AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

EDMUNDO EBOLI BONINI

"... O conceito subjacente... é que o valor do dinheiro tem uma dimensão temporal, isto é, um dólar a ser recebido amanhã não possui o mesmo valor de um dólar recebido hoje." — ROBERT W. JOHNSON.

Em sentido amplo, por amortização se entende a diminuição gradual ou extinção de qualquer capital seja qual fôr o fim a que se destina, através de reduções periódicas. O usual é que tais reduções sejam efetuadas por meio de prestações, as quais podem ser iguais entre si, e também, podem ou não incluir, como parte integrante, os juros periódicos causados pelo capital que se extingue.

Capital em Matemática Financeira é qualquer valor expresso em moeda disponível em uma certa época.

Renda é uma sucessão de capitais disponíveis em diferentes épocas. Adotando-se a notação de conjuntos, temos:

$$R = \left\{ (C_1, E_1), \ldots, (C_n, E_n) \mid E_t < E_{t+1};\ \left| \sum_{t=1}^{n} C_t \right| = \sum_{t=1}^{n} \left| C_t \right| \right\}$$

EDMUNDO EBOLI BONINI — Professor-Contratado do Departamento de Métodos Quantitativos da *Escola de Administração de Emprêsas de São Paulo, da Fundação Getúlio Vargas*. Professor das: *Faculdades de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo, Faculdade de Ciências Econômicas de São Paulo, Faculdade de Ciências Econômicas de São Luiz, Escola de Engenharia Mauá* e *Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Mackenzie*.

onde: C_i = Capitais = têrmos de renda;

E_I = Vencimento.

A capitalização é composta quando o capital, em cada período prèviamente determinado, sofre acréscimo dos juros devidos para nova capitalização nos períodos subseqüentes.

A capitalização é simples quando o capital permanece constante durante todo o tempo de sua colocação.

O montante de uma renda é igual à soma dos montantes de cada um de seus têrmos.

Segundo o *Princípio de Equivalência de Capitais* o montante das prestações deverá ser igual ao montante do capital emprestado.

Temos observado ser prática estabelecida entre nós que a amortização de um empréstimo seja feita através do sistema Price, que corresponde a um caso particular do Sistema Francês, onde o período da prestação é submúltiplo do período da taxa.

Neste nosso trabalho iremos mencionar além do Sistema Price (prestações mensais iguais, adotando-se a capitalização composta) outros critérios para amortizarmos empréstimos.

METODOLOGIA

Adotaremos a seguinte nomenclatura:

C = capital emprestado;

i = taxa de juros;

n = número de prestações ou prazo;

P = prestação;

C_t = capital genérico variável.

Consideremos os seguintes critérios:

- Há um acréscimo de uma porcentagem sôbre o capital emprestado e a prestação será determinada pelo quociente entre êsse capital obtido e o número de prestações. Então, teremos:

$$\boxed{P = \frac{C\,(1 + in)}{n}} \qquad (1)$$

- Os juros são calculados sôbre o saldo.
- *Capitalização Simples.*

Quando as prestações forem iguais, o montante do capital emprestado será:

$$M = C\,(1 + in)$$

O montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} P\,[1 + (n - t)\,i]$$

Aplicando-se o princípio de equivalência de capitais, temos $M = M'$. Portanto:

$$\sum_{t=1}^{n} P\,[1 + (n - t)\,i] = C\,(1 + in)$$

Resolvendo esta equação em função de P, temos:

$$\boxed{P = C \cdot \frac{1 + in}{n + \dfrac{n\,(n-1)}{2}\, i}} \qquad (2)$$

Quando as prestações variarem em Progressão Aritmética, o montante do capital emprestado será:

$$M = C(1 + in)$$

O montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_t \left[1 + i(n-t)\right], \text{ onde}$$

$C_t = C_1 + \alpha\,(t - 1) = (C_1 - \alpha) + \alpha t$ sendo:

C_1 = primeira prestação

α = razão de progressão aritmética

Realizando as substituições na equação acima, temos:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} \left[(C_1 - \alpha) + \alpha t\right]\left[1 + i(n-t)\right]$$

Aplicando-se o princípio de equivalência de capitais: M'=M e portanto:

$$\sum_{t=1}^{n} \left[(C_1 - \alpha) + \alpha t\right]\left[1 + i(n-t)\right] = C(1 + in)$$

