

UM MODELO ALTERNATIVO PARA A QUANTIFICAÇÃO DE MULTIPRODUTOS EM ÁRVORES INDIVIDUAIS¹

Thelma Shirlen Soares², Helio Garcia Leite³ e Antônio Bartolomeu do Vale³

RESUMO – Neste estudo foram conduzidos testes preliminares com o objetivo de avaliar um modelo de *taper*, proposto a partir da adaptação dos modelos desenvolvidos por Ormerod (1973) e Turnbull (1979), caracterizados pela sua simplicidade e facilidade de ajuste. Em comparação com modelos já consagrados, observou-se que o modelo alternativo apresentou consistência nos ajustes realizados. Portanto, pode-se concluir que o modelo apresentado é recomendável para a quantificação de multiprodutos de árvores individuais.

Palavras-chave: *Taper*, multiprodutos e eucalipto.

ALTERNATIVE MODEL FOR THE QUANTIFICATION OF MULTIPRODUCTS IN INDIVIDUAL TREES

ABSTRACT – Preliminary tests were conducted with the objective of evaluating a *taper* model, proposed from the adaptation of the models developed by Ormerod (1973) and Turnbull (1979), characterized by the simplicity and adjustment easiness. After adjustments and comparisons with other consecrated models, it was observed that the alternative model presented consistency in the carried out adjustments. In conclusion, the presented model can be recommended for multiproduct quantification of individual trees.

Key words: *Taper*, multiproducts, and eucalyptus.

1. INTRODUÇÃO

A avaliação de multiprodutos da madeira de árvores exige uma descrição do perfil de seus fustes, ou seja, requer a determinação ou estimativa de diâmetros ao longo do fuste, através de equações de afilamento ou *taper* (HUSCH et al., 1982).

Equações de *taper* são necessárias para a quantificação de multiprodutos, uma vez que as alternativas de uso da madeira são formuladas em função do comprimento da tora, do diâmetro máximo e do diâmetro mínimo (LIMA, 1996).

O uso de equações de *taper* em inventário e

planejamento florestal resulta em informações sobre o número de toras vinculadas às dimensões mínimas de cada produto a ser obtido do povoamento, permitindo um planejamento de produção e logística de transporte e comercialização de madeira (SOARES, 2002).

Diversos modelos de *taper* têm sido propostos e testados (KOZAK et al., 1969; DEMAERSCHALK, 1972; ORMEROD, 1973; GOULDING e MURRAY, 1976; GUIMARÃES e LEITE, 1992; GARCIA et al., 1993; LEITE e GARCIA, 2001; dentre outros), ressaltando-se que, para cada espécie, método de regeneração e idade, um desses modelos resulta em estimativas de *taper* mais precisas.

¹ Recebido em 13.02.2003 e aceito para publicação em 10.08.2004.

² Programa de Pós-Graduação em Ciência Florestal da Universidade Federal de Viçosa. Viçosa/MG. E.mail: <thelsoares@vicosa.br>.

³ Departamento de Engenharia Florestal da Universidade Federal de Viçosa. Viçosa/MG. E.mail: <hggleite@ufv.br>.

Neste estudo, é apresentado um modelo, modificado a partir dos modelos de Ormerod (1973) e Turnbull (1979), para estimar o perfil do fuste, contemplando as variações de forma.

2. MATERIALE MÉTODOS

Os dados utilizados neste estudo foram provenientes de povoamentos de *Eucalyptus grandis* W. Hill ex Maiden pertencentes à empresa Celulose Nipo-Brasileira S.A. (CENIBRA), localizados no município de Sabinópolis, Estado de Minas Gerais, entre os paralelos 18°39' e 18°41' de latitude sul e os meridianos 43°04' e 43°06' de longitude oeste de Greenwich, com altitude variando entre 847 e 1.070 m.

