

# UTILIZAÇÃO DA FUNÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS PARA MODELAGEM DA DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA DE POVOAMENTOS EQUIÂNEOS DE EUCALIPTO<sup>1</sup>

Mayra Luiza Marques da Silva Binoti<sup>2</sup>, Daniel Henrique Breda Binoti<sup>3</sup>, Helio Garcia Leite<sup>4</sup>, Silvana Lages Ribeiro Garcia<sup>5</sup> e Antonilmar Araújo Lopes da Silva<sup>6</sup>

**RESUMO** – Objetivou-se neste estudo analisar a aplicação da função Birnbaum-Saunders com três e dois parâmetros e com a utilização do diâmetro mínimo como parâmetro de locação para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando a função. A função foi ajustada a dados de parcelas permanentes de inventário, mensuradas em seis idades. A aderência da função aos dados foi comprovada pelo teste de Kolmogorov-Smirnov. Os modelos de distribuição diamétrica propostos apresentaram valores aceitáveis de coeficiente de correlação. A análise gráfica de resíduos não apresentou tendenciosidade para a função de dois parâmetros e  $\gamma = dapmin$ . A função com dois parâmetros e  $\gamma = dapmin$  pode ser utilizada para descrição da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto.

Palavras-chave: Modelagem; Distribuição de diâmetros; Fatigue life.

## **USING THE BIRNBAUM-SAUNDERS FUNCTION FOR MODELING THE DIAMETER DISTRIBUTION OF EUCALYPT EVEN-AGED STAND**

**ABSTRACT** – The objective of this study was to investigate the application of the Birnbaum-Saunders function with three and two parameters and using the minimum diameter as parameter for describing the location diameter structure of eucalypt stands, and propose a model for diameter distribution using the function. The function was fitted to data from the inventory of permanent plots, measured at six ages. The adherence function of the data was confirmed by Kolmogorov-Smirnov test. The diameter distribution models proposed showed acceptable values of correlation coefficient. The graphic analysis of residues showed no bias for function of two parameters and  $\gamma = dapmin$ . The function with two parameters and  $\gamma = dapmin$  can be used to describe the diameter distribution of eucalypt plantations.

Keywords: Modelling; Diameter distribution; Fatigue life.

### **1. INTRODUÇÃO**

A descrição das estimativas de densidade populacional por classe diamétrica é realizada pela utilização de funções densidade de probabilidade (fdp). Entre as diversas fdp utilizadas para descrição da estrutura

diamétrica de povoamentos equiâneos, destacam-se: Weibull, normal, log-normal, Gamma, Johnson's SB, Gram-Charlier, Beta, log-logística, Cauchy, Frechet, Erlang, Rayleigh e Hiper (BAILEY; DELL, 1973; HAFLEY, SCHREUDER, 1977; MALTAMO et al., 1995; MALTAMO et al., 2000; BINOTI, 2008; LEITE et al., 2010).

<sup>1</sup> Recebido em 11.11.2010 aceito para publicação em 24.09.2013.

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, UFVJM, Brasil. E-mail: <MayraBinoti@gmail.com>.

<sup>3</sup> Programa de Pós-Graduação em Ciência Florestal, Universidade Federal de Viçosa, UFV, Brasil. E-mail: <danielhbbinoti@gmail.com>.

<sup>4</sup> Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Viçosa, UFV, Brasil. E-mail: <hglete@gmail.com>.

<sup>5</sup> Instituto Viçosense de Ensino e Pesquisa, Faculdade de Viçosa, FDV. E-mail: <garciasl@yahoo.com.br>.

<sup>6</sup> Engenheiro Florestal, Cenibra. E-mail: <antonilmar.silva@cenibra.com.br>.

A escolha da fdp que melhor descreva a estrutura diamétrica do povoamento e que apresente boa correlação com características do povoamento em estudo é determinante para a qualidade das estimativas da distribuição diamétrica futura (BINOTI, 2008).

A função Birnbaum-Saunders, também conhecida como fadiga life, foi proposta por Birnbaum e Saunders (1969ab) para a descrição da fadiga causada por ações realizadas ciclicamente. A função Birnbaum-Saunders pode ser ajustada pelo método da máxima verossimilhança (BIRNBAUM; SAUNDERS, 1969b), por métodos bayesianos (ACHAR, 1993) ou pelo método de momentos (NG et al., 2003; WANG et al., 2006).

