

# Gráficos de controle de EWMA e de $\bar{X}$ para monitoramento de processos autocorrelacionados

FERNANDO ANTONIO ELIAS CLARO  
 ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA  
 MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO  
 UNESP - Guaratinguetá

## Resumo

Este artigo trata dos gráficos de controle de EWMA e de  $\bar{X}$  utilizados no monitoramento de processos cujas observações podem ser descritas por um modelo auto-regressivo de primeira ordem. Os gráficos são planejados levando em conta a correlação em série e utilizando-se o conceito de subgrupos racionais como estratégia de amostragem. As propriedades das cartas de controle são obtidas e comparadas. Os resultados numéricos mostram que a correlação positiva dentro dos subgrupos afeta o desempenho dos gráficos. O gráfico de EWMA é substancialmente mais ágil do que o gráfico de  $\bar{X}$  na detecção de perturbações no processo, especialmente quando tais perturbações geram pequenos desajustes na média.

## Palavras-chave

Autocorrelação, número médio de amostras até o sinal, gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente, modelo autoregressivo de primeira ordem, controle estatístico do processo.

## *EWMA and $\bar{X}$ control charts for the monitoring of autocorrelated processes*

## Abstract

*In this paper the EWMA and the  $\bar{X}$  control charts are considered for monitoring processes in which the observations can be represented as a first order autoregressive model. The charts are designed taking the serial correlation into account and the sampling strategy is set based on the rational subgroup concept. The control charts properties are studied and compared. Numerical results show that the positive correlation within-subgroup has a significant impact on the charts performance. The EWMA chart is substantially more efficient than the  $\bar{X}$  chart in detecting process disturbances, especially when the mean shifts are of small magnitude.*

## Key words

*Autocorrelation, average run length, exponentially weighted moving average control chart, first order autoregressive model, statistical process control.*

## INTRODUÇÃO

O gráfico de controle de Shewhart é uma regra de decisão estatística tomada com base nas observações de um processo para determinar se a característica de qualidade sendo monitorada desviou-se de seu valor-alvo. Esta forma de monitoramento é comum na indústria, pois serve para distinguir causas comuns de causas especiais de variação, identificar o instante em que o processo foi alterado, entender a causa-raiz do desajuste e melhorar o processo prevenindo reincidências. Cartas de controle são habitualmente planejadas e avaliadas assumindo que observações consecutivas do processo são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), entretanto esta hipótese é freqüentemente violada na prática, pois a maioria dos processos apresenta autocorrelação. Os processos de manufatura, em geral, são regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre observações torna-se pequeno em relação a estas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo (MONTGOMERY, 2001).

Se a autocorrelação na variável sob monitoramento é uma causa especial, deve-se tentar eliminá-la. Por outro lado, se ela é parte inerente da variabilidade resultante de causas comuns e não pode ser removida, deve-se levá-la em consideração no planejamento das cartas de controle, evitando-se estimativas incorretas de seus parâmetros, que refletem em aumento na taxa de alarmes falsos ou no número de amostras necessárias para detecção de deslocamentos na média do processo (VANDER WIEL, 1996; REYNOLDS; LU, 1997; VAN BRACKLE, III; REYNOLDS, 1997; LU; REYNOLDS, 1999). Na presença de correlação, os métodos clássicos utilizados na obtenção dos limites naturais de tolerância e índice de capacidade de processo devem ser revistos (ZHANG, 1998; KNOTH; AMIN, 2003; RAMOS; HO, 2003). Quando dados de um processo são autocorrelacionados, diversas opções de monitoramento têm sido consideradas. Como em muitas aplicações a dinâmica do processo faz com que observações consecutivas ou próximas tornem-se correlacionadas, uma forma de se evitar tal dependência é aumentar o intervalo de tempo entre observações, com a conseqüente desvantagem de não se aplicar o conceito de subgrupo racional. O uso de gráficos de controle com limites "alargados" tem sido uma outra opção. Vasilopoulos e Stamboulis (1978) desenvolveram fatores de correção para as constantes  $A$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$ , tornando-as aplicáveis a obtenção dos limites de controle de estatísticas cuja dependência ao longo do tempo é descrita por modelo auto-regressivo de primeira ou segunda ordem.

Uma estratégia freqüentemente utilizada consiste em ajustar as observações da característica de qualidade a um modelo de previsão apropriado e monitorar o processo com cartas de controle para os resíduos i.i.d. resultantes (MON-

TGOMERY; MASTRANGELO, 1991; SUPERVILLE; ADAMS, 1994; ZHANG, 1997; ENGLISH *et al.*, 2000; KOEHLER *et al.*, 2001; TESTIK, 2005). Esta forma de monitoramento, entretanto, apresenta inconvenientes:

- cartas de controle de Shewhart que utilizam resíduos como estatística de monitoramento têm baixo desempenho quando o modelo do processo é AR(1), pois logo após o desajuste há grande discrepância entre os valores previstos e observados. Entretanto, no instante seguinte, os valores previstos acompanham o deslocamento da média e os resíduos diminuem significativamente (WARDELL *et al.*, 1994);
- o gráfico não é adequado para a detecção de pequenos deslocamentos em processos com correlação média e positiva (HARRIS; ROSS, 1991);
- sua interpretação é difícil para uma boa parte dos técnicos que atuam no "chão-de-fábrica";
- ajustar e manter um modelo de séries temporais apropriado para cada variável do processo requer considerável esforço (FALTIN *et al.*, 1997).