Para ajuste dos modelos de *taper* foram cubadas 84 árvores na idade de 9 anos. A cubagem foi realizada pelo método de Smalian, medindo-se nas alturas 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 4,0; 6,0 m, e assim sucessivamente até cerca de 4 cm de diâmetro do fuste com casca. A distribuição de frequência das árvores empregadas na cubagem é apresentada no Quadro 1.

2.1 Modelo de *taper* proposto

O modelo proposto e testado foi escrito com base nos modelos desenvolvidos por Ormerod em 1973 (modelo 1) e Turnbull* em 1979 (modelo 2). Ambos os modelos

caracterizam-se pela simplicidade e facilidade de ajuste, sendo as relações funcionais definidas por:

$$\left(\frac{d_i}{dap}\right)^2 = \beta_0 \left(\frac{Ht - h_i}{Ht - 1,3}\right)^{2\beta_1} + \varepsilon_i \quad (1)$$

$$\left(\frac{d_i - k}{dap - k} \times 100\right) = \beta_0 \left(\frac{Ht - h_i}{Ht - 1,3} \times 100\right)^{\beta_1} + \varepsilon_i \quad (2)$$

em que:

d_i = diâmetro comercial, na altura h_i , em cm;

dap = diâmetro medido a 1,30 m de altura do solo, em cm;

Ht = altura total, em m;

h_i = altura onde ocorre o diâmetro comercial d_i , em m;

k = distância da extremidade até onde o diâmetro mínimo foi medido, ou seja, $Ht - h_i$;

β_0 e β_1 = parâmetros a serem estimados; e

ε_i = erro aleatório, $\varepsilon_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$.

Com base nos modelos (1) e (2), propôs-se um novo modelo de *taper* com a inclusão de uma variável

Quadro 1 – Distribuição de frequência das árvores-amostra utilizadas para ajuste dos modelos

Table 1 – Frequency distribution of the sample trees used to adjust models

Classe de Diâmetro (cm)	Classe de Altura (m)															Total	
	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44		46
9	1	3	1														5
11		1	1	2		1											5
13			1	2	5	2											10
15				1	3	1	4										9
17						1	2	1	1								5
19					2	1		1	2								6
21							1	4	1		2						8
23							1					1	1				3
25								1	2		2	2	2				9
27											2		2	1			5
29											1			1			2
31										1			1	2	1		5
33												1		2	1	1	5
35														2	1		3
37															2	1	3
39														1			1
Total	1	4	3	5	10	6	8	7	6	1	7	4	7	8	5	2	84

*Fonte: Vale (1979).

binária Tx , visando à estimação simultânea dos diâmetros ou volumes com e sem casca, de modo consistente. A relação funcional obtida foi:

$$\frac{d_i}{dap} = \beta_0 \left[\frac{Ht - h_i}{Ht - 1,3} \right]^{\beta_1} e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} + \varepsilon_i \quad (3)$$

$$\text{ou, ainda, } E\left(\frac{d_i}{dap}\right) = \beta_0 \left[\frac{Ht - h_i}{Ht - 1,3} \right]^{\beta_1} e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \quad (4)$$

em que:

E = esperança matemática.

Na relação funcional (3) está implícito que a porcentagem de casca diminui com o aumento do porte da árvore, sendo esse fato comum à maioria das espécies de eucalipto.

Isolando d_i ou h_i , obtêm-se as expressões que permitem estimar os diâmetros e as alturas, em cada seção ao longo do tronco e em cada diâmetro considerado, respectivamente:

$$\hat{d}_i = \hat{\beta}_0 dap \left[\frac{Ht - h_i}{Ht - 1,3} \right]^{\hat{\beta}_1} e^{\left(\hat{\beta}_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \quad (5)$$

$$\hat{h}_i = Ht - \left[\left(\frac{d_i}{\hat{\beta}_0 dap} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}_1}} \times \left(\frac{Ht - 1,3}{e^{\left(\hat{\beta}_2 \frac{Tx}{dap} \right)}} \right) \right] \quad (6)$$

em que:

e = base dos logaritmos neperianos;

$Tx = 0$ para o diâmetro d_i com casca; e

$Tx = 1$ para o diâmetro d_i sem casca.

