

PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O AJUSTE ÓTIMO DA DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA S_B DE JOHNSON¹

Oscar Santiago Vallejos Barra², Carlos Roberto Sanquetta³, Julio Eduardo Arce³, Sebastião do Amaral Machado³ e Ana Paula Dalla Corte⁴

RESUMO – A distribuição de S_B de Johnson tem ampla utilização na área florestal. Basicamente há cinco métodos para ajustar essa distribuição, e quatro deles consideram o parâmetro de locação (ϵ) e de escala (λ) como termos independentes que devem ser conhecidos para obter os demais parâmetros. Este trabalho foi desenvolvido visando propor uma nova metodologia para determinar os parâmetros de locação e de escala que otimizam o ajuste dos cinco métodos ao minimizar a estatística "dn" do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov. Posteriormente, com o objetivo de testar a metodologia proposta, utilizou-se o aplicativo de otimização não linear "Solver.xla" do Microsoft Excel 2000, definindo a função objetivo e restrições de cada método de ajuste. Como conclusão, percebeu-se que a metodologia proposta demonstrou constituir alternativa interessante de ajuste da distribuição S_B de Johnson, possibilitando seu ajuste otimizado. Dessa forma, recomenda-se que a metodologia proposta seja amplamente empregada para fins de determinação dos parâmetros do modelo quando do ajuste dessa distribuição probabilística muito usada na área florestal.

Palavras-chave: Distribuição S_B de Johnson, Métodos de ajuste, Distribuição probabilística e otimização.

PROPOSED METHODOLOGY FOR OPTIMUM SETTING OF THE DIAMETER DISTRIBUTION OF JOHNSON S_B

ABSTRACT – The Johnson's S_B probability distribution has wide use in forestry. There are basically five methods for fitting the location (ϵ) and the scale (λ) parameters as independent terms that must be known to obtain the other parameters. This work was carried out aiming at developing a new methodology to optimize the determination of the location and scale parameters of this distribution to minimize the "dn" statistics of the adherence test of Kolmogorov-Smirnov by the five fitting methods available. In order to test the performance of the new methodology the "Solver.xla" of the Microsoft Excel 2000 was utilized, defining the objective function and the restrictions of each fitting method. As conclusion of the study, it was noticed that the proposed methodology may be considered as an interesting alternative to the Johnson's S_B function though the optimization schedule. Therefore, the methodology can be widely recommended to obtaining the model parameters of this probability distribution used in forestry.

Key words: Johnson's S_B distribution, Fitting methods, Probability distribution and Optimization.

¹ Recebido em 30.11.2007 e aceito para publicação em 25.08.2010.

² Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal pela Escola de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Paraná. E-mail: <ovallejo@utalca.cl>

³ Escola de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Paraná. E-mail: <sanquetta@ufpr.br>, <jarce@ufpr.br> e <sammac@ufpr.br>.

⁴ Fundação de Pesquisas Florestais do Paraná, E-mail: <anapaulacorte@gmail.com>

1. INTRODUÇÃO

As funções de densidade de probabilidade permitem resgatar a provável distribuição diamétrica de árvores em um povoamento florestal, descrevendo sua estrutura e possibilitando um melhor planejamento da produção.

Uma das funções de densidade de probabilidade mais destacadas é a distribuição S_B de Johnson (Expressão [1]), onde os parâmetros (ϵ), (l), (d) e (g) são responsáveis pela locação, escala, curtose e assimetria da distribuição respectivamente.

$$f(Dap) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(Dap - \epsilon)(\lambda + \epsilon - Dap)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{Dap - \epsilon}{\lambda + \epsilon - Dap}\right)\right)^2\right\}$$

onde: $\epsilon < Dap < \epsilon + \lambda$; $-\infty < \epsilon < +\infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \gamma < +\infty$; $\delta > 0$

A distribuição S_B de Johnson tem sido utilizada por diversos autores, podendo-se citar: Hafley e Schreuder (1977), Schreuder et al (1982), Bhattacharyya e McClure (1982), Newberry e Burk (1985), Scolforo (1990), Oliveira (1995), Oliveira et al. (1998), Zou e McTague (1996), Tiersch (1997), Abreu (2000), Tewari (2000) e Acerbi Junior et al. (2002).