**S**e a autocorrelação na variável sob monitoramento é uma causa especial, deve-se tentar eliminá-la.

Neste cenário, em numerosas aplicações, especialmente naquelas em que o nível de correlação não é muito alto, é desejável, tanto do ponto de vista prático como estatístico, empregar uma carta de controle que use as observações originais, neste caso, é necessário determinar a autocorrelação e levá-la em conta na determinação dos parâmetros do gráfico (VAN BRACKLE, III; REYNOLDS, 1997). O controle de processos autocorrelacionados utilizando-se subgrupos formados com observações originais tem também sido objeto de pesquisa (ALWAN; RADSON, 1992; RUNGER; WIL-LEMAIN, 1995/1996; GILBERT *et al.*, 1997). Com esta estratégia é de se esperar que, uma vez levada em conta a autocorrelação, quando da obtenção dos limites de controle, a carta possa ser utilizada seguindo as instruções gerais, estabelecidas para processos com dados independentes. Este é o principal fator de motivação ao desenvolvimento da presente pesquisa.

## O MODELO DO PROCESSO

O propósito deste artigo é abordar o monitoramento de processos autocorrelacionados com observações coletadas em subgrupos racionais, como é freqüentemente o caso, principalmente em indústrias de processos. O modelo em

questão foi uma das variantes da pesquisa de Alwan e Radson (1992). Para capturar a variabilidade inerente de curto-prazo, cada subgrupo racional é constituído de unidades produzidas quase num mesmo instante, cuja dependência deve ser modelada. Como o intervalo entre amostras deve ser grande o suficiente para que todas as fontes potenciais de variação no processo possam atuar, a autocorrelação entre subgrupos é considerada desprezível. Neste artigo considera-se que as observações da característica de qualidade a ser monitorada são representadas por um modelo auto-regressivo de primeira ordem, comum em aplicações (MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991; SUPERVILLE; ADAMS, 1994; RUNGER; WILLEMAIN, 1995/1996; ATIENZA *et al.*, 1998; TESTIK, 2005; TIMMER *et al.*, 2000-01). As observações  $X_t$  para um processo auto-regressivo de primeira ordem são dadas por (MORETTIN; TOLOI, 2004 – p. 114):

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

onde  $\mu$  é a média do processo,  $\phi$  é o coeficiente auto-regressivo e  $\varepsilon_t$  é o erro aleatório, i.i.d.,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Sem perda de generalidade, em nosso estudo adotamos  $\mu_0 = 0$ . A variância do modelo AR(1) é expressa por (MORETTIN; TOLOI, 2004 – p. 118/119):

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi^2) \quad (2)$$

e a função autocovariância dada por:

$$\gamma_k = \phi^k \sigma_{\bar{X}}^2 \quad (3)$$

No presente estudo considera-se que os parâmetros do modelo auto-regressivo são conhecidos e que a autocorrelação é positiva. A escolha da magnitude da autocorrelação, de baixa a moderadamente alta, objetiva estudar o efeito desta nas propriedades das cartas de controle tradicionais; a condição na qual o processo está próximo da não-estacionariedade não é considerada (LU; REYNOLDS, 1999). Neste trabalho, propõe-se o uso dos gráficos de Médias e da Média Móvel Ponderada Exponencialmente (Exponentially Weighted Moving Average-EWMA) com limites de controle adaptados à existência da correlação no modelo do processo. A carta de controle de Médias é a mais conhecida das ferramentas de monitoramento de processos, contudo, ela serve apenas para detectar grandes perturbações na média. O gráfico de EWMA, por outro lado, é comumente utilizado quando o processo está sujeito a pequenas perturbações. O gráfico das Somas Acumuladas (Cumulative Sum- CUSUM) também tem sido considerado para monitorar processos com dependência em série

(TIMMER *et al.*, 2000-01; VANDER WIEL, 1996). Como trabalhos previamente publicados evidenciam que as cartas de controle de EWMA e de CUSUM têm desempenho similar (veja por exemplo, VAN BRACKLE, III; REYNOLDS, 1997; HARRIS; ROSS, 1991), no presente artigo optou-se pela primeira em favor de sua maior simplicidade. O desempenho das cartas de controle de médias e de EWMA, para o modelo em consideração, é comparado com base no Número Médio de Amostras até o Sinal (NMA), habitualmente adotado como medida de desempenho quando o intervalo de tempo entre amostragens é fixo. Quando o processo está em controle qualquer sinal dado pelo gráfico é um alarme falso, portanto, neste caso, o NMA deve ser suficientemente grande para que a taxa de alarmes falsos seja pequena. Com o processo em controle, o Número Médio de Amostras até o sinal é dado pelo  $NMA_0$ . Nas tabelas em que se compara os NMAs dos gráficos de  $\bar{X}$  e de EWMA estabeleceu-se  $NMA_0=500$ . Quando existe um desajuste na média do processo, o NMA deve ser baixo, de forma que se possa detectá-lo rapidamente. O deslocamento da média pode ocorrer aleatoriamente a qualquer tempo no futuro, após o início da aplicação da carta de controle. O deslocamento da média, expresso em unidades do desvio-padrão da série, é dado por  $\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma_x$ .

### O GRÁFICO DE CONTROLE DE $\bar{X}$ PARA PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

As propriedades do gráfico de médias foram determinadas segundo metodologia apresentada em Costa *et al.* (2005), entretanto, com o desvio-padrão da amostra levando em conta a autocorrelação e calculado pela expressão:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n} \left[ \sigma_x^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \gamma_k \right] \quad (4)$$

Esta fórmula foi também previamente empregada em Vasilopoulos e Stamboulis (1978), veja página 22, equação (3.1), e pode ser obtida por substituições recursivas a partir da equação definidora do modelo. O gráfico  $\bar{X}$  tem linha central em  $\mu_0$  e limites de controle (LC) dados por  $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$ .

### O GRÁFICO DE EWMA PARA PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

A escolha pela carta de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente (Exponentially Weighted Moving Average – EWMA) é indicada quando se deseja detectar pequenos deslocamentos na média do processo. Embora o uso do gráfico seja mais comumente feito com observações individuais, ele pode também ser empregado para médias plotando-se valores da estatística  $Y_i$ :

$$Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda) Y_{i-1} \quad (5)$$

e limites de controle dados por:

$$LC = \mu_0 \pm k \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)} \quad (6)$$

onde:  $0 < \lambda \leq 1$  e  $Y_0 = \mu_0$ .