Sabe-se que o volume de uma seção, em m^3 , pode

$$\text{ser calculado por: } V = \int_{h_1}^{h_2} g \, dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\pi}{40000} d^2 \, dh \quad (7)$$

$$\text{Fazendo } K = \frac{\pi}{40000} \text{ e } d^2 = dap^2 \left(\frac{H - h}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)}$$

e substituindo na expressão (7), tem-se:

$$V = K \int_{h_1}^{h_2} dap^2 \left(\frac{H - h}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} dh \quad (8)$$

em que:

h_1 e h_2 = limites de integração, correspondendo às alturas inferior e superior de qualquer seção, respectivamente, podendo assumir valores desde $h_1 = 0$ até $h_2 = Ht$.

Aplicando propriedades de integrais, tem-se:

$$V = K \, dap^2 e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \left(\frac{1}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} \int_{h_1}^{h_2} (H - h)^{\beta_1} dh \quad (9)$$

Fazendo $L = H - h \therefore h = H - L \therefore dh = -dL$

Substituindo L na expressão (9), tem-se:

$$V = K \, dap^2 e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \left(\frac{1}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} \int_{h_1}^{h_2} L^{\beta_1} (-dL) \quad (10)$$

Resolvendo a integral da expressão (10):

$$V = K \, dap^2 e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \left(\frac{1}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} \left[-\left(\frac{L^{\beta_1+1}}{\beta_1+1} \right) \right]_{L_1}^{L_2} \quad (11)$$

Como $L = H - h$, substituindo os limites h_1 e h_2 , obtêm-se:

$$V = K \, dap^2 e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \left(\frac{1}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} \left[-\left(\frac{(H - h_2)^{\beta_1+1} - (H - h_1)^{\beta_1+1}}{\beta_1+1} \right) \right] \quad (12)$$

Assim, como $K = \frac{\pi}{40000}$, a expressão do volume de um fuste a partir do modelo (3) é:

$$V = \frac{\pi}{40000} dap^2 e^{\left(\beta_2 \frac{Tx}{dap} \right)} \left(\frac{1}{H - 1,3} \right)^{\beta_1} \left(\frac{(H - h_2)^{\beta_1+1} - (H - h_1)^{\beta_1+1}}{\beta_1+1} \right) \quad (13)$$

2.2 Validação do modelo

A fim de avaliar o modelo proposto, ele foi ajustado e comparado com dois modelos tradicionais, Kozak et al. (1969) e Demaerschalk (1972), modificados por Leite e Garcia (2001), sendo:

$$\left(\frac{d_i}{dap} \right)^2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{Ht} \right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{Ht} \right)^2 + \beta_3 Tx + \varepsilon_i \quad (14)$$

$$\left(\frac{d_i}{dap} \right)^2 = 10^{2\beta_0} \, dap^{(2\beta_1-2)} \, Ht^{2\beta_2} \, (Ht - h_i)^{\beta_3} e^{\left(\beta_4 \frac{Tx}{dap} \right)} + \varepsilon_i \quad (15)$$

Do modelo (14), segue-se que:

$$\hat{d}_i = dap \sqrt{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left(\frac{h_i}{Ht} \right) + \hat{\beta}_2 \left(\frac{h_i}{Ht} \right)^2 + \hat{\beta}_3 Tx} \quad (16)$$

$$\hat{h}_i = \frac{-\hat{\beta}_1 Ht - \sqrt{(\hat{\beta}_1 Ht)^2 - 4\hat{\beta}_2 \left(\hat{\beta}_0 Ht^2 - \frac{d_i^2 Ht^2}{dap^2} \right) + \hat{\beta}_3 Tx}}{2\hat{\beta}_2} \quad (17)$$