A função densidade de probabilidade Birnbaum-Saunders em sua forma completa (3P) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-\gamma)/\beta} + \sqrt{\beta/(x-\gamma)}}{2\alpha(x-\gamma)} \phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}} \right) \right) \quad (1)$$

em que  $\alpha$  é o parâmetro de forma ( $\alpha > 0$ ),  $\beta$  é o parâmetro de escala ( $\beta > 0$ ),  $\gamma$  é o parâmetro de locação e  $\phi$  é a função normal padrão que pode ser escrita como:

$$\phi = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2)$$

em que a supressão do parâmetro de locação resulta na função Birnbaum-Saunders de 2P e pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x/\beta} + \sqrt{\beta/x}}{2\alpha x} \phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right) \quad (3)$$

O parâmetro de locação pode também ser substituído pelo diâmetro mínimo da parcela (dapmin), resultando na função Birnbaum-Saunders ( $\gamma = \text{dapmin}$ ), como expresso a seguir:

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-\text{dap min})/\beta} + \sqrt{\beta/(x-\text{dap min})}}{2\alpha(x-\text{dap min})} \phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x-\text{dap min}}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\text{dap min}}} \right) \right) \quad (4)$$

As funções acumulativas das funções Birnbaum-Saunders 3P, 2P e  $\gamma = \text{dapmin}$  podem ser expressas, respectivamente, como:

$$F(x) = \Phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}} \right) \right) \quad (5)$$

$$F(x) = \Phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right) \quad (6)$$

$$F(x) = \Phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x\text{dap} - \text{min}}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x\text{dap} - \text{min}}} \right) \right) \quad (7)$$

Em 2008 foi utilizada a função Birnbaum-Saunders para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de *Tectona grandis* submetidos a desbastes (BINOTI, 2008). Contudo, não se testou a capacidade de recuperação dos parâmetros da função em idade futura.

Objetivou-se, neste estudo, analisar a aplicação da função Birnbaum-Saunders nas três configurações apresentadas para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando a função.

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

### Dados

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos de 400 parcelas retangulares permanentes de 340 m<sup>2</sup>, instaladas em povoamentos de híbridos de *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, na região Centro-Oeste do Estado de Minas Gerais, Brasil. Esses povoamentos foram estabelecidos sob arranjo espacial de 3 x 3 m, com rotação de corte média de 7 anos. Nesta idade, a produtividade média nesses povoamentos varia entre 25 e 50 m<sup>3</sup>.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>. As medições de diâmetros foram efetuadas nas árvores com dap acima de 5 cm, nas idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses.

### Ajuste e Avaliação

Os dados de dap observados em cada parcela foram agrupados em classe com amplitude de 1,0 cm. Ajustou-se a função Birnbaum-Saunders nas formas: Birnbaum-Saunders 3P, Birnbaum-Saunders 2P e Birnbaum-Saunders  $\gamma = \text{dapmin}$ . Os ajustes foram feitos em ambiente Excel com o auxílio de técnicas de Visual Basic for Applications.

Para avaliar a aderência da função aos dados, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) (SOKAL; ROHLF, 1981; GIBBONS; SUBHABRATA, 1992). Realizou-se a análise entre valores estimados e observados em todos os ajustes obtidos com a função Birnbaum-Saunders.

### Modelos de Distribuição Diamétrica

A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na alternativa usual de correlação dos parâmetros da fdp com características do povoamento. Conforme Nogueira et al. (2005), utilizaram-se como variáveis dependentes os parâmetros da função Birnbaum-Saunders em uma idade futura e como variáveis independentes, os parâmetros da função e características do povoamento em uma idade atual.

A redistribuição teórica dos diâmetros foi avaliada pela capacidade do sistema de equações em projetar o diâmetro máximo, o número total de árvores e os parâmetros da função Birnbaum-Saunders ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ) para qualquer idade. Construiu-se um modelo para cada configuração testada da função. O coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados e a análise gráfica dos resíduos foram utilizados para avaliar a exatidão das estimativas do sistema de equações.