Para baixos valores de  $\lambda$ , o gráfico detecta pequenos desajustes com maior rapidez, fazendo com que dados históricos tenham peso grande no cálculo de  $Y_i$  e, inversamente, valores altos de  $\lambda$  fazem com que a última observação tenha o maior peso no cálculo de  $Y_i$ . As propriedades do gráfico de EWMA para o modelo considerado neste estudo foram obtidas por meio de Cadeias de Markov seguindo o procedimento proposto por Saccuci & Lucas (1990), descrito sumariamente a seguir.

A região em controle no gráfico é dividida em  $[t=2m+1]$  subintervalos de largura  $2\Delta$ . O estado absorvente da cadeia é alcançado sempre que a estatística  $Y_i$  tiver seu valor fora dos limites de controle. O  $j$ -ésimo estado transiente é alcançado sempre que a estatística  $Y_i$  tiver seu valor no intervalo:

$$S_j - \Delta < Y_i \leq S_j + \Delta \quad (7)$$

onde  $S_j$  representa o ponto médio do  $j$ -ésimo intervalo e  $-m \leq j \leq m$ . O número médio de amostras até o sinal é dado por:

$$NMA = \mathbf{p}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (8)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de probabilidades iniciais após o processo ter alcançado o regime estacionário (*steady state probabilities*),  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade ( $t \times t$ ),  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna ( $t \times 1$ ) de uns e  $\mathbf{R}$  é a submatriz de probabilidades de transição, isto é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{-m,-m} & P_{-m,-m+1} & \cdot & \cdot & P_{-m,m} \\ P_{-m+1,-m} & P_{-m+1,-m+1} & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} \\ P_{m,-m} & \cdot & \cdot & P_{m,m-1} & P_{m,m} \end{bmatrix}$$

onde:

$$P_k = \Pr \left\{ \lambda^{-1} [(S_k - \Delta) - (1 - \lambda) S_j] \leq \bar{X}_i \leq \lambda^{-1} [(S_k + \Delta) - (1 - \lambda) S_j] \right\} \quad (9)$$

O vetor de probabilidades iniciais  $\mathbf{p}$  é obtido resolvendo o sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{R}$  sujeito a  $\mathbf{1}^T \mathbf{p} = 1$  (ver ÇINLAR, 1975) onde:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

No presente estudo, a região de controle do gráfico foi dividida em 100 partes, resultando portanto uma cadeia de Markov com 100 estados transientes. Adicionalmente, as probabilidades de transição foram obtidas levando-se em conta a autocorrelação. Os limites de controle do gráfico de EWMA, que levam em conta a autocorrelação dentro do subgrupo, para  $n = \{3, 4, 5\}$  e  $\phi = \{0, 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$  estão na Tabela 1.

Tabela 1: Limites de controle para o Gráfico de EWMA.

| n | λ    | φ      |        |        |        |        |
|---|------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   |      | 0,00   | 0,20   | 0,40   | 0,60   | 0,80   |
| 3 | 0,25 | 0,6543 | 0,7594 | 0,9146 | 1,1685 | 1,7216 |
|   | 0,50 | 1,0238 | 1,1880 | 1,4309 | 1,8281 | 2,6934 |
|   | 0,75 | 1,3809 | 1,6023 | 1,9300 | 2,4657 | 3,6328 |
| 4 | 0,25 | 0,5667 | 0,6710 | 0,8273 | 1,0903 | 1,6615 |
|   | 0,50 | 0,8866 | 1,0497 | 1,2944 | 1,7058 | 2,5994 |
|   | 0,75 | 1,1958 | 1,4158 | 1,7458 | 2,3006 | 3,5060 |
| 5 | 0,25 | 0,5068 | 0,6063 | 0,7605 | 1,0245 | 1,6071 |
|   | 0,50 | 0,7930 | 0,9486 | 1,1898 | 1,6029 | 2,5143 |
|   | 0,75 | 1,0695 | 1,2795 | 1,6047 | 2,1620 | 3,3912 |

**RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Os valores de NMA para os gráficos de controle de EWMA e de  $\bar{X}$  foram determinados considerando-se  $\phi = \{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$  e são apresentados nas Tabelas de 2 a 4, respectivamente para  $n=\{3,4,5\}$ . Na carta de controle de médias, o aumento da magnitude da autocorrelação provoca perda no poder do gráfico, por exemplo, para

$\delta=1,5$  e  $n=3$ , o NMA aumenta de 3,2 quando  $\phi = 0$  para 9,8 quando  $\phi = 0,6$  (ver Tabela 2). Para níveis de correlação entre baixo e moderado, a melhora no desempenho da carta com o aumento do tamanho da amostra é mais efetiva; por exemplo, para  $\delta=0,75$  e  $\phi=0,40$ , quando se aumenta o tamanho da amostra de  $n=3$  para  $n=5$ ; o NMA se reduz de 52,7 para 32,6 (ver Tabelas 2 e 4).