Do modelo (15) segue-se que:

$$\hat{d}_i = 10^{\hat{\beta}_0} dap^{\hat{\beta}_1} Ht^{\hat{\beta}_2} (Ht - h_i)^{\hat{\beta}_3} e^{\left(\frac{\hat{\beta}_4}{2} \frac{Tx}{dap} \right)} \quad (18)$$

$$\hat{h}_i = Ht - \left[\frac{1}{d_i} \left(10^{\hat{\beta}_0} dap^{\hat{\beta}_1} Ht^{\hat{\beta}_2} e^{\left(\frac{\hat{\beta}_4}{2} \frac{Tx}{dap} \right)} \right) \right]^{\left(\frac{1}{\hat{\beta}_3} \right)} \quad (19)$$

Cada modelo, individualmente, foi avaliado por meio das estatísticas coeficiente de correlação múltipla ($R_{\hat{y}y}$), erro-padrão residual ($S_{\hat{y}y}$) e análise gráfica dos resíduos.

Após a avaliação individual dos ajustes dos modelos, realizou-se um teste complementar de validação destes. A validação de modelos consistiu em uma análise comparativa entre os valores estimados e os observados, a fim de verificar a existência ou não de tendenciosidade pela aplicação da equação de regressão resultante. Para tal, optou-se pelo uso do teste de L&O, proposto por Leite e Oliveira (2002), cujo procedimento resulta da combinação do teste de F (F_{H_0}) Graybill, do teste t para erro médio ($t_{\bar{e}}$) e da análise de correlação linear ($r_{Y_i \hat{Y}_i}$) entre os valores observados (Y_i) e os valores estimados (\hat{Y}_i). O teste compara o valor observado como variável dependente e o valor estimado como variável independente. Assim, para situações em que $F(H_0)$ e $t_{\bar{e}}$ forem não-significativos (ns) e $r_{Y_i \hat{Y}_i} \geq 1 - |\bar{e}|$, conclui-se que os valores estimados pela regressão não diferem dos observados.

Para complementar a avaliação, utilizaram-se as equações oriundas dos modelos ajustados para quantificar o número de toras. Consideraram-se, portanto, as seguintes especificações:

- Toras de 6 m de comprimento, com pelo menos 15 cm de diâmetro e sem casca na parte mais fina.
- Toras de 3 m de comprimento, com pelo menos 4 cm de diâmetro e com casca na parte mais fina.

Em seguida, aplicou-se o teste X^2 (Qui-quadrado) para verificar se havia diferença estatística no número de toras obtido por equação.

2.3 Ajuste dos modelos

O modelo (14) foi ajustado pelo Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MMQO), já os modelos (3) e (15) foram pelo procedimento iterativo de Quasi-Newton, disponíveis no software Statística 6.0 (STATSOFT, 2001).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Estatísticas das equações

As estimativas dos parâmetros e as principais estatísticas dos modelos (3), (14) e (15) são apresentadas no Quadro 2. Pode-se observar, na Figura 1, a superioridade do modelo (3) ao analisar $R_{\hat{y}y}$ e $S_{\hat{y}y}$.

Nas Figuras 2 e 3, apresentam-se os relacionamentos entre os diâmetros e alturas observados, em relação aos respectivos diâmetros e alturas estimados pelas equações. As tendências de relacionamento linear, em ambas as figuras, indicam a consistência das estimativas, independentemente da dimensão do diâmetro ou da altura considerados.

3.2 Validação das equações ajustadas

Observando os resultados do teste de L&O (Quadro 3), verificou-se que as equações obtidas a partir dos modelos (3) e (15) apresentaram estimativas precisas na predição das variáveis. No entanto, o *taper* estimado pelo modelo (14) foi estatisticamente diferente do *taper* observado (Quadro 3).

Os perfis médios representados pelos três modelos ajustados são mostrados na Figura 4, em que se pode constatar que as estimativas não apresentam tendenciosidade.