Resolvendo esta equação em função de C_1, temos:

$$\boxed{C_1 = \frac{C\dfrac{(1 + in)}{n} - (n-1)\,\alpha\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{3}\left(\dfrac{n}{2} - 1\right)\right]}{1 + \dfrac{i}{2}(n-1)}} \qquad (3)$$

Observação: $\alpha < \dfrac{2C(1 + in)}{n(n - 1)}$

Quando as prestações variarem em Progressão Geométrica, o montante do capital emprestado será:

$$M = C\,(1 + in)$$

O montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_t\,[1 + i\,(n - t)],\ \text{onde}$$

$$C_t = C_1 g^{t-1}\ ,\ \text{sendo:}$$

$$C_1 = \text{primeira prestação}$$

$$g = \text{razão da progressão geométrica.}$$

Realizando as substituições na equação acima, temos:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_1 g^{t-1} \left[1 + i\,(n-t)\right]$$

Aplicando-se o princípio de equivalência de capitais, temos $M = M'$, portanto:

$$\sum_{t=1}^{n} C_1 g^{t-1}\,[1 + i\,(n-t)] = C\,(1 + in)$$

Resolvendo esta equação em função de C_1, temos:

$$\boxed{C_1 = \frac{C\,(1 + in)}{\dfrac{g^{n-1}}{g - 1}\left(1 + \dfrac{1}{g-1} - \dfrac{in}{g-1}\right)}} \qquad (4)$$

- *Capitalização Composta*

Prestações Iguais — o montante do capital emprestado será: $M = C\,(1 + i^n)$ e o montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} P(1+i)^{n-t} = P \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{n-t} =$$

$$= P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \text{ sendo que a função } s_n =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

encontra-se tabelada em função de *i* e *n*.

Aplicando-se o princípio de equivalência, temos:

$$P \frac{(1+i)^n - 1}{i} = C(1 + i^n)$$

Resolvendo a equação acima em função de P, temos:

$$\boxed{P = C \cdot \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} = C \cdot a_n^{-1}} \qquad (5)$$

Observe-se que a função a_n^{-1} encontra-se tabelada em função de *i* e *n*.

Prestações Variáveis em Progressão Aritmética — o montante do capital emprestado será:

$$M = C(1+i)^n$$

O montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_t \;(1+i)^{n-t}, \text{ onde}$$

$$C_t = (C_1 + \alpha) + \alpha\, t, \text{ sendo:}$$

C_1 = primeira prestação;

α = razão da progressão aritmética.

Procedendo às substituições na equação acima, temos:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} [(C_1 - \alpha) + \alpha t] \ (1 + i)^{n-t}$$

Aplicando-se o princípio de equivalência, temos:

$$\sum_{t=1}^{n} [(C_1 - \alpha) + \alpha t] \ (1 + i)^{n-t} = C(1 + i)^n$$

Resolvendo essa equação em função de C_1, temos:

$$\boxed{C_1 = \frac{C}{a_{\overline{n}|}} - \frac{\alpha}{i} \left[1 - n \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i \right) \right]} \qquad (6)$$

onde: $a_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ que está tabelada em função de i e n.

Prestações Variáveis em Progressão Geométrica — o montante do capital emprestado será:

$$M = C(1 + i)^n$$

e o montante das prestações será:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_t \ (1 + i)^{n-t}, \text{ onde}$$

$$C_t = C_1 g^{t-1}, \text{ sendo:}$$

C_1 = primeira prestação;

g = razão da progressão geométrica.

Após efetuarmos as substituições na equação acima, temos:

$$M' = \sum_{t=1}^{n} C_1 g^{t-1} (1 + i)^{n-t}$$

Aplicando o princípio de equivalência, temos:

$$\sum_{t=1}^{n} C_1 g^{t-1} (1 + i)^{n-t} = C(1 + i)^n$$

Resolvendo esta equação em função de C_1, temos:

$$\boxed{C_1 = \frac{C(1+i)^n [(1+i) - g]}{(1 + i)^n - g^n}} \qquad (7)$$

APLICAÇÕES DO MÉTODO

Daremos aqui um exemplo para cada um dos critérios:

1. Determinar a prestação mensal para amortizar um capital de NCr$ 50.000,00, durante 5 meses, sendo a taxa de 3% ao mês.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (1), temos:

$$P = \frac{50.000 \ (1 + 0{,}03 \times 5)}{5} = 11.500$$

O total dos juros será: $J_t = 7.500$

2. Organizar um plano de amortização de empréstimo de NCr$ 50.000,00 para ser liquidado em 5 prestações e sendo a taxa de 3% ao mês.