Da análise dos resultados obtidos para o gráfico de

**Tabela 2: NMA para os gráficos de EWMA e  $\bar{X}$ ,  $n=3$ .**

| $\phi$ | GRÁFICO   | $\lambda$ | $\delta$ |       |       |      |      |      |      |      |
|--------|-----------|-----------|----------|-------|-------|------|------|------|------|------|
|        |           |           | 0,00     | 0,25  | 0,50  | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 2,00 |
| 0,00   | EWMA      | 0,25      | 500,0    | 64,4  | 14,6  | 6,8  | 4,3  | 3,2  | 2,6  | 1,9  |
|        |           | 0,50      | 500,0    | 116,3 | 25,0  | 9,0  | 4,7  | 3,1  | 2,3  | 1,6  |
|        |           | 0,75      | 500,0    | 175,9 | 44,2  | 14,8 | 6,6  | 3,7  | 2,5  | 1,5  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0    | 240,9 | 76,3  | 27,3 | 11,5 | 5,6  | 3,2  | 1,5  |
| 0,20   | EWMA      | 0,25      | 500,0    | 83,0  | 19,2  | 8,5  | 5,2  | 3,8  | 3,0  | 2,2  |
|        |           | 0,50      | 500,0    | 144,9 | 34,3  | 12,4 | 6,2  | 3,9  | 2,8  | 1,9  |
|        |           | 0,75      | 500,0    | 209,8 | 60,2  | 21,2 | 9,4  | 5,1  | 3,3  | 1,8  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0    | 276,0 | 100,3 | 39,0 | 17,2 | 8,5  | 4,8  | 2,1  |
| 0,40   | EWMA      | 0,25      | 500,0    | 103,6 | 24,8  | 10,7 | 6,4  | 4,5  | 3,5  | 2,5  |
|        |           | 0,50      | 500,0    | 174,2 | 45,8  | 16,7 | 8,2  | 5,0  | 3,5  | 2,2  |
|        |           | 0,75      | 500,0    | 242,4 | 78,6  | 29,4 | 13,2 | 7,1  | 4,4  | 2,3  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0    | 306,4 | 125,5 | 52,7 | 24,3 | 12,4 | 6,9  | 2,9  |
| 0,60   | EWMA      | 0,25      | 500,0    | 125,2 | 31,5  | 13,2 | 7,7  | 5,3  | 4,1  | 2,8  |
|        |           | 0,50      | 500,0    | 202,5 | 58,8  | 22,1 | 10,7 | 6,3  | 4,3  | 2,6  |
|        |           | 0,75      | 500,0    | 271,7 | 98,4  | 39,1 | 18,0 | 9,6  | 5,8  | 2,9  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0    | 332,9 | 151,4 | 68,4 | 33,1 | 17,3 | 9,8  | 4,0  |
| 0,80   | EWMA      | 0,25      | 500,0    | 147,1 | 39,1  | 16,3 | 9,2  | 6,2  | 4,7  | 3,2  |
|        |           | 0,50      | 500,0    | 229,2 | 73,0  | 28,4 | 13,7 | 7,9  | 5,3  | 3,0  |
|        |           | 0,75      | 500,0    | 297,7 | 119,0 | 50,1 | 23,8 | 12,7 | 7,6  | 3,6  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0    | 355,3 | 176,9 | 85,3 | 43,2 | 23,4 | 13,5 | 5,4  |

EWMA conclui-se que, quando o nível de autocorrelação aumenta o poder de detecção da carta de controle é reduzido; por exemplo, para  $n=4$ ,  $\delta=1,0$  e  $\lambda=0,25$  o NMA aumenta de 4,4 quando  $\phi=0,20$  para 6,8 quando  $\phi=0,60$  (ver Tabela 3). A constante de alisamento exerce influência significativa no poder de detecção da carta; os melhores resultados são obtidos com  $\lambda=0,25$  para desajustes de baixa magnitude, e com  $\lambda=0,75$  quando as perturbações são mais expressivas.

Comparando-se as duas estratégias de monitoramento conclui-se que:

- Em ambos os casos a correlação positiva reduz a capacidade do gráfico em detectar desajustes na média do processo;
- Em quaisquer dos níveis de correlação e de desajuste da média do processo adotados neste estudo, o poder do gráfico de EWMA é substancialmente maior do que o

Tabela 3: NMA para os gráficos de EWMA e  $\bar{X}$ ,  $n=4$ .

| $\phi$ | GRÁFICO   | $\lambda$ |       |       |       | $\delta$ |      |      |      |      |
|--------|-----------|-----------|-------|-------|-------|----------|------|------|------|------|
|        | TIPO      |           | 0,00  | 0,25  | 0,50  | 0,75     | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 2,00 |
| 0,00   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 47,8  | 11,0  | 5,4      | 3,6  | 2,7  | 2,2  | 1,7  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 88,5  | 17,3  | 6,4      | 3,6  | 2,5  | 1,9  | 1,4  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 140,2 | 30,5  | 9,9      | 4,5  | 2,7  | 1,9  | 1,2  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 201,6 | 54,6  | 17,9     | 7,2  | 3,6  | 2,1  | 1,2  |
| 0,20   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 65,0  | 14,8  | 6,8      | 4,4  | 3,2  | 2,6  | 1,9  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 117,2 | 25,2  | 9,1      | 4,8  | 3,1  | 2,3  | 1,6  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 177,0 | 44,7  | 15,0     | 6,7  | 3,8  | 2,5  | 1,5  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 241,8 | 76,9  | 27,6     | 11,6 | 5,7  | 3,2  | 1,6  |
| 0,40   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 86,1  | 20,0  | 8,8      | 5,4  | 3,9  | 3,1  | 2,2  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 149,5 | 36,0  | 13,0     | 6,5  | 4,1  | 2,9  | 1,9  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 215,1 | 62,9  | 22,4     | 10,0 | 5,4  | 3,4  | 1,9  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 280,7 | 104,0 | 40,9     | 18,1 | 9,0  | 5,1  | 2,2  |
| 0,60   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 111,2 | 27,1  | 11,5     | 6,8  | 4,8  | 3,7  | 2,6  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 184,4 | 50,2  | 18,5     | 9,0  | 5,4  | 3,8  | 2,3  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 253,0 | 85,5  | 32,7     | 14,8 | 7,9  | 4,8  | 2,5  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 316,3 | 134,7 | 58,1     | 27,3 | 14,0 | 7,9  | 3,2  |
| 0,80   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 139,1 | 36,2  | 15,1     | 8,6  | 5,9  | 4,4  | 3,0  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 219,6 | 67,7  | 25,9     | 12,5 | 7,3  | 4,9  | 2,9  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 288,5 | 111,4 | 46,0     | 21,5 | 11,5 | 6,9  | 3,3  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 347,6 | 167,7 | 79,0     | 39,4 | 21,0 | 12,0 | 4,8  |

do gráfico de médias. Neste sentido, a diferença entre as estratégias aumenta quando na carta de controle de EWMA se adota uma constante de alisamento ( $\lambda$ ) de baixo valor;

- Com ambas as estratégias de monitoramento, se o nível de correlação é baixo ou moderado, verifica-se um aumento do poder do gráfico ao se aumentar o tamanho de amostra; entretanto o inverso ocorre se a correlação for moderadamente alta.