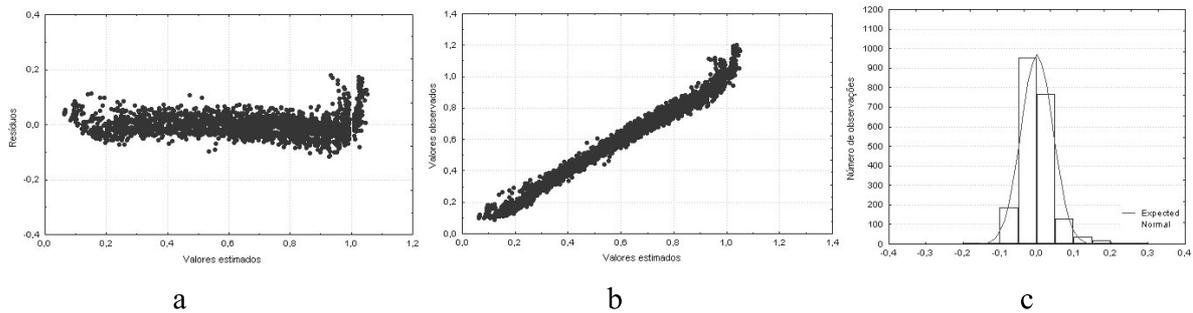
De posse das estimativas dos parâmetros dos modelos (3) e (15), foram quantificados os volumes comerciais, empregando-se os modelos (6) e (19), para diâmetros (d_i) iguais a 4, 6, 8, 10 e 12 cm, com e sem casca.

As estimativas volumétricas obtidas foram comparadas por meio do procedimento L&O (Quadro 4), não sendo observado diferença significativa em nível de 5% de probabilidade. Cabe ressaltar a simplicidade e consistência de ambos os modelos nos ajustes realizados.

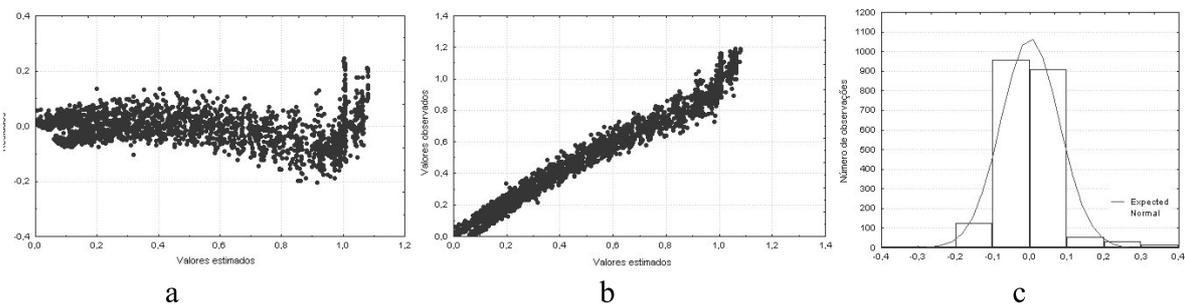
Quadro 2 – Estimativas dos parâmetros e medidas de precisão obtidas a partir dos ajustes dos modelos 3, 14 e 15
Table 2 – Estimates of the parameters and precision measures from adjustment of models 3, 14 and 15

Modelo	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	$R_{\hat{y}y}$	$S_{\hat{y}y}$
(3)	1,00373	0,71434	-1,10453	-	-	0,9638	0,0655
(7)	1,08421	-1,72499	0,69432	-0,07324	-	0,9403	0,0789
(8)	0,04199	0,90207	-0,68417	0,75743	-2,73165	0,9476	0,0724

Equação (3)



Equação (14)



Equação (15)