Os parâmetros desta distribuição podem ser obtidos por alguns métodos sendo: Knoebel e Burkhart (1991) propuseram um método conhecido por seus nomes, método da máxima verossimilhança, método da moda proposto por Hafley e Buford (1985), método dos momentos e método da regressão proposto por Zou e McTague (1996).

O método de Knoebel e Burkhart (1991) proporciona melhor estimativa dos parâmetros requeridos pela distribuição S_B de Johnson, enquanto os outros pressupõem o conhecimento do parâmetro e e l . Observa-se que em geral, através de um processo iterativo calcula-se diversos e e como uma porcentagem do diâmetro mínimo de cada unidade de amostragem e l como a amplitude da informação (diâmetro máximo – diâmetro mínimo). Posteriormente obtêm-se os demais parâmetros avaliando-se a qualidade do ajuste através de testes de aderência.

Na maioria dos casos emprega-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra, por ser o melhor, teste para avaliar a distribuição teórica de uma amostra (GADOW, 1983; GIBBONS e CHAKRABORTI, 1992) e ser muito sensível a qualquer

diferença do valor central e da dispersão (LEBART et al 1985). O teste baseia-se na diferença máxima entre a distribuição acumulativa dos erros considerando a estatística “dn” (Expressão [2]).

$$d_n^+ = \text{Max}\left\{\frac{i}{n} - F(Dap_i)\right\}$$

$$d_n^- = \text{Max}\left\{F(Dap_i) - \frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right\}$$

$$d_n = \text{Max}\{d_n^+; d_n^-\} \quad i=1, 2, \dots, n$$

A distribuição S_B de Johnson não apresenta integral definida, de modo que as estimativas acumulativas são obtidas através do método analítico do trapezóide.

Gerou-se uma metodologia que otimiza o ajuste da distribuição, descartando qualquer dúvida sobre os parâmetros de locação (e) e de escala (l) em razão da relevância da distribuição S_B de Johnson na área florestal e considerando as possíveis dificuldades para seu ajuste.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

A estratégia adotada neste trabalho, visando uma nova proposta metodológica, procura minimizar o valor da estatística “dn” do teste de Kolmogorov-Smirnov, em cada unidade de amostragem analisada, considerando as características de cada método de ajuste. Deste modo pode-se formular um problema de otimização para encontrar a solução ótima do ajuste da distribuição S_B de Johnson.

A função objetivo é descrita pela expressão [3] e as restrições dos parâmetros são dadas pela expressão [4]. O método de Knoebel-Burkhart é descrito na expressão [5], o método da máxima verossimilhança é descrito na expressão [6], o método da moda é apresentado na expressão [7], o método dos momentos é descrito na expressão [8] e o método dos percentis é apresentado na expressão [9].

$$\text{Minimizar } d_n = \text{Max}\left\{\text{Max}\left\{\frac{i}{n} - F(Dap_i)\right\}; \text{Max}\left\{F(Dap_i) - \frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right\}\right\}$$

$$-\infty < \epsilon < +\infty$$

$$\lambda > 0$$

$$\delta > 0$$

$$-\infty < \gamma < +\infty$$

$$\varepsilon = D_{\min} - 1,3$$

$$\delta = \frac{Z_{95}}{\text{Ln}\left(\frac{D_{95} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - D_{95}}\right) - \text{Ln}\left(\frac{D_{50} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - D_{50}}\right)}$$

$$\lambda = D_{\max} - \varepsilon + 3,8$$

$$\gamma = -\delta \text{Ln}\left(\frac{D_{50} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - D_{50}}\right)$$

onde: D_{\min} = diâmetro mínimo da unidade de amostragem; D_{\max} = diâmetro máximo da unidade de amostragem; Ln = logaritmo natural; D_{50} = diâmetro do percentil 50; D_{95} = diâmetro do percentil 95; Z_{95} = valor normal padrão do percentil 95.

$$\varepsilon \text{ e } \gamma \text{ conhecidos} \quad f_i = \text{Ln}\left(\frac{Dap_i - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - Dap_i}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{\sigma_f} \quad \delta = \frac{\lambda}{4\sigma_{Dap}}$$

onde: σ_f = desvio padrão da variável f_i ; \bar{f} = promédio; aritmético da variável f_i

$$\varepsilon \text{ e } \lambda \text{ conhecidos} \quad \gamma = -\frac{\bar{f}}{\sigma_f}$$

$$\gamma = \frac{2Dap_m - 2\varepsilon - \lambda}{\lambda\delta} - \delta \text{Ln}\left(\frac{Dap_m - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - Dap_m}\right)$$

onde: σ_{Dap} = desvio padrão do Dap ; Dap_m = moda do Dap ;