**Exemplo**

O propósito do exemplo seguinte é mostrar o efeito da autocorrelação sobre o poder de detecção dos gráficos de  $\bar{X}$  e de EWMA. Com esta finalidade, observações de um processo AR(1), com resíduo  $\epsilon$ , dado por uma distribuição  $N(0,1)$  e  $\phi = 0,4$ , foram simuladas segundo o conceito de subgrupo racional e assumindo inicialmente o processo em controle com  $\mu_0 = 0$ . As observações da característica de qualidade de interesse  $X$  foram obtidas com o auxílio

**Tabela 4: NMA para os gráficos de EWMA e  $\bar{X}$ ,  $n=5$ .**

| $\phi$ | GRÁFICO   | $\lambda$ |       |       |       | $\delta$ |      |      |      |      |
|--------|-----------|-----------|-------|-------|-------|----------|------|------|------|------|
|        | TIPO      |           | 0,00  | 0,25  | 0,50  | 0,75     | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 2,00 |
| 0,0    | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 37,6  | 8,8   | 4,5      | 3,1  | 2,4  | 2,0  | 1,5  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 70,2  | 13,1  | 5,1      | 2,9  | 2,1  | 1,7  | 1,2  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 115,0 | 22,6  | 7,2      | 3,4  | 2,1  | 1,6  | 1,1  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 172,0 | 41,1  | 12,7     | 5,1  | 2,6  | 1,6  | 1,1  |
| 0,20   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 52,7  | 12,0  | 5,8      | 3,8  | 2,9  | 2,3  | 1,8  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 97,0  | 19,5  | 7,2      | 3,9  | 2,7  | 2,0  | 1,4  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 151,5 | 34,6  | 11,3     | 5,1  | 3,0  | 2,0  | 1,3  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 214,4 | 61,1  | 20,6     | 8,4  | 4,2  | 2,4  | 1,3  |
| 0,40   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 73,1  | 16,7  | 7,6      | 4,8  | 3,5  | 2,8  | 2,1  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 130,0 | 29,3  | 10,5     | 5,4  | 3,5  | 2,6  | 1,7  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 192,5 | 51,6  | 17,7     | 7,9  | 4,3  | 2,8  | 1,6  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 258,1 | 87,5  | 32,6     | 14,0 | 6,9  | 3,9  | 1,8  |
| 0,60   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 99,5  | 23,6  | 10,2     | 6,1  | 4,4  | 3,4  | 2,4  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 168,5 | 43,4  | 15,8     | 7,8  | 4,8  | 3,4  | 2,1  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 236,3 | 74,9  | 27,7     | 12,4 | 6,6  | 4,1  | 2,2  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 300,8 | 120,5 | 49,9     | 22,8 | 11,5 | 6,5  | 2,7  |
| 0,80   | EWMA      | 0,25      | 500,0 | 131,8 | 33,7  | 14,1     | 8,1  | 5,6  | 4,2  | 2,9  |
|        |           | 0,50      | 500,0 | 210,7 | 62,9  | 23,9     | 11,5 | 6,8  | 4,6  | 2,7  |
|        |           | 0,75      | 500,0 | 279,8 | 104,5 | 42,3     | 19,6 | 10,5 | 6,3  | 3,1  |
|        | $\bar{X}$ |           | 500,0 | 340,1 | 159,1 | 73,3     | 36,0 | 19,0 | 10,8 | 4,3  |

da planilha eletrônica Excel conforme segue:

- Gerou-se uma amostra de 1100 valores com distribuição  $N(0,1)$  para representar os resíduos;
- Usando-se estes resíduos e a equação definidora do modelo foram obtidas 1100 observações (considerado  $\mu_0 = 0$ );
- Considerou-se que as primeiras 100 observações seriam provenientes de um período de estabilização do processo e optou-se por não utilizá-las para formar subgrupos;
- A partir da observação 101 os subgrupos de tamanho  $n=5$  começaram a ser formados. Adotaram-se como “frequência de amostragem” 15 observações entre cada dois subgrupos, ou seja, de cada 20 observações, as primeiras cinco foram usadas para compor o subgrupo e as demais foram desprezadas;
- A autocorrelação entre subgrupos foi eliminada graças ao espaçamento de 15 observações entre subgrupos consecutivos.

A carta de controle de  $\bar{X}$  foi construída com o desvio-padrão do processo estimado por  $\bar{R}/d_2$ , sendo  $\bar{R}$  a amplitude amostral média de 50 subgrupos. Os limites de controle (LC), ignorando a correlação em série, foram determinados por  $LC = \bar{X} \pm \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$  (COSTA *et al.*, 2005) com  $\bar{R} = 2,1752$  e  $d_2 = 2,326$ , encontrando-se  $LC = \pm 1,2551$ , veja Figura 1. A ocorrência de médias além dos limites de controle (amostras 9, 11 e 23) indica que quando a correla-

ção não é reconhecida no estabelecimento dos limites, eles se tornam muito apertados e a probabilidade de alarmes falsos é alta.