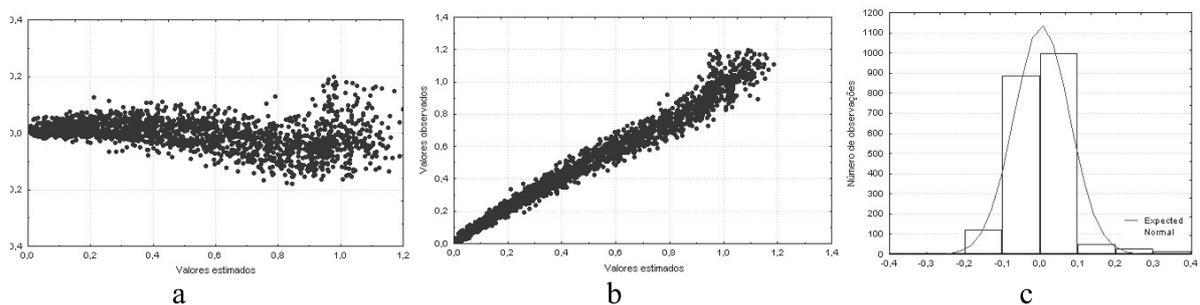
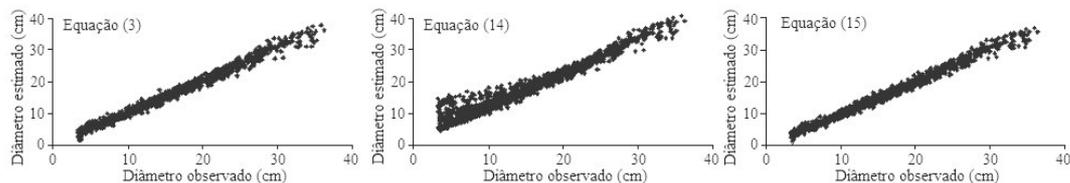


Figura 1 – a) Distribuição dos resíduos, b) valores estimados versus valores observados de taper, c) freqüência da distribuição dos resíduos para as equações 3, 14 e 15.

Figure 1 – a) Residues distribution, b) taper's estimated versus observed values, c) frequency distribution of residues for equations 3, 14 and 15.

Tx = 0 (Diâmetros com casca)



Tx = 1 (Diâmetros sem casca)

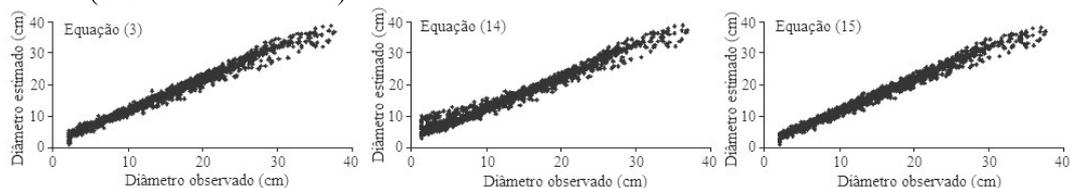
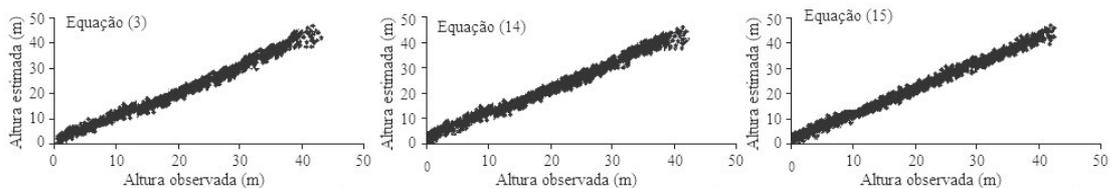


Figura 2 – Diâmetro observado em relação ao diâmetro estimado pelas equações obtidas a partir dos modelos 3, 14 e 15.
Figure 2 – Observed diameter compared to estimated diameter by equations from models 3, 14 and 15.

