá. e daí?????? Nossa... acho que a nossa interpretação estava toda errada depois desta explicação"*. Com o excerto anterior, ilustramos, no índice 52, como *amandabm* mostrou aprender a partir das interações no coletivo virtual constituído.

Na sequência interativa seguinte, *amandabm* tenta compreender uma nova contribuição de *Elder*.

ÍNDICE	AUTOR	MENSAGEM
155	Elder	acho que o nº de é caminhos é 2C(b+d,d) mesmo
156	Wallace	por exemplo, para chegar ao azul, temos q dar 5 passos, sendo 4 para baixo e 1 para a direita
157	**amandabm**	**Nossa, mas aí daria 840 caminhos para o vermelho? É isso mesmo ou errei a fórmula?**
158	Elder	Errou
159	Wallace	bom, para a ida seriam 35 caminhos
160	Wallace	para a volta Tb

Esse é mais um exemplo de como os tipos de interlocução podem aparecer em vários momentos do *chat* em constante alternância e sem uma hierarquia.

Da sequência acima, destacamos as interlocuções: negociativa, interpretativa e avaliativa. No primeiro momento, a negociação acontece entre *Elder* e *Wallace*. Os dois participantes estão levantando as possíveis soluções e *amandabm*, ao tentar entender o que os colegas estão negociando, é avaliada por *Elder* (índice 158), que declara que suas ideias estão erradas, sem continuar a discussão com ela. *Wallace* continua negociando e esclarecendo os colegas *sobre a ideia postada* no índice 155 e, como são 35 caminhos mais curtos para o ponto do taxi vermelho, ele ratifica a contagem, enfatizando que será a mesma quantidade para a volta (índice 160).

Posteriormente, *amandabm* informa (índice 171) como calcular a combinação e *Wallace* lhe esclarece (172) como escrever corretamente a fórmula apresentada por ela.

ÍNDICE	AUTOR	MENSAGEM
171	amandabm	*Digitei errado tb: C = p! / (n-p!)
172	Wallace	amanda, C(n,p)=n!/[(p!)(n-p!)]
173	amandabm	Nossa... Valeu... Errei legal..

Como na sequência ilustrada anteriormente, *Wallace* apenas informa a *amandabm* como escrever corretamente a ideia que ela expressou no índice 171; esse é um exemplo de interlocução informativa. Com os fragmentos apresentados, percebemos como os participantes têm um comprometimento natural com o coletivo (Stahl, 2009), como desenvolvem suas inscrições (Speiser et al., 2003) focadas no raciocínio combinatório e como transformam colaborativamente o seu discurso (Sfard, 2008).

A análise anterior permitiu-nos elencar aspectos que ilustram como os docentes mostraram aprender nas interações efetivadas e também possibilitou-nos ratificar que os três domínios, apesar de possuírem especificidades, podem estar imbricados. A seguir, ilustramos os aspectos identificados e alguns dos fragmentos discursivos que os exemplificam.

Quadro 2 – Domínios do CPD evidenciados na análise

EPISTEMOLÓGICO	MEDIAÇÃO	DIDÁTICO
Discussão de objetos e de relações entre eles.	Utilização de diferentes formas de representação (escrita, pictórica, etc.) para constituir e compartilhar ideias matemáticas e formas de raciocínio.	Utilização de atividades que promovam interação e trabalho colaborativo.
EXEMPLOS DE FRAGMENTOS DISCURSIVOS QUE ILUSTRAM A INTER-RELAÇÃO DOS DOMÍNIOS		
"O nº de caminhos até o azul é combinação de(5,1), ou seja, (b,b,b,b,d) onde b=baixo e d=direita" *"Por exemplo, para chegar ao azul, temos q dar 5 passos, sendo 4 para baixo e 1 para a direita"* *"Existem caminhos que dão 12 e outros que dão mais. Ele quer o menor.. Tá.. e daí?* *Nossa... acho que a nossa interpretação estava toda errada depois desta explicação"* *"Mas o problema é saber quantos caminhos mais curtos existem"* *"C(n,p)=n!/[(p!)(n-p!)]"*		

Considerações finais

Nosso estudo mostrou que interações *on-line* podem contribuir com avanços cognitivos — individuais e coletivos — entre os participantes. Os interlocutores produziram significados e inscrições variadas para o problema em discussão no ambiente virtual. Ao longo do processo interativo, foram refinando seu processo de pensamento e tomando decisões sobre modos de encontrar as menores distâncias para cada trajeto. As inscrições emergentes para o cálculo das menores distâncias estiveram relacionadas ao raciocínio combinatório.