### 3. RESULTADOS

Ajustou-se a função Birnbaum-Saunders para todas as parcelas e em cada situação e em cada configuração, sendo cada estimação comparada com a distribuição observada. Todos os ajustes resultaram em aderência aos dados pelo teste de Kolmogorov-Smirnov ( $P > 0,01$ ). Os valores médios da estatística do teste foram de 0,0779; 0,1061; e 0,1438, para a função com 3P, 2P e  $\tilde{\alpha} = \text{dapmin}$ , respectivamente. Três parcelas foram escolhidas aleatoriamente, e seus ajustes são apresentados na Figura 1.

Os modelos de distribuição diamétrica ajustados com os respectivos coeficientes de correlação e RMSE (%) são apresentados a seguir:

#### Birnbaum-Saunders 3P

$$\ln \alpha_2 = \ln \alpha_1 e^{-(0,00003)(I_2^{1,8605} - I_1^{1,8605})} \quad R_{yy} = 0,8971$$

$$\ln \beta_2 = \ln \beta_1 e^{-(112,9340)(I_2^{-2,2688} - I_1^{-2,2688})} \quad R_{yy} = 0,8794$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 e^{-(134,2811)(I_2^{0,0002} - I_1^{0,0002})} \quad R_{yy} = 0,8849$$

#### Birnbaum-Saunders 2P

$$\alpha_2 = \alpha_1 e^{-(3,1782)(I_2^{-0,2060} - I_1^{-0,2060})} \quad R_{yy} = 0,9869$$

$$\beta_2 = \beta_1 e^{-(7,8052)(I_2^{-0,7120} - I_1^{-0,7120})} \quad R_{yy} = 0,9504$$

#### Birnbaum-Saunders $\gamma = \text{dapmin}$

$$\alpha_2 = \alpha_1 e^{-(11,8306)(I_2^{-0,9746} - I_1^{-0,9746})} \quad R_{yy} = 0,9731$$

$$\beta_2 = \beta_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 0,51151 \left( -\frac{I_1}{I_2} \right) q \quad R_{yy} = 0,9466$$

#### Características do povoamento:

$$d \max_2 = d \max_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 25,3786 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9525$$

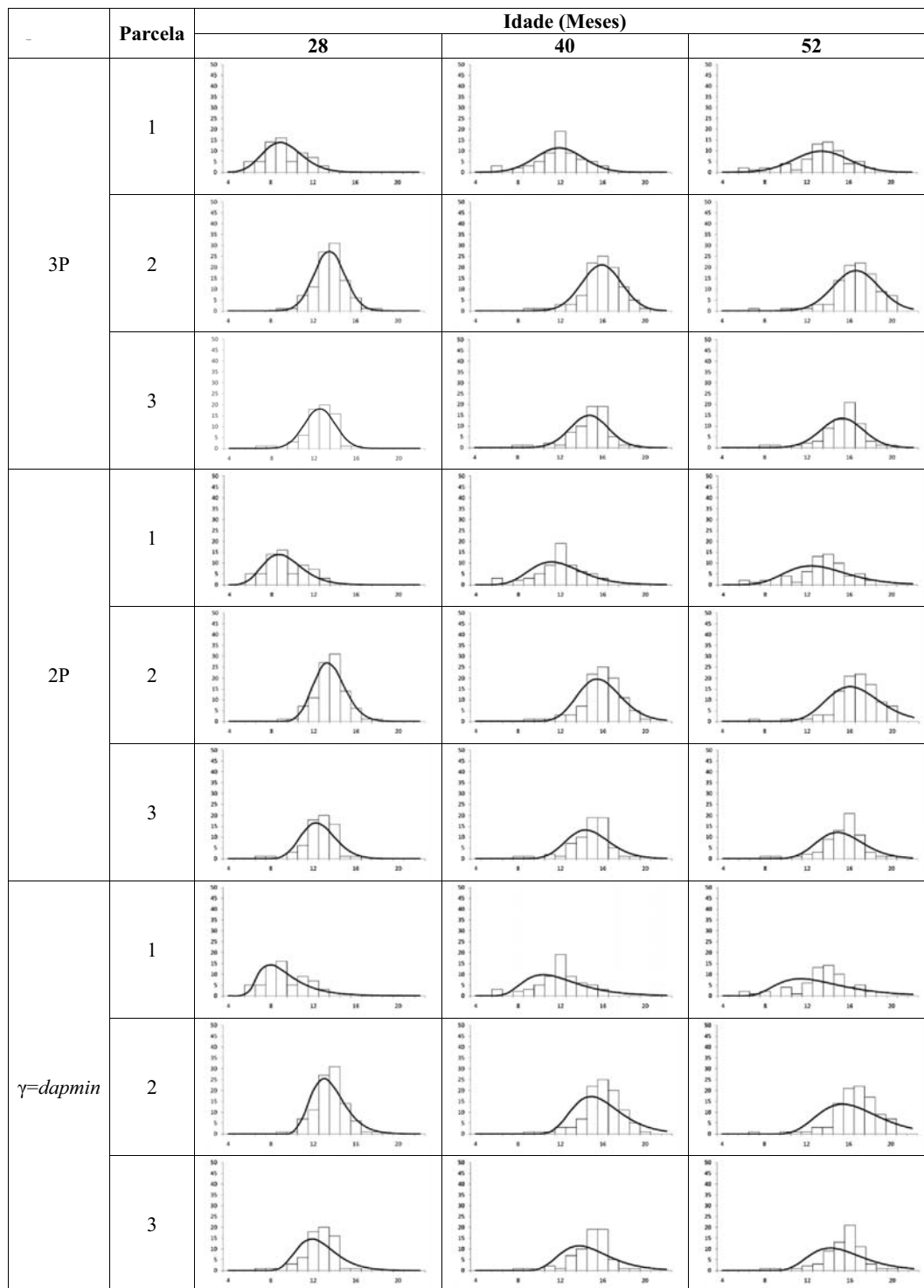
$$d \min_2 = d \min_1 e^{-(16,6040)(I_2^{-1,1574} - I_1^{-1,1574})} \quad R_{yy} = 0,8841$$

