Resultados de Estática Comparativa para um Mercado de Matching Misto de Dois Lados*

Marilda Sotomayor**

Palavras-chave: alocação estável; núcleo; salário competitivo.

Códigos JEL: C78; D78.

Este artigo estuda a estática comparativa de adicionar agentes ao mercado de matching que consiste de uma "economia mista" que unifica os tradicionais casos discreto e contínuo, conhecidos como Marriage Market (Gale e Shapley, 1962) e Assignment Market (Shapley e Shubik) respectivamente: algumas firmas competem por meio de salários e outras não têm nenhuma flexibilidade sobre os termos das contratações dos candidatos.

This paper studies the comparative statics of adding agents to the matching market which consists of a "mixed economy" that unifies the traditional discrete and continuous cases, known as Marriage Market (Gale e Shapley, 1962) and Assignment Game (Shapley e Shubik, 1972), respectively: some firms compete by means of wages while others have no flexibility over the terms of appointments.

1. Introdução

A Teoria de Matching para mercados de dois lados se iniciou com Gale e Shapley em 1962 com o artigo "College Admissions and the Stability of Marriage". Ao longo dos anos, os modelos de matching de dois lados deixaram de constituir apenas um conjunto interessante de modelos matemáticos para se tornar uma importante parte do campo de pesquisas emergente de desenho de mercados. Têm contribuído grandemente na compreensão do funcionamento de uma variedade de mercados, ajudando às instituições que têm sido criadas para organizá-los. Atualmente existe uma vasta literatura, tanto teórica como empírica, referente a mercados de matching de dois lados.

*Artigo recebido em dez. 2000 e aprovado em dez. 2003.

**Departamento de Economia, Universidade de São Paulo. Parcialmente financiado pelo CNPq e FIPE.

Como observado por Cournot, Edgeworth, Bohm-Bawerk e outros, os mercados de dois lados são importantes, não somente pelos "insights" que eles podem dar para situações econômicas com muitos tipos diferentes de agentes, mas também porque em situações reais a maioria das transações são de fato bilaterais. Os mercados de matching de dois lados envolvem dois conjuntos finitos e disjuntos de agentes, e têm como principal função a de formar parcerias. Em tais mercados cada agente de um lado forma uma parceria com um agente do lado oposto e então realiza alguma atividade em conjunto que produz um ganho que é dividido entre os parceiros. Mercados de trabalho onde firmas e trabalhadores são heterogêneos e bem informados podem em geral ser modelados como um mercado de matching de dois lados: se uma firma contrata algum trabalhador, a produtividade do par é dividida entre eles em salário para o trabalhador e lucro para a firma. Um exemplo de um tal mercado é o mercado de recrutagem de professores para uma dada posição pelas Universidades. No mercado americano, as Universidades competem entre si em termos de salário. Já no mercado brasileiro, cada Universidade brasileira pública oferece um salário pré-determinado e fixado. Tradicionalmente, o primeiro tipo de mercado tem sido modelado como o mercado de matching contínuo com utilidades lineares, conhecido como Assignment Game (Shapley e Shubik, 1972), em que os salários podem ser negociados e podem variar continuamente no conjunto de números reais, enquanto o outro tipo tem sido modelado como o mercado de matching discreto, Mercado do Casamento (Gale e Shapley, 1962). Neste modelo o salário é parte da descrição de trabalho e é apenas um dos fatores que determinam as preferências dos professores pelas Universidades.

Na prática, porém, a hipótese de que os agentes têm suas escolhas restritas a apenas um dos mercados (discreto ou contínuo) são um impecilho à visão dos modelos de Gale e Shapley e de Shapley e Shubik como modelos de mercados de trabalho reais. Muitos agentes desejam entrar nos dois mercados simultaneamente. Na realidade, estes mercados são parte de um único mercado, portanto uma modelagem adequada deve permitir que qualquer agente possa negociar simultaneamente em ambos os mercados.

Em Sotomayor (2000), seguindo a idéia de Eriksson e Karlander (1997), tal unificação é oferecida: Alguns agentes são considerados "rígidos" quanto à divisão dos ganhos das parcerias e outros não. O Mercado do Casamento é obtido quando todos os agentes são rígidos (basta que todos de um mesmo lado sejam rígidos). Obtemos o Assignment Game quando nenhum participante é rígido.

O presente artigo objetiva continuar a análise do modelo unificado. Sem buscar por grandes generalizações, o modelo de Sotomayor (2000) é modificado levemente de forma a adequá-lo ao contexto de firmas e trabalhadores. Algumas firmas (rígidas) não negociam salários, de modo que a divisão dos ganhos na formação das correspondentes parcerias é pré-estabelecida. As firmas que negociam os salários serão denominadas flexíveis.[1] O problema que estamos interessados em solucionar é bastante simples: Como a transformação de um mercado flexível em misto, ou de um mercado rígido em misto, permitindo livre negociação dos trabalhadores com os dois tipos de firmas, poderia afetar os payoffs dos agentes? Mais especificamente, é mais lucrativo para os agentes operar nos mercados simples ou no mercado misto?