Quanto às quatro propriedades da interlocução, a análise evidenciou que elas podem aparecer em vários momentos da dinâmica interativa. Interlocuções de naturezas diferentes podem produzir resultados distintos e apoiar o desenvolvimento de ideias matemáticas e do raciocínio em diversas maneiras. Por exemplo, apesar da interação informativa de *Wallace* com *amandabm*, corrigindo a fórmula postada por esta última (índice 172), as interações avaliativas discursivas em que *Wallace* e *Elder* se envolveram com *amandabm* não conseguiram ajudar essa participante para distinguir entre permutações e combinações. Diferentes aspectos do pensamento matemático podem emergir nessas interlocuções, porém as de cunho interpretativo e negociativo tendem a constituir um campo discursivo mais rico para a análise de ideias matemáticas emergentes e ressignificadas.

Quanto aos domínios (epistemológico, didático e da mediação) do conhecimento profissional dos professores, no ambiente VMT analisado, os docentes conseguiram fazer o seguinte:

- discutir sobre objetos emergentes nas interações e buscar relações entre eles,
- utilizar diferentes formas de representação para constituir e compartilhar ideias matemáticas e formas de raciocínio, e
- refletir sobre a importância de atividades que promovam a interação e o trabalho colaborativo *on-line*.

Dada a característica rica da atividade (Lo; Gaddis, 2010), foi possível perceber que a tarefa proposta incentivou e facilitou a colaboração e também estimulou o desenvolvimento de um raciocínio focado em perguntas (*"Nossa, mas aí daria 840 caminhos para o vermelho? É isso mesmo ou errei a fórmula?"*) e casos específicos (*"Por exemplo, para chegar ao azul, temos q dar 5 passos, sendo 4 para baixo e 1 para a direita"*) para casos mais gerais (*"Mas o problema é saber quantos caminhos mais curtos existem"*).

Finalmente, é importante ressaltar que os dados sugerem que, entre as quatro propriedades da interlocução, (1) interlocuções interpretativas e negociativas têm um grande potencial no avanço do conhecimento matemático dos interlocutores e (2) a compreensão individual de um sujeito fica impregnada de significados compartilhados com seus interlocutores. Em suma, interlocuções interpretativas e negociativas apoiam mais os participantes para o desenvolvimento de ideias matemáticas e do raciocínio. Essa observação suscita questões de ensino e de formação de professores, no sentido de implementar ambientes virtuais colaborativos que potencializem esse tipo de interlocução nas interações *on-line*. Nessa direção, pesquisas futuras em Educação Matemática precisam continuar estudando como desenvolver o trabalho colaborativo de alunos ou professores, de modo que ele seja ainda mais significativo do ponto de vista do aprendizado matemático (veja, por exemplo, O' Connor et al., 2008).

Referências bibliográficas

ABERDEIN, A. The Informal Logic of Mathematical Proof. In: HERSH, R. (Org.). *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. New York: Springer, 2006. p.56-70.

BAIRRAL, M. A. et al. Análise de interações de estudantes do Ensino Médio em chats. *Educação e Cultura Contemporânea*, v.4, n.7, p.113-138, 2007.

DAVIS, B. *Teaching Mathematics*: Toward a Sound Alternative. New York: Garland, 1996.

DÖRFLER, W. Means for Meaning. In: COBB, P. et al. (Ed.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 99-131.

GATTEGNO, C. *The Science of Education: Part 1*: Theoretical Considerations. New York: Educational Solutions, 1987.

INGLIS, M. et al. Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, v.66, n.1, p. 3-21, 2007.