Tx = 0 (Diâmetros com casca)



Tx = 1 (Diâmetros sem casca)

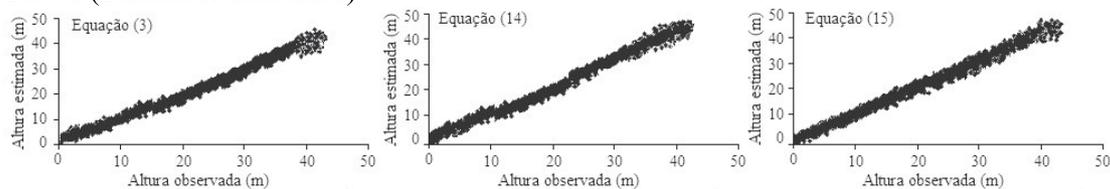


Figura 3 – Altura observada em relação à altura estimada pelas equações obtidas a partir dos modelos 3, 14 e 15.
Figure 3 – Observed height compared to the estimated height by equations from models 3, 14 and 15.

Quadro 3 – Estatísticas do teste de L&O para validação das equações ajustadas, considerando-se o *taper* observado e o *taper* estimado, em um nível de significância de 5%

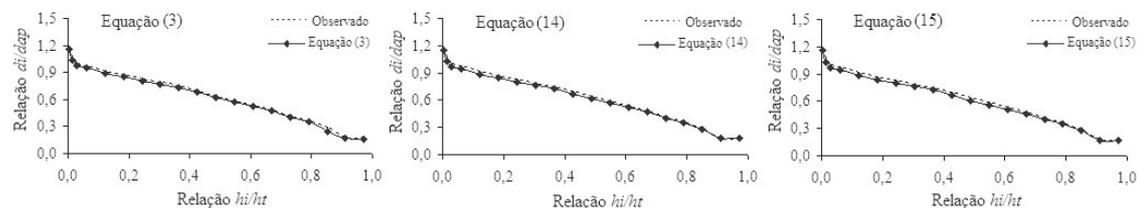
Table 3 – L&O test statistics for validation of the adjusted equations, considering the observed taper and the estimated taper, 5% significant level

Equação	$F(H_0)$	$t \bar{\sigma}$	$I_{Y_j, Y_i} \leq (1 - \bar{\epsilon})$	Conclusão*
(3)	0,075 ns	1,210 ns	sim	Y_j^* é estatisticamente igual a Y_i^{**} , no nível de significância estabelecido
(14)	0,024ns	4,606*	sim	Y_j^* é estatisticamente diferente a Y_i^{**} , no nível de significância estabelecido
(15)	0,100ns	1,956 ns	sim	Y_j^* é estatisticamente igual a Y_i^{**} , no nível de significância estabelecido

* Y_j = valores observados.

** Y_i = valores estimados.

Tx = 0 (Diâmetros com casca)



Tx = 1 (Diâmetros sem casca)

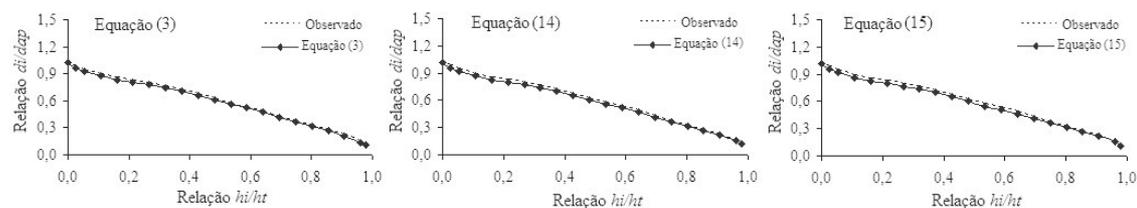


Figura 4 – Perfis médios observados e estimados.
Figure 4 – Predict and observed average profiles.