O plano de amortização ficará da seguinte forma:

Mês	*Dívida*	*Amortização*	*Juros*	*Prestação*
0	50.000			
1	40.000	10.000	1.500	11.500
2	30.000	10.000	1.200	11.200
3	20.000	10.000	900	10.900
4	10.000	10.000	600	10.600
5		10.000	300	10.300
				54.500

O total dos juros será: $J_{2} = 4.500$

3. Determinar a prestação mensal que amortiza um capital de NCr$ 50.000,00 em 5 meses a juros simples sendo a taxa de 3% ao mês.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (2), temos:

$$P = 50.000 \frac{1 + 0{,}03 \times 5}{5 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}03} = 10.849$$

O total dos juros será: $J_{3.1} = 4.245$

4. Elaborar um plano de amortização de um empréstimo de NCr$ 2.000.000,00, a juros simples de 6% ao mês, liquidável em 12 prestações mensais variáveis em progressão aritmética de razão igual a NCr$ 10.000,00.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (3), temos:

$$C_1 = \frac{2.000.000{,}00 \dfrac{(1 + 0{,}06 \times 12)}{12} - (12 - 1)\ 10.000{,}00 \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{0{,}06}{3} \left(\dfrac{12}{2} - 1 \right) \right]}{1 + \dfrac{0{,}06}{2} (12 - 1)}$$

O plano será:

Mês	*Débito*	*Crédito*	*Saldo*	*Juros*
0	2.000.000		2.000.000	10.000
1		117.518	1.882.482	9.412
2		127.518	1.754.964	8.775
3		137.518	1.617.446	8.087
4		147.518	1.469.928	7.350
5		157.518	1.312.410	6.562
6		167.518	1.144.892	5.724
7		177.518	967.374	4.837
8		187.518	779.856	3.899
9		197.518	582.338	2.912
10		207.518	374.820	1.874
11		217.518	157.302	787
12	70.219	227.518	007	79.219

5. Elaborar um plano de amortização de um empréstimo de NCr$ 2.000.000,00, a juros simples de 6% ao mês, liquidável em 12 prestações mensais variáveis em progressão geométrica de razão 1,1.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (4), temos:

$$C_1 = \frac{2.000.000\ (1 + 0{,}06 \times 12)}{\dfrac{(1{,}1)^{12} - 1}{1{,}1 - 1} \left(1 + \dfrac{1}{1{,}1 - 1}\right) - \dfrac{0{,}06 \times 12}{1{,}1 - 1}}$$

$$C_1 = 97.010$$

O plano será:

Meses	*Débito*	*Crédito*	*Saldo*	*Juros*
0	2.000.000		2.000.000	10.000
1		97.010	1.902.990	9.515
2		106.711	1.796.279	8.981
3		117.382	1.678.897	8.394
4		129.120	1.549.777	7.749
5		142.032	1.407.745	7.038
6		156.235	1.251.510	6.257
7		171.858	1.079.652	5.398
8		189.044	890.608	4.453
9		207.048	682.660	3.413
10		228.743	453.917	2.269
11		251.617	202.300	1.012
12	74.479	276.779	— —	74.479

6. Determinar a prestação que amortiza um capital de NCr$ 50.000,00, sendo a taxa de 3% ao mês.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (5), temos:

$$P = 50.000 \frac{0,03 \ (1 + 0,03)^5}{(1 + 0,03)^5 - 1}$$

$$P = 50.000 \times 0,21835457 = 10.918$$

O total dos juros será: $J_{4.1} = 4.590$

7. Organizar um plano de amortização de um empréstimo de NCr$ 100.000.000,00 a juros de 8% ao mês, liquidável em 6 prestações mensais variáveis em progressão aritmética crescente de NCr$ 200.000,00 em cada mês.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (6), temos:

$$C_1 = \frac{100.000.000}{\dfrac{1 - (1+0,08)^{-6}}{0,08}} - \frac{200.000}{0,08}$$

$$\left[1 - 6 \left(\frac{1}{\dfrac{1 - (1+0,08)^{-6}}{0,08}} - 0,08 \right) \right]$$

$C_1 = 21.176.270$

O plano será:

Meses	*Saldo*	*Juros*	*Saldo + Juros*	*Prestação*
1	100.000.000	8.000.000	108.000.000	21.176.270
2	86.823.730	6.945.898	93.769.628	21.376.270
3	72.393.358	5.791.469	78.184.827	21.576.270
4	56.008.557	4.528.685	61.137.242	21.776.270
5	39.360.972	3.148.878	42.509.850	21.976.270
6	20.533.580	1.642.686	22.176.266	22.176.270
			004	

8. Organizar um plano de amortização de um empréstimo de NCr$ 100.000.000,00, a juros de 5% ao mês, liquidável em 5 meses com prestações variáveis em progressão geométrica de razão 2.