LEHRER, R. et al. The Interrelated Development of Inscription and Conceptual Understanding. In: COBB, P. et al. (Org.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p.325-360.

LESH, R.; LEHRER, R. Iterative Refinement Cycles for Videotape Analyses of Conceptual Change. In: KELLY, A. E.; LESH, R. (Org.). *Handbook of Research Data Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 665-708.

LO, J.-J.; GADDIS, K. Problem Centered Learning for Prospective Elementary School Teachers: Focusing on Mathematical Tasks. In: REYNOLDS, A. (Org.). *Problem-Centered Learning in Mathematics*: Reaching All Students. Saarbrücken, Germany: Lambert Academic, 2010. p.123-136.

MARTIN, L. C. Growing Mathematical Understanding: Teaching and Learning as Listening and Sharing. In: SPEISER, R. et al. (Org.). *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Snowbird, Utah). Columbus, OH: ERIC, 2001. p.245-253.

MARTIN, L. et al. Collective Mathematical Understanding as Improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, v.8, n.2, p.149-183, 2006.

POWELL, A. B. Socially Emergent Cognition: Particular Outcome of Student-to-Student Discursive Interaction During Mathematical Problem Solving. *Horizontes*, v. 24, n. 1, p. 33-42, 2006.

POWELL, A. B. "*So Let's Prove It!": Emergent and Elaborated Mathematical Ideas and Reasoning in the Discourse and Inscriptions of Learners Engaged in a Combinatorial Task*. Tese (Doutorado) — Department of Learning and Teaching, Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, 2003.

POWELL, A. B.; LAI, F. F. Inscription, Mathematical Ideas, and Reasoning in Vmt. In: STAHL, G. (Org.). *Studying Virtual Math Teams*. New York: Springer, 2009. p. 237-259.

RASMUSSEN, C.; STEPHAN, M. A Methodology for Documenting Collective Activity. In: KELLY, A. E. et al. (Org.). *Handbook of Design Research Methods in Education*: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching. New York: Routledge, 2008.

SALLES, A. T.; BAIRRAL, M. A. Identificando e analisando heurísticas em interações no VMT-Chat. In: BAIRRAL, M. A. (Org.). *Pesquisa, ensino e inovação com tecnologias em educação matemática:* de calculadoras a ambientes virtuais. Rio de Janeiro: Edur, 2012a. p. 117-139. (Série InovaComTic, v. 4).

SALLES, A. T.; BAIRRAL, M. A. Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. *Investigações em Ensino de Ciências* (IENCI), v.17, n.2, p. 453-466, 2012b.

SFARD, A. Symbolizing Mathematical Reality into Being — or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other. In: COBB, P. et al. (Org.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p.37-98.

SFARD, A. *Thinking as Communicating*: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge: Cambridge, 2008.

SPEISER, B. et al. Preservice Teachers Undertake Division in Base Five: How Inscriptions Support Thinking and Communication. In: NEWBORN, D. S. et al. (Org.). *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Athens, Georgia). Columbus, OH: ERIC, 2002. p.1153-1162.

SPEISER, B. et al. Representing Motion: An Experiment in Learning. *The Journal of Mathematical Behavior*, v.22, n.1, p.1-35, 2003.

STAHL, G. Mathematical Discourse as Group Cognition. In: STAHL, G. (Org.). *Studying Virtual Math Teams*. New York: Springer, 2009. p. 31-40

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom Mathematical Practices in Differential Equations. *Journal of Mathematical Behavior*, v.21, p. 459-490, 2002.

STRUIK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover, 1967.

TOULMIN, S. The Uses of Arguments. Cambridge: Cambridge, 1969.

WALTON, D. N. *Dialog Theory for Critical Argumentation*. Philadelphia: John Benjamins, 2007.

WALTON, D. N. *The New Dialectic*. Buffalo, NY: University of Toronto, 1992.

WEBER, K. et al. Learning Opportunities from Group Discussions: Warrants Become the Objects of Debate. *Educational Studies in Mathematics*, v.68, n.3, p. 247-261, 2008.

Recebido em 3 de abril de 2012 e aprovado em 17 de agosto de 2012.