A solução deste problema do ponto de vista da Teoria dos Jogos requer algumas considerações. Estaremos supondo, como é tradicional na Teoria de Matching, que o mercado é organizado de forma centralizada e as alocações são obtidas via algum mecanismo. A teoria e a prática têm mostrado que o sucesso de um tal mecanismo depende do fato das alocações produzidas serem ou não estáveis. Assim, procuramos por um mecanismo estável.

No Mercado do Casamento, um matching ou uma alocação dos trabalhadores para as firmas é *estável* se é individualmente racional e nenhuma firma e nenhum trabalhador se preferem mutuamente aos seus parceiros. Para o Assignment Game, um resultado é um matching e um vetor de payoffs, um para cada agente. Ele é *estável* se é individualmente racional e nenhuma firma e nenhum trabalhador podem negociar um payoff mais alto para ambos do que o que eles obtém com o corrente resultado. Em Sotomayor (2000), uma demonstração não construtiva do teorema de existência de alocações estáveis, comum aos dois modelos, é oferecida. É provado também que quando o núcleo definido por dominação forte coincide com o núcleo definido por dominação fraca, o conjunto das alocações estáveis é dotado de uma estrutura algébrica de reticulado completo. O interesse econômico em uma tal estrutura matemática é que ela garante que para cada lado do mercado existe sempre uma alocação estável ótima para este lado, que é a mais preferida por todos os agentes deste lado e a menos preferida por todos os agentes do outro lado a qualquer outra tal alocação.

Embora não possamos garantir a existência das alocações estáveis ótimas no mercado misto (exemplo 1), podemos provar a existência de alocações estáveis muito especiais. Tais alocações são também de interesse econômico, pois quando o conjunto das firmas rígidas (respectivamente, flexíveis) é vazio elas coincidem com as alocações ótimas para cada lado correspondente do mercado para o Mercado do Casamento (respectivamente, Assignment Game). A obtenção dessas duas alocações pode ser feita utilizando-se o algorítmo apresentado em Sotomayor

[1] Este modelo é também adequado para um mercado de compra e venda, como por exemplo o mercado de carros. Os carros novos têm preços fixos, tabelados, enquanto os usados têm preços negociáveis.

(2003), que produz uma das alocações num número finito de etapas. Este algorítmo mimifica os procedimentos de ajustes salariais reais e a sua dinâmica nos ajuda a explicar os resultados teóricos que serão apresentados aqui. Referir-nos-emos a ele como *mecanismo de ajuste salarial dinâmico.* Para a obtenção da outra alocação, fixamos a alocação das firmas rígidas obtida com o *mecanismo de ajuste salarial dinâmico* e variamos a alocação das firmas flexíveis no conjunto das alocações estáveis. Obtemos assim um reticulado completo, onde a alocação estável obtida com o algorítmo é a ótima para as firmas. A restrição deste reticulado ao Assignment game reduzido, resultante da remoção das firmas rígidas com seus respectivos parceiros, é um sub-reticulado do conjunto dos resultados estáveis para o Assignment game reduzido. A alocação ótima para os trabalhadores pode então ser obtida via algum procedimento que determine o correspondente ponto extremo do subreticulado (ver capítulo 8 em Roth e Sotomayor (1990)). É claro que o mecanismo de Sotomayor (2003) restrito ao Mercado do Casamento ou ao Assignment Game produz o resultado estável ótimo para as firmas. É também claro que o procedimento para se encontrar o resultado estável ótimo para os trabalhadores no conjunto das alocações estáveis que mantém invariante a alocação das firmas rígidas obtida com o *mecanismo de ajuste salarial dinâmico* produz o resultado estável ótimo para os trabalhadores quando restrito ao Assignment Game. Que isto também é verdade para o Mercado do Casamento se deve ao fato de que o conjunto dos matchings estáveis para este mercado é unitário em nosso modelo.

A idéia é então, usando as alocações produzidas pelos mecanismos mencionados acima, derivar resultados de estática comparativa sobre os efeitos da entrada das firmas flexíveis no Mercado do Casamento e das firmas rígidas no Assignment Market. Normalmente esperaríamos que a entrada de novos agentes de um lado, enfraquecesse as posições competitivas dos outros agentes desse lado e fortalecesse as posições competitivas dos agentes do lado oposto. Este artigo oferece os fundamentos teóricos para provar resultados que confirmam esta intuição. Estes resultados não têm similares nos modelos discreto e contínuo e, pelo que sabemos, são os mais fortes resultados de estática comparativa sobre mercados de matching um-a-um existentes na literatura.