em que  $I_1$  e  $I_2$  são as idades atual e futura, respectivamente, em meses;  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os parâmetros de forma da função Birnbaum-Saunders nas idades atual e futura;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros de escala da função Birnbaum-Saunders nas idades atual e futura;  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os parâmetros de locação da função Birnbaum-Saunders nas idades atual e futura;  $d \max_1$  e  $d \max_2$  são os diâmetros máximos nas idades atual e futura, em cm;  $d \min_1$  e  $d \min_2$  são os diâmetros mínimos nas idades atual e futura, em cm;  $q$  é a soma quadrática dos  $dap$ ; e  $\ln$  é o logaritmo neperiano.

A dispersão gráfica dos resíduos percentuais e os histogramas da dispersão dos erros de cada equação que compõe o sistema são apresentados na Figura 2. Não houve necessidade de projeção da densidade do povoamento em razão do baixo índice de mortalidade observado.

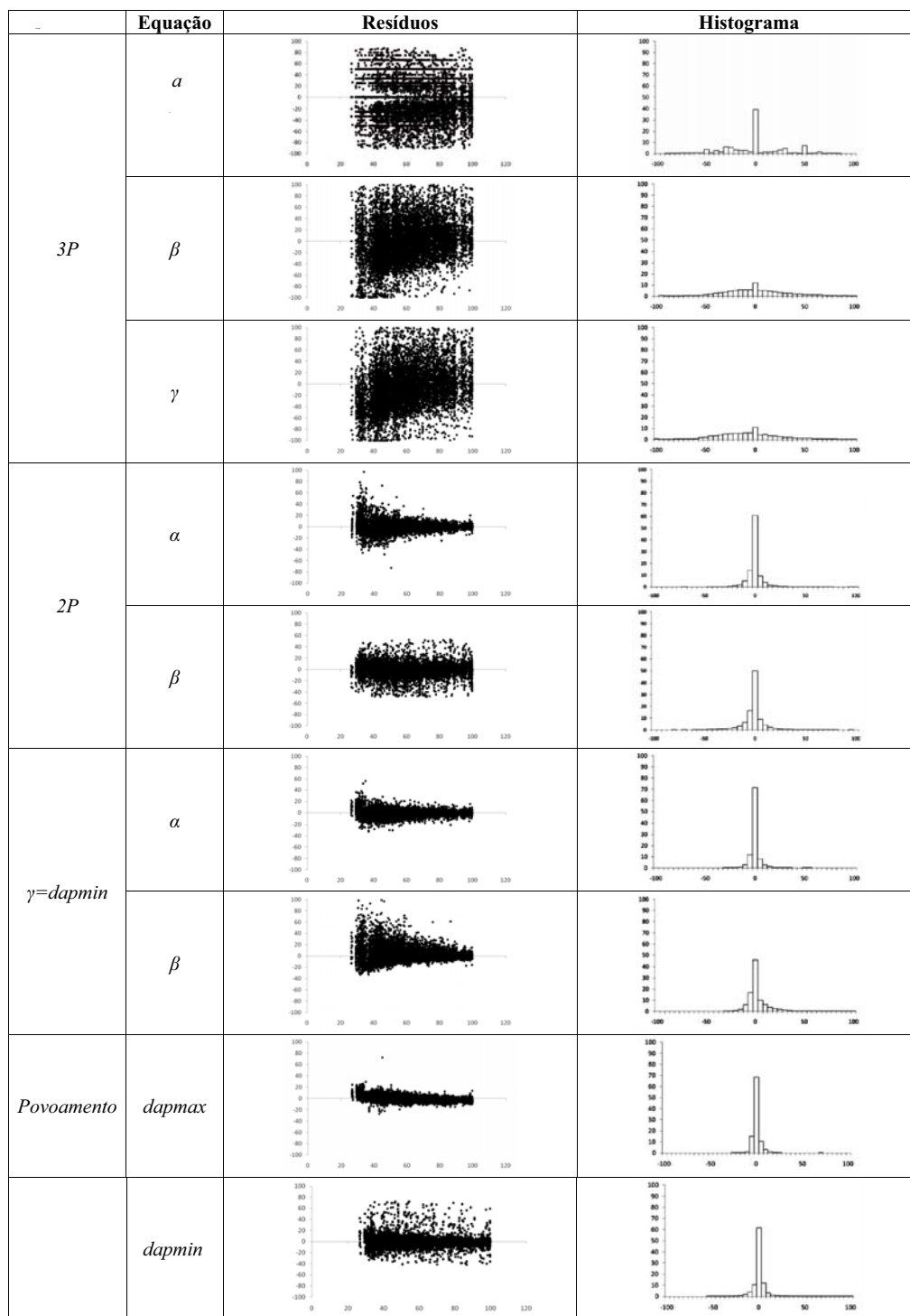
### 4. DISCUSSÕES

A função Weibull sempre tem sido empregada por diversos autores para modelagem de distribuições de diâmetros (COHEN, 1965; BAILEY; DELL, 1973; MAGNUSSEN, 1986; GOVE; PATIL, 1998; KANGAS; MALTAMO, 2000; CAO, 2004; NOGUEIRA et al., 2005; MERGANIC; STERBA, 2006; METATALO et al., 2006; CAMPOS; LEITE, 2009). As justificativas para o uso dessa função são a sua flexibilidade e a correlação



**Figura 1** – Frequência observada e estimada pela função Birnbaum-Saunders em povoamentos equiâneos de eucalipto em diferentes idades.

**Figure 1** – Observed and estimated frequency by the Birnbaum-Saunders function for even-aged stands of eucalypt at different ages.



**Figura 2** – Dispersão e histograma de resíduos em razão da idade do povoamento nas quatro equações que compõem o modelo de distribuição diamétrica.

**Figure 2** – Dispersion and histogram of residues according to the age of the stand for the four equations of diameter distribution model.

significativa normalmente encontrada entre seus parâmetros e as características dos povoamentos, como o diâmetro médio quadrático e o diâmetro máximo.

Trabalhos recentes, como os de Guimarães (2002), Binoti (2008) e Leite et al. (2010), têm demonstrado a existência da função densidade de probabilidade com qualidades superiores à função Weibull para descrição da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos. Por isso, trabalhos como esses se fazem necessários para o aprimoramento da modelagem em nível de distribuição diamétrica.

Foi objetivo deste estudo analisar a aplicação da função Birnbaum-Saunders nas três configurações (3P, 2P e  $\gamma = dapmin$ ), para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando essa função. Não foi objetivo comparar a função em questão com outras funções encontradas na literatura.