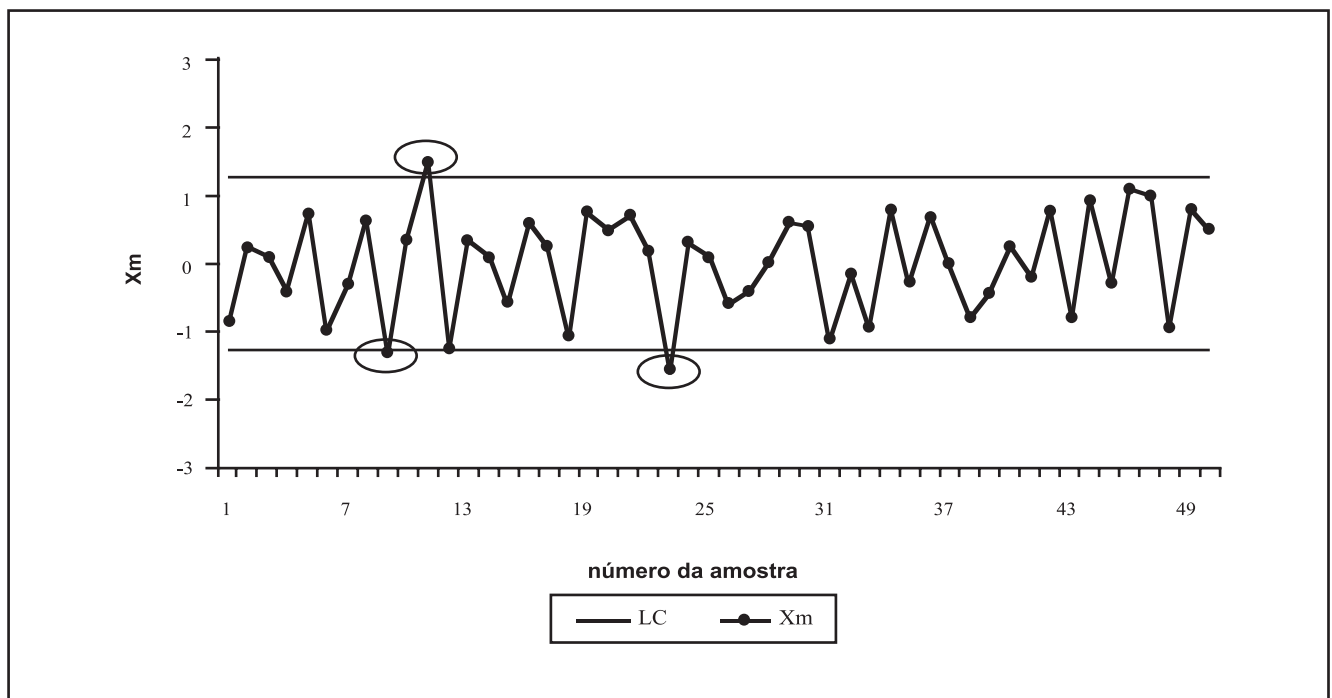
Assim, depois da observação de número 700 (trigésima amostra) gerou-se uma seqüência adicional de 400 valores de  $X$ , agora com o processo desajustado ( $\mu_1 = 1\sigma_X$ ). Esta perturbação foi assinalada pela amostra 43 (número de amostras até o sinal=13), veja Figura 2.

Finalmente, a estratégia de monitoramento do processo usando o gráfico de EWMA foi investigada. Com o mesmo coeficiente auto-regressivo, tamanho de amostra e o conjunto anterior de observações, e adotando-se constante de alisamento  $\lambda = 0,50$ , a perturbação no processo foi detectada pela amostra 34 (número de amostras até o sinal = 4), veja Figura 3, substancialmente mais rápido que com a carta de controle de  $\bar{X}$ .

## CONCLUSÃO

Na maioria das aplicações considera-se que as medidas da variável de interesse são independentes. Entretanto, a presença de autocorrelação positiva em “lags” baixos é muito comum em processos discretos de manufatura, onde, dados os avanços nas tecnologias de automação e medição, as observações são tomadas a intervalos muito curtos. A correlação em série, quando inerente ao processo, requer que os limites de controle sejam revisados de forma a tornar

Figura 1: Gráfico de médias ( $X_m$ ), autocorrelação não reconhecida ( $n=5$ ).





confiável o dispositivo de controle. Conforme reportado por Alwan (1995), “observa-se que com frequência muito superior à que se possa imaginar, limites de controle estão

incorretamente estabelecidos. Em uma amostra de 235 aplicações de gráficos de controle tomadas de material de treinamento em Controle Estatístico do Processo (CEP)

Figura 2: Carta de Controle de Médias ( $\bar{X}_m$ ) para o processo autocorrelacionado ( $n=5$ ).