Quadro 4 – Estatísticas do teste de L&O para validação das equações 3 e 15, considerando-se volumes comerciais estimados pelos modelos 3 e 15, no nível de significância de 5%

Table 4 – L&O test statistics for validation of equations 3 and 8, considering the estimated commercial volumes for models 3 and 15, 5% significant level

Equação	F(H ₀)	t \bar{e}	$r_{Y_j Y_1} \leq (1-l\bar{e})$	Conclusão*
(3)	0,075 ns	1,210 ns	sim	Y_j^* é estatisticamente igual a Y_1^{**} , no nível de significância estabelecido
(15)	0,100 ns	1,956 ns	sim	Y_j^* é estatisticamente igual a Y_1^{**} , no nível de significância estabelecido

* Y_j = valores observados.

** Y_1 = valores estimados.

Na avaliação complementar realizada para quantificar o número de toras possíveis de serem obtidas das 84 árvores empregadas neste estudo, obtiveram-se 397 toras de 6 m e 44 de 3 m ao utilizar a equação obtida a partir do modelo (6) e 397 toras de 6 m e 41 de 3 m ao empregar a equação obtida pelo modelo (19).

O número de toras obtido foi comparado utilizando o teste X², em nível de 5% de probabilidade, não sendo verificado diferença significativa (p<0,05).

4. CONCLUSÕES

Diante dos resultados, conclui-se que o modelo proposto permite obter estimativas precisas do taper de árvores de eucalipto.

Cabe ressaltar que um mesmo modelo de taper pode gerar estimativas precisas para um conjunto de dados e estimativas imprecisas para outros. Portanto, o modelo proposto neste estudo deve ser testado e comparado com outros, sempre que for conduzido um estudo de taper. Essa recomendação se justifica pelos resultados obtidos neste estudo e também pela simplicidade do referido modelo.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DEMAERSCHALK, J. P. Converting volume equations to compatible taper equations. **Forest Science**, v.18, n.3, p.241-245, 1972.

- GARCIA, S. L. R.; LEITE, H. G.; YARED, J. A. C. Análise do perfil do tronco de morototó (*Didymopanax morototonii*) em função do espaçamento. In: CONGRESSO FLORESTAL BRASILEIRO, 7; CONGRESSO FLORESTAL PANAMERICANO, 1., Curitiba, 1993. **Anais...** Curitiba: SBS, 1993. p.485-491.
- GOULDING, C. J.; MURRAY, J. C. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. **New Zealand Journal of Forest Science**, v.5, n.3, p.313-322, 1976.
- GUIMARÃES, D. P.; LEITE, H. G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. **Revista Árvore**, v.16, n.2, p.170-180, 1992.
- HUSCH, B.; MILLER, C. L.; BEERS, T. E. **Forest mensuration**. 3 ed. New York: J. Willey & Sons, 1982. 397p.
- KOZAK, A.; MUNRO, D. D.; SMITH, J. H. G. Taper functions and their application in forest inventory. **The Forest Chronicle**, v.45, n.4, p.278-283, 1969.
- LEITE, H. G.; GARCIA, S. L. R. **Pesquisa e desenvolvimentos em inventário, mensurações e manejo florestal na CENIBRA**. Viçosa, MG: Sociedade de Investigações Florestais, 2001. 49 p. (Relatório Técnico, SIF)
- LEITE, H. G.; OLIVEIRA, F. H. T. Statistical procedure to test the identity of analytical methods. **Communications in Soil Science and Plant Analysis**, v.33, p.1105-1118, 2002.
- LIMA, D. G. **Desenvolvimento e aplicação de um modelo de suporte à decisão sobre multiprodutos de povoamentos de eucalipto**. 1996. 80f. Tese (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 1996.
- ORMEROD, D.W. A simple bole model. **The Forest Chronicle**, v. 49, n.3, p. 136-138, 1973.
- SOARES, T. S. **Otimização do uso da madeira em povoamentos de eucalipto**. 2002. 49f . Tese (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2002.
- STATSOFT, Inc. **STATISTICA (data analysis software system)**, version 6. 2001. (Software estatístico)
- VALE, A. B. **Production goals for eucalyptus plantations in Brazil**. 1979. 127 p. Tese (Ph. D. in Philosophy) - University of Washington, Seattle, 1979.