Solução: Substituindo os valores na fórmula (7), temos:

$$C_1 = \frac{100.000.000\,(1 + 0{,}05)^5\,[2 - (1 + 0{,}05)]}{2^5 - (1 + 0{,}05)^5}$$

$C_1 = 3.946.356$

O plano será:

Meses	*Saldo no fim de cada mês*	*Juros de 5% sôbre o saldo anterior*	*Prestações*
0	100.000.000		
1	101.053.644	5.000.000	3.946.352
2	98.213.614	5.052.682	7.892.712
3	87.338.871	4.910.681	15.785.424
4	60.134.967	4.366.944	31.570.848
5	019	3.006.748	63.141.696

O leitor teve a oportunidade de constatar uma série de critérios para amortizarmos um empréstimo. Assim, observamos empréstimos a prestações iguais e variáveis, segundo uma certa lei de crescimento, considerando a capitalização simples e composta.

O critério a ser adotado está evidentemente condicionado a situação de devedor e credor; assim, nos exemplos práticos 1, 2, 3 e 6, temos que os juros: $J_1 > J_{4.1}$ $J_2 > J_{3.1}$
Portanto, para o emprestador o plano mais conveniente seria o plano 1 e para o tomador seria o plano 3.1.

Devemos observar que não há um critério ótimo. Por isso analisamos as amortizações de empréstimos na capitalização simples e composta com prestações constantes e variáveis de acôrdo com uma certa lei de crescimento. Em cada um dos critérios, o princípio é de que o montante do capital emprestado deverá ser igual ao montante das prestações. Portanto, para amortizarmos um empréstimo, devemos ter em mente dois tópicos:

- Qual o critério de capitalização dos capitais: capitalização simples ou composta.

- Qual o valor das prestações: constantes ou variáveis, e se variáveis qual a lei de variação.

APÊNDICE

Mencionaremos aqui as somatérias aplicadas, sendo que as mesmas são aplicadas no desenvolvimento das fórmulas para a obtenção dos modelos:

$$- \sum_{t=1}^{n} 1 = [\,t\,]_1^{n+1} = n + 1 - 1 = n$$

$$- \sum_{t=1}^{n} t = \left[\frac{t(t-1)}{2} \right]_1^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$- \sum_{t=1}^{n} n = n \sum_{t=1}^{n} 1 = n \left[t \right]_1^{n+1} = n \left[n+1-1 \right] = n^2$$

$$- \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{n-t} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = \left[\frac{(1+i)^t}{1+i-1} \right]_0^n =$$

$$= \left[\frac{(1+i)^t}{i} \right]_0^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$- \sum_{t=1}^{n} t^2 = \left[\frac{t(t-1)\,(2t-1)}{6} \right]_1^{n+1} = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$- \sum_{t=1}^{n} g^t = \left[\frac{g^t}{g-1} \right]_1^{n+1} = \frac{g(g^n - 1)}{g - 1}$$

BIBLIOGRAFIA

CLODOMIRO DE ALMEIDA FURQUIM, *Empréstimos*, São Paulo: *Tipografia Rossolillo*. *Cálculo Operatório na Matemática Financeira*, São Paulo, 1957.

W. JAMES GLOVER, *Tables of Applied Mathematics in Finance, Insurance, Statistics — The George Wahr Publishing Co.*, 1951.

E.L. GRANT, *Principles of Engineering Economy*, Nova Iorque: *The Ronald Press Co.*, 1950.

CLAUDE MACHLINE, "Análise de Investimentos e Inflação", *Revista de Administração de Emprêsas*, n.º 18.

EDMUNDO EBOLI BONINI, "Equivalência de Capitais (Capitalização Composta)", *Revista de Publicidade Industrial*, abril de 1966.

— "Equivalência de Capitais (Capitalização Simples)", *RPI*, maio de 1966.

— "Substituição de Pagamentos", *RPI*, julho de 1966.

— "Investimento e Retôrno Parciais", *RPI*, agôsto de 1966.

— "Conheça o Sistema Francês para Amortização de Empréstimos", *RPI*, outubro de 1966.

— "Como Amortizar Empréstimos pelo Sistema Americano", *RPI*, dezembro de 1966.