ε e λ conhecidos

$$\delta = \frac{\mu'(1-\mu')}{\sigma'} + \frac{\sigma'}{4} \left(\frac{1}{\mu'(1-\mu')} - 8 \right)$$

$$\gamma = \delta \text{Ln}\left(\frac{1-\mu'}{\mu'}\right) + \frac{0,5-\mu'}{\delta}$$

$$\text{onde: } \mu' = \frac{Dap - \varepsilon}{\lambda}; \sigma' = \frac{\sigma_{Dap}}{\lambda}$$

ε e λ conhecidos

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^p f_i z_i - \frac{\sum_{i=1}^p f_i \sum_{i=1}^p z_i}{p}}{\sum_{i=1}^p f_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^p f_i\right)^2}{p}}$$

$$\gamma = \bar{z} - \delta \bar{f}$$

$$\text{onde: } f_i = \text{Ln}\left(\frac{Dap_{pi} - \varepsilon}{\varepsilon + \lambda - Dap_{pi}}\right);$$

Dap_{pi} = diâmetro do percentil i ; z_i = valor normal padrão do percentil i ; p = quantidade de percentis utilizados.

3. RESULTADO

Utilizou-se o aplicativo de otimização não linear "Solver.xla" do Microsoft Excel 2000, definindo a função objetivo e restrições da cada método de ajuste, com o objetivo de testar a metodologia proposta.

A informação requerida para a aplicação numérica foi obtida dos dados utilizados por Vallejos (2003) do híbrido *Populus x euramericana* cv. I-488 aos dez anos de idade.

Ajustou-se a distribuição S_B de Johnson, através da metodologia proposta e mesma distribuição, mas considerando o parâmetro de locação (ε) e escala (λ) (KNOEBEL e BURKHART, 1991) para se ter um ponto de referência para a comprovação da minimização da estatística "dn".

Os resultados do ajuste da distribuição S_B de Johnson demonstram-se que os valores "dn" da distribuição otimizada são inferiores aos obtidos na mesma distribuição sem otimizar (Tabela 1). Ao comparar os valores "dn", de cada método com e sem ajuste ótimo, as diferenças não parecem expressivas, mas quando se compara as probabilidades associadas à magnitude torna-se relevante e justifica a metodologia proposta.

Esperava-se que os métodos de ajuste apresentassem desempenho semelhante, mas, no entanto o método da moda foi exceção, com um ganho pequeno na aplicação deste método, sendo os parâmetros estimados de forma praticamente idêntica através das duas formas. Este comportamento já foi descrito por outros autores (ZOU; MCTAGUE, 1996; TABAI, 1999).

O resultado do ajuste da distribuição S_B de Johnson, segundo os diferentes métodos de ajuste, mostram em termos gerais que os métodos não diferem entre si, com a exceção antes mencionada do método da moda (Figura 2).

Tabela 1 – Resultado da estimação da distribuição S_B de Johnson segundo método de ajuste.
Table 1 – Parameter estimation of the Johnson's S_B Johnson distribution by fitting method.

Parâmetro	Método de Knoebel - Burkhart		Método da máxima verossimilhança		Método da moda		Método dos momentos		Método da regressão	
	Não ótimo	Ótimo	Não ótimo	Ótimo	Não ótimo	Ótimo	Não ótimo	Ótimo	Não ótimo	Ótimo
ϵ	14,700	13,966	14,700	7,589	14,700	14,700	14,700	8,043	14,700	6,094
λ	21,800	22,534	21,800	28,911	21,800	21,800	21,800	28,457	21,800	30,406
δ	2,143	2,185	2,065	2,591	2,216	2,216	2,093	2,577	2,157	2,699
γ	-0,355	-0,494	-0,292	-1,645	-0,146	-0,146	-0,303	-1,573	-0,304	-1,902
“dn”	0,026	0,024	0,040	0,020	0,100	0,100	0,036	0,020	0,036	0,026
Probabilidade	0,708	0,750	0,436	0,805	0,006	0,006	0,506	0,809	0,504	0,704