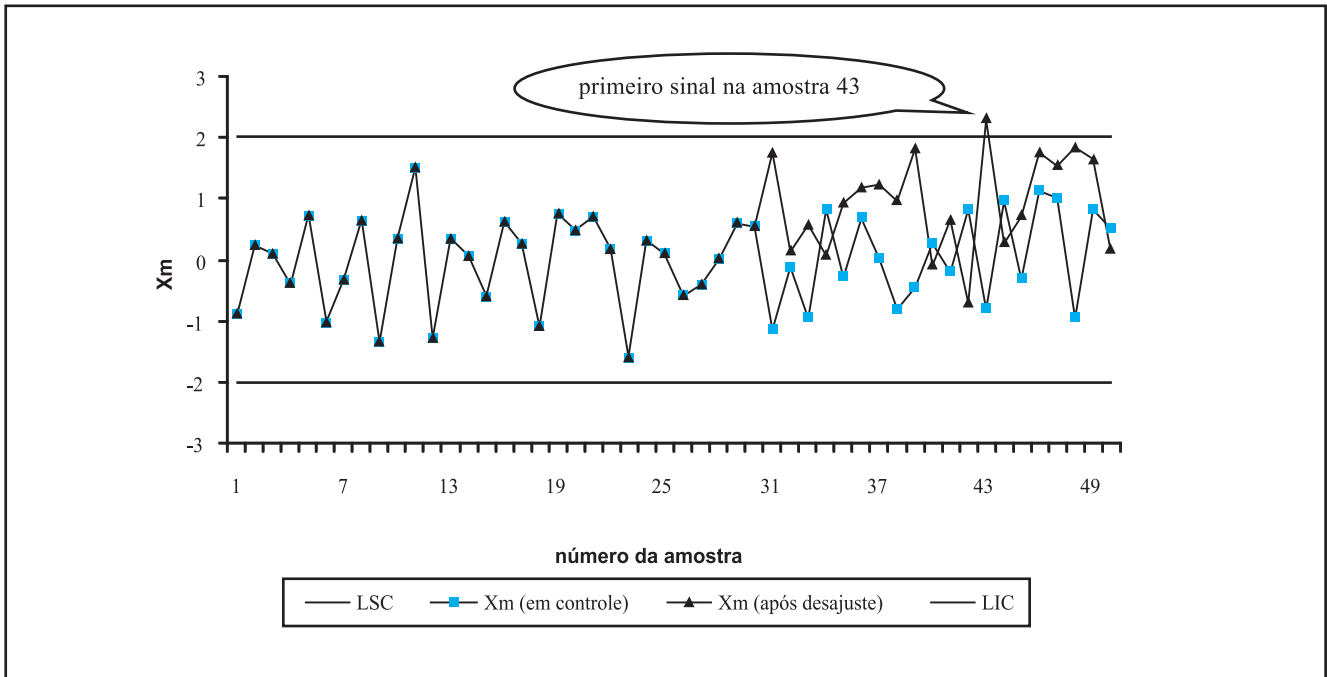
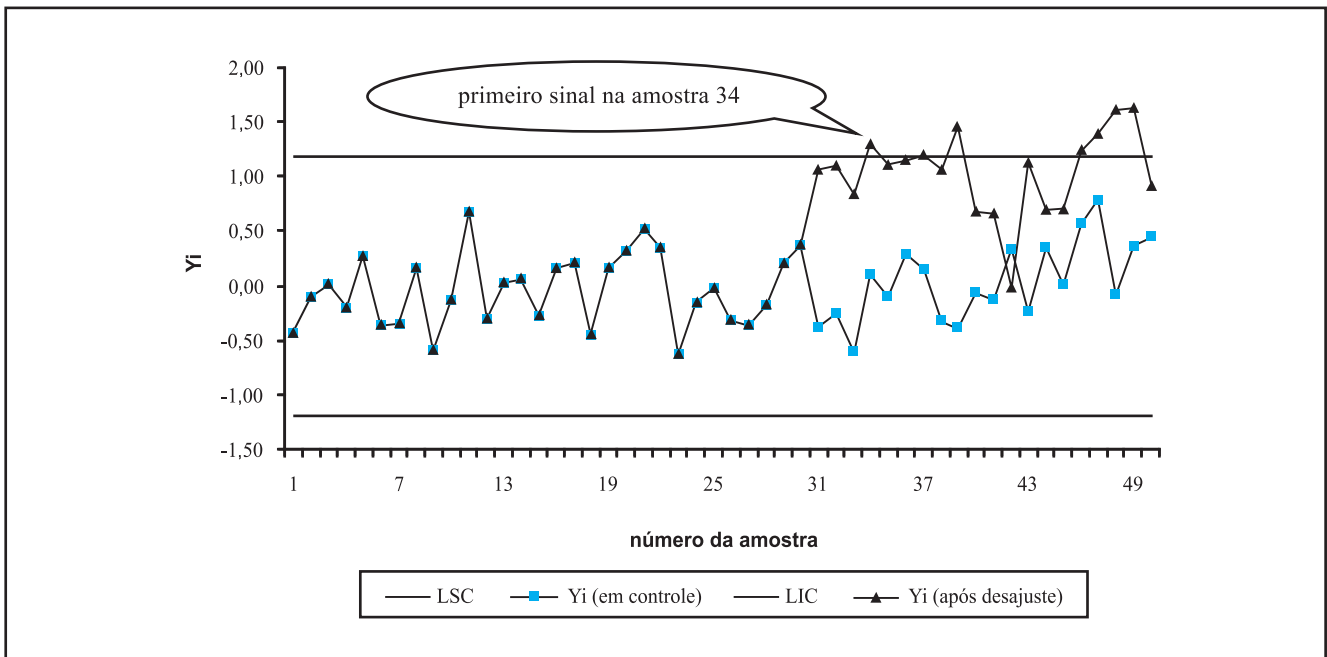


Figura 3: Carta de Controle de EWMA ( $Y_i$ ) para o processo autocorrelacionado ( $n=5$ ).



e outras fontes para as quais se esperava considerável sofisticação, descobriu-se que mais de 85% das cartas de controle estariam sendo utilizadas de forma equivocada". Em numerosas aplicações do CEP faz-se uso da formação de subgrupos espaçados entre si, porém com as observações dentro dos subgrupos apresentando dependência em série, o que desaconselha o uso mecânico da carta de controle. Modelos e soluções, específicas a esta situação, não são facilmente encontradas. No presente artigo, é assumido que observações sucessivas coletadas do processo se ajustam ao modelo AR(1), e quando agrupadas em subgrupos racionais introduzem dependência dentro da amostra. Sabe-se que mesmo níveis moderados de autocorrelação têm efeito significativo na incidência de alarmes falsos. Portanto, neste

caso a metodologia tradicional de gráficos de controle não pode ser aplicada.

Após ajustar os limites de controle dos gráficos de  $\bar{X}$  e de EWMA, para se ter, em média, um alarme falso a cada 500 pontos plotados, mediu-se a eficiência destes dispositivos estatísticos. Embora seja de aplicação inerentemente simples e uma ferramenta de inegável valor na melhoria de processos, uma das grandes desvantagens da carta de médias encontra-se em sua limitada capacidade de detecção de pequenos e médios deslocamentos na média do processo (alto NMA). A carta de EWMA mostrou-se como uma alternativa eficiente em recuperar parte do poder do gráfico perdido pela existência de autocorrelação na variável sob monitoramento.