A utilização da função de 3P apresenta maior flexibilidade para a descrição da distribuição diamétrica do povoamento em estudo, o que é comprovado pelo menor valor da estatística do teste K-S. Contudo, a utilização da função Birnbaum-Saunders nessa forma apresenta maior variabilidade dos parâmetros, dificultando a recuperação da distribuição em idade futura (Figura 2). Caso semelhante acontece com outras funções utilizadas para modelagem da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos, como a função Weibull (CAMPOS; LEITE, 2009).

As equações que compõem os modelos de distribuição diamétrica de 2P e  $\tilde{a} = dapmin$  não apresentaram tendenciosidade em suas estimativas, podendo ser usadas para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos. A eficiência da função Birnbaum-Saunders deve ser verificada para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos manejados sobre regime de desbaste.

## 5. REFERÊNCIAS

ACHAR, J. A. Inference for Birnbaum-Saunders fatigue life model using Bayesian method. **Computational Statistic Data Analysis**, v.15, p.367-380, 1993.

BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, v.19, n.2, p.97-104, 1973.

BINOTI, D. H. B. **Funções densidade de probabilidade para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos desbastados de *Tectona grandis***. 2008. 42f. Monografia (Graduação em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2008.

BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. A new family of life distributions. **Journal of Applied Probability**, v.6, n.2, p.319-327, 1969a.

BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. **Journal of Applied Probability**, v.6, n.2, p.328-347, 1969b.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3.ed. Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 2009. 548p.

CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, v.50, n.4, p.682-685, 2004.

COHEN, A. C. Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. **Technometrics**, v.7, n.4, p.579-588, 1965.

GIBBONS, J. D.; SUBHABRATA, C. **Nonparametric statistical inference**. 3.ed. New York: Marcel Dekker, 1992. 544p. (Statistics: Textbook and Monograph, v.31).

GOVE, J. H.; PATIL, G. P. Modelling the basal area-size distribution of forest stand: A compatible approach. **Forest Science**, v.44, n.2, p.285-297, 1998.

GUIMARÃES, D. P. **Uma função hiperbólica de distribuição probabilística de alta flexibilidade**. Planaltina: Embrapa Cerrados, 2002. 40p.

HAFLEY, W. L.; SCHREUDER, H. T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in ever-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v.7, n.1, p.184-487, 1977.



LEITE, H. G. et al. Avaliação do ajuste das funções Weibull e hiperbólica a dados de povoamentos de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.34, n.2, p.305-311, 2010.

MALTAMO, M. et al. Comparison of percentile based prediction methods and the Weibull distribution in describing the diameter distribution of heterogeneous Scots pine stands. **Forest Ecology Management**, v.133, n.3, p.263-274, 2000.

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of beta and Weibull functions for modeling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scandinavian Journal Forest Research**, v.10, n.1/4, p.284-295, 1995.

NG, H. K. T.; KUNDU, D.; BALAKRISHNAN, N. Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. **Computational Statistic Data Analysis**, v.43, p.283-298, 2003.

NOGUEIRA, G. S. et al. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.29, n.4, p.579-589, 2005.

SOKAL, R. R.; ROHLF, F. J. **Biometry**. San Francisco: Freeman, 1981.

WANG, Z. H.; DESMOND, A. F.; LU, X. W. Modified censored moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. **Computational Statistic Data Analysis**, v.4, p.1033-1051, 2006.

KANGAS, A.; MALTAMO, M. Performance of percentile based diameter distribution prediction and Weibull method in independent data sets. **Silva Fennica**, v.34, n.4, p.381-398, 2000.

MAGNUSSEN, S. Diameter distribution in *Picea abies* described by the Weibull model. **Scandinavian Journal Forest Research**, v.1, n.1/4, p.493-502, 1986.

MERGANIC, J.; STERBA, H. Characterisation of diameter distribution using the Weibull function: method of moments. **European Journal Forest Research**, v.125, n.4, p.427-439, 2006.

MEHTÄTALO, L.; MALTAMO, M.; KANGAS, A. The use of quantile trees in the prediction of the diameter distribution of a stand. **Silva Fennica**, v.40, n.3, p.501-516, 2006.