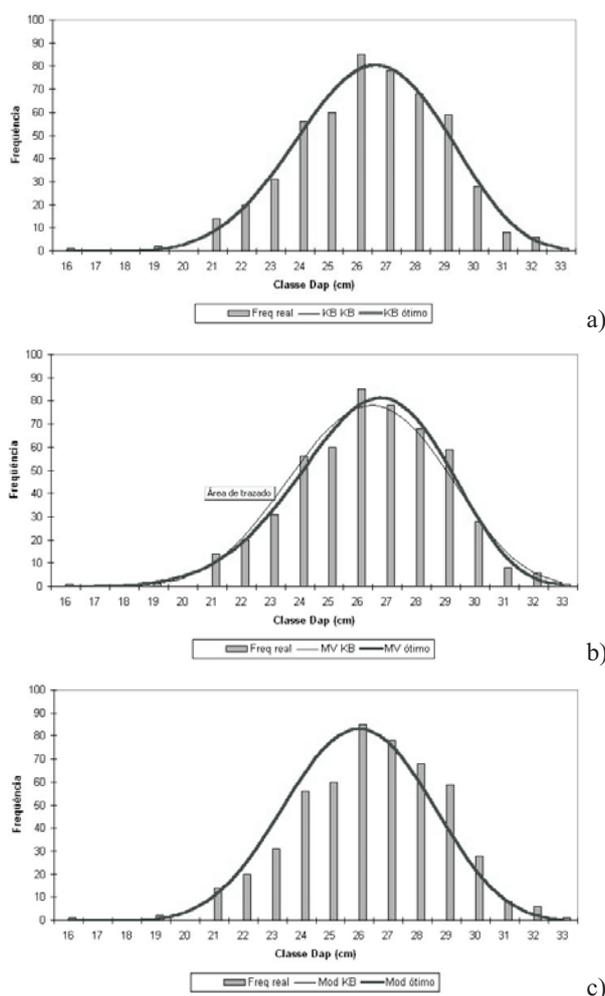


Figura 1 – Representação gráfica do ajuste da distribuição S_B de Johnson a) método de Knoebel-Burkhart b) Método da máxima verossimilhança, c) método da moda.

Figure 1 – Graphical representation of the fitting of the Johnson's S_B distribution. a) Knoebel-Burkhart method, b) maximum likelihood method, c) mode's method.

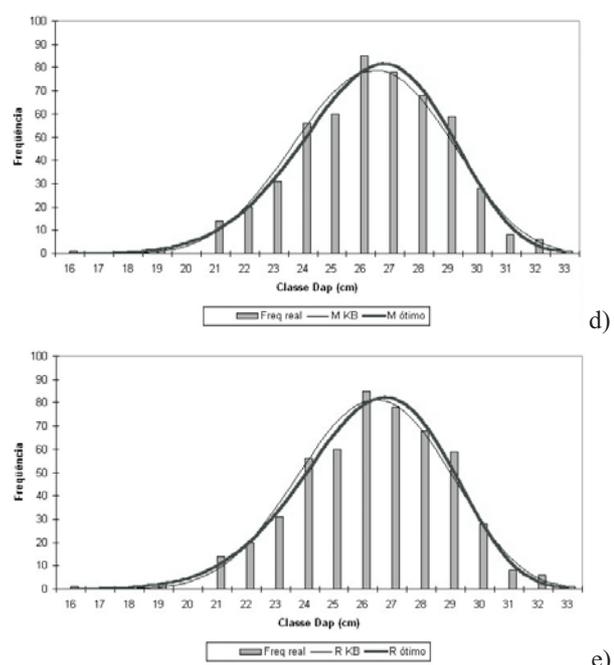


Figura 2 – Representação gráfica do ajuste da distribuição S_B de Johnson. d) método dos momentos e e) método da regressão.

Figure 2 – Graphical representation of the fitting of the Johnson's S_B distribution. d) moment's method and e) regression method.

Cabe mencionar ainda que esta metodologia pode ser empregada para determinar o método de ajuste mais acurado em cada caso.

4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com base nos resultados obtidos neste trabalho pode-se afirmar que a metodologia proposta é uma alternativa interessante de ajuste da distribuição S_B de Johnson, possibilitando o ajuste ótimo dos parâmetros da distribuição.