Artigo recebido em 06/06/2007

Aprovado para publicação em 09/11/2007

## Referências

- ALWAN, L. C.; RADSON, D. Time-series investigation of subsample mean charts, *IIE Transactions*, v. 24, p. 66-80, 1992.
- ALWAN, L. C. The Problem of Misplaced Control Limits. *Applied Statistics*, v. 44, p. 269-278, 1995.
- ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W. A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, v. 30, p. 340-350, 1998.
- ÇINLAR, E. *Introduction to Stochastic Processes*, 1. ed., New Jersey: Prentice Hall, 1975, 402 p.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 334 p., 2005.
- ENGLISH, J. R.; LEE, S.-C.; MARTIN, T. W.; TILMON, C. Detecting changes in autoregressive processes with  $\bar{X}$  and EWMA charts. *IIE Transactions*, v. 32, p. 1103-1113, 2000.
- FALTIN, F.; MASTRANGELO, C. M.; RUNGER, G. C.; RYAN, T. P. Considerations in the monitoring of autocorrelated and independent data. *Journal of Quality Technology*, v. 29, p. 131-133, 1997.
- GILBERT, K.C.; KIRBY, K.; HILD, C.R.; Charting autocorrelated data: guidelines for practitioners; *Quality Engineering*, v. 9, p. 367-382; 1997.
- HARRIS, T. J.; ROSS, W. H. Statistical Process Control procedures for correlated observations. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 69, p. 48-57, 1991.
- KNOTH, S.; AMIN, R. W. Autocorrelation and tolerance limits. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 73, p. 467-489, 2003.
- KOEHLER, A. B.; MARKS, N. B.; O'CONNELL, R. T. EWMA control charts for autoregressive processes. *Journal of the Operational Research Society*, v. 52, p. 699-707, 2001.
- LU, C.-W.; REYNOLDS, M. R. Jr.; EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, v. 31, p. 166-188, 1999.
- MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 4. ed., New York: John Wiley and Sons, 674 p., 2001.
- MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. *Journal of Quality Technology*, v. 23, p. 179-193, 1991.
- MORETTIN, P.A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 535 p., 2004.
- RAMOS, A. W.; HO, L. L. Procedimentos inferenciais em índices de capacidade para dados autocorrelacionados via bootstrap. *Produção*, v. 13, p. 50-62, 2003.
- REYNOLDS, M. R. Jr.; LU, C.-W. Control charts for monitoring processes with autocorrelated data. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, v. 30, p. 4059-4067, 1997.
- RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Model-based and Model-Free control of autocorrelated process. *Journal of Quality Technology*, v. 27, p. 283-292, 1995.
- RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Batch-means control charts for autocorrelated data. *IIE Transactions*, v. 28, p. 483-487, 1996.
- SACCUCI, M. S.; LUCAS, J. L. Average run lengths for Exponentially Weighted Moving Average control schemes using the Markov chain approach. *Journal of Quality Technology*, v. 22, p. 154-162, 1990.
- SUPERVILLE, C. R.; ADAMS, B. M. An evaluation of forecast-based quality control schemes. *Communications in Statistics-Simulation and computation*, v. 23, p. 645-661, 1994.
- TESTIK, M. C. Model Inadequacy and Residual Control Charts for autocorrelated processes. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 21, p. 115-130, 2004.
- TIMMER, D. H.; PIGNATIello JR., J. J.; LONGNECKER, M. T. Applying an AR(1) CUSUM control chart to data from a chemical process. *Quality Engineering*, v. 13, p. 107-114, 2000-01.
- VAN BRACKLE, III, L. N., REYNOLDS, M. R. Jr. EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation. *Communication in Statistics - Simulation and computation*, v. 26, p. 979-1008, 1997.
- VANDER WIEL, S. A. Monitoring processes that wander using integrated moving average models. *Technometrics*, v. 38, p. 139-151, 1996.
- VASILOPOULOS, A. V.; STAMBOULIS, A. P. Modification of control charts limits in the presence of data correlation. *Journal of Quality Technology*, v. 10, p. 20-30, 1978.
- WARDELL, D. G.; MOSCOWITZ, H.; PLANTE, R. D. Run-Length distributions of special-cause control charts for correlated processes. *Technometrics*, v. 36, p. 3-17, 1994.
- ZHANG, N. F. Detection capability of residual control chart for stationary process data; *Journal of Applied Statistics*, v. 24, p. 475-492, 1997.
- ZHANG, N. F. Estimating process capability indexes for autocorrelated data. *Journal of Applied Statistics*, v. 25, p. 559-574, 1998.

**■ Agradecimentos**

---

Os autores agradecem ao apoio financeiro dado pelo CNPq e pela FAPESP a realização do presente estudo e a dois revisores anônimos pelas diversas sugestões que contribuíram significativamente para melhorar este artigo.

**■ Sobre os autores**

---

**Fernando Antonio Elias Claro**

Doutorando do Departamento de Produção/FEG/UNESP

End.: Avenida Ariberto Pereira da Cunha, 333, Bairro Pedregulho – CEP 12516-410 – Guaratinguetá, SP

Tel./Fax: (12) 3123-2855

E-mail: fernandoclaro@uol.com.br

**Antonio Fernando Branco Costa**

Professor Assistente Doutor do Departamento de Produção/FEG/UNESP

End.: Avenida Ariberto Pereira da Cunha, 333, Bairro Pedregulho – CEP 12516-410 – Guaratinguetá, SP

Tel./Fax: (12) 3123-2855

E-mail: fbranco@feg.unesp.br

**Marcela Aparecida Guerreiro Machado**

Doutoranda do Departamento de Produção/FEG/UNESP

End.: Avenida Ariberto Pereira da Cunha, 333, Bairro Pedregulho – CEP 12516-410 – Guaratinguetá, SP

Tel./Fax: (12) 3123-2855

E-mail: marcela@feg.unesp.br