Observou-se que houve uma equivalência em termos de qualidade de ajuste entre a aplicação desta proposta metodológica para recuperação dos parâmetros e aquele através do método da moda.

A metodologia proposta pode ser amplamente usada na área florestal, especialmente para ajuste de distribuições diamétricas para descrição da estrutura do povoamento e para desenvolvimento de modelos de planejamento da produção florestal, devendo-se empregar sempre o método de ajuste mais adequado e preciso em cada caso em particular.

5. REFERÊNCIAS

- ABREU, E. **Modelagem da prognose precoce do volume por classe diamétrica para *Eucalyptus grandis***. 2000. 70f. Tese (Mestrado em Manejo Florestal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2000.
- ACERBI JUNIOR, F. W. et al. Modelo para prognose do crescimento e da produção e análise econômica de regimes de manejo para *Pinus taeda* L. **Revista Árvore**, v.26, p.699-713, 2002.
- GADOW, K. V. Fitting distributions in *Pinus patula* stands. **South African Forestry Journal**, n.126, p.20-29, 1983.
- GIBBONS, J. G.; CHAKRABORTI, S. **Nonparametric statistical inference**. 3.ed. New York: Dekker, 1992. 544p.
- HAFLEY, W. L.; BUFORD, M. A. A bivariate model for growth and yield prediction. **Forest Sci.**, v.31. n.1. p.237-247, 1985.
- HAFLEY, W. L.; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v.7. n.3, p.481-487, 1977
- KNOEBEL, B. C.; BURKHART, H. E. A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distributions at two points in time. **Biometrics**, v.47, p.241-253, 1991.
- LEBART, L.; MORINEAU, A.; FÉNELON, J. D. **Tratamiento Estadístico de datos, métodos y programas**. Barcelona: Marcombo Boixareau, 1985. 520p.
- OLIVEIRA, E. B.; MACHADO, S. A. M.; FIGUEIREDO FILHO, A. Sistema para simulação do crescimento da produção de *Pinus taeda* L. e avaliação econômica de regimes de manejo. **Revista árvore**, v.22, n.1, p.99-111, 1998.
- OLIVEIRA, E. B. **Um sistema computadorizado de prognose do crescimento e produção de *Pinus taeda* L., com critérios quantitativos para a avaliação técnica e econômica de regimes de manejo**. 1995. 134f. Tese (Doutorado em Manejo Florestal)- Pós-graduação em Engenharia Florestal, Universidade Federal de Paraná, Curitiba, 1995.
- NEWBERRY, J.; BURK, T. SB distribution-based models for individual tree merchantable volume-total volume ratios. **Forest Science**, v.31. n.2, p.389-398, 1985.
- SCOLFORO, J. R. **Sistema integrado para predição e análise presente e futura do crescimento e produção, com otimização de remuneração de capitais, para *Pinus caribaea* var. *Hondurensis***. 1990. 290f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) - Universidade Federal de Paraná, Curitiba, 1990.
- SCHREUDER, H.; BHATTACHARYYA, H.; McCLURE, J. The SBBB distribution: a potentially useful trivariate distribution. **Canadian Journal of Forest Research**, v.12. n.3, p.641-645, 1982.
- TABAI, F. C. V. **O estudo da acuracidade da distribuição S_B para representar a estrutura diamétrica de *Pinus taeda*, através de cinco métodos de ajuste**. 1999. 55f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal Lavras, Lavras, 1999.
- TEWARI, V. Fitting statistical distributions to diameter measurements of tree stand. **Annals of Forestry**, v.8, n.2, p.274-278, 2000.
- THIERSCH, A. **Eficiência das distribuições diamétricas para prognose da produção de *Eucalyptus camaldulensis***. 1997. 155f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal Lavras, Lavras, 1997.

VALLEJOS, O. **Sistema de simulação de crescimento e produção de *Populus* spp., no Chile (sistema Salica)**. 2003. 190f. Tese (Doutorado em Manejo Florestal) - Universidade Federal de Paraná, Curitiba, 2003.

ZHOU, B.; McTAGUE, J. P. Comparison and evaluation of five methods of estimation of the Johnson System parameters. **Canadian Journal Forest Research**, v.26. p.928-935, 1996.