1.1 Hipóteses econômicas subjacentes

As hipóteses de nosso modelo são as usuais de Gale e Shapley para o Mercado do Casamento e de Shapley e Shubik para o Assignment Game. Embora restritivas em muitos aspectos, permitem abranger uma grande variedade de mercados de matching de dois lados, como por exemplo, mercados de casas, mercados de carros usados e mercados de trabalho em geral. As mais importantes hipóteses econômicas são:

1. Utilidade é identificada com dinheiro.
   É bem verdade que as preferências dos trabalhadores dependem não somente do salário, mas também de outros fatores como a satisfação com o emprego, localização da empresa, etc. Por outro lado, a explicação mais comum de quem troca de emprego por livre e expontânea vontade é que encontrou um trabalho que lhe ofereceu um salário mais alto. Isto nos permite pensar que, em um grande número de situações, o efeito que o dinheiro produz nas preferências dos indivíduos torna praticamente desprezível os efeitos dos demais fatores, de forma que a completa monetarização da utilidade é defensável. É então razoavel pensarmos num ambiente de mercado aberto, onde existem muitos trabalhadores vendendo seus serviços por dinheiro e muitas firmas comprando esses serviços.

2. Cada agente está interessado em formar no máximo uma parceria.
   Admitimos que é uma hipótese restritiva, mas não é inteiramente irrealista e não temos a intenção de grandes generalizações. Cargos de chefia, são em geral, ocupados por uma única pessoa. Assim é, por exemplo, razoável que cada firma ofereça uma (e só uma) posição de gerente e que os candidatos só possam aceitar uma dessas posições. É muito comum Universidades oferecerem uma única posição de professor Titular com regime de dedicação exclusiva, dessa forma limitando cada candidato a aceitar um único emprego. Num contexto de mercado de compra e venda, nos mercados de carros usados, por exemplo, é comum que cada vendedor possua um carro para vender e cada comprador deseje comprar um carro para o seu uso.

3. Na seção 2 apresentamos o modelo matemático. Devido à sua importância no presente trabalho, a descrição do *mecanismo de ajuste salarial dinâmico* é apresentado na seção 3. A seção 4 ilustra com exemplos o funcionamento do mecanismo e alguns resultados de estática comparativa. A seção 6 conclui com algumas observações finais.

2. Modelo Matemático

Existem dois conjuntos finitos e disjuntos de agentes, $P = \{p_1, p_2, ..., p_i, ...p_m\}$ e $Q = \{q_1, q_2, ..., q_j, ..., q_n\}$. Para fixar idéias, os membros de P serão chamados de firmas e os membros de Q serão chamados de trabalhadores. Os agentes de um lado formam parcerias com os agentes do lado oposto e então realizam alguma atividade que produz um ganho que é dividido entre os parceiros. Cada agente está interessado em formar no máximo uma parceria. Algumas firmas são rígidas quanto à divisão dos ganhos e outras não. Isto é, uma firma *rígida* oferece o mesmo salário a todos os trabalhadores. Uma firma flexível pode negociar o salário oferecido a um dado trabalhador. Formalmente, se p_i e q_j formam uma parceria, eles realizam uma atividade que lhes dá o ganho conjunto (ganho da transação) $a_{ij} + b_i$. O agente p_i recebe u_i e q_j recebe v_j, de tal forma que $u_i + v_j = a_{ij} + b_i$. Se p_i é rigida ela determina o salário de seu parceiro, b_i, donde $u_i = a_{ij}$ e $v_j = b_i$. O conjunto das firmas rígidas será denotado por P^R. Se p_i não é rígida diremos que é *flexível*. Neste caso assumiremos que $a_{ij} + b_i \geq 0$ para todo q_j. O conjunto das firmas flexíveis será denotada por P^F. Por simplicidade consideraremos que o payoff de reserva de cada agente é 0. Por questões técnicas introduziremos um trabalhador fictício q_0. Se p_i contrata q_0, ambos têm payoff 0.

Seguindo as hipóteses usuais de Gale e Shapley para o mercado do casamento, assumiremos que as preferências das firmas rígidas sobre os trabalhadores tanto como as preferências dos trabalhadores sobre as firmas rígidas são estritas, completas e transitivas. Elas simplificam as demonstrações e garantem a existência de alocações estáveis ótimas para cada lado do mercado rígido. Contudo os nossos resultados são também válidos para preferências não estritas.

Para uma firma rígida os números a_{ij}'s expressam as suas preferências sobre os trabalhadores. Assim, os números a_{ij}'s referentes às firmas rígidas são distintos, e se p_i é rígida então ela prefere q_j a q_k se e somente se $a_{ij} > a_{ik}$, e q_j é **aceitável** para p_i se e somente se $a_{ij} > a_{i0} = 0$. Desta forma, cada firma rígida pode listar numa ordem de preferências estrita os trabalhadores que gostaria de contratar. Se, por exemplo, a lista de preferências de p_i é dada por $L(p_i) = q_h,\ q_j, \ldots, q_0, q_p$, então significa que p_i prefere q_h a q_j. O trabalhador q_p é inaceitável para p_i, de maneira que p_i prefere não contratar nenhum trabalhador a contratar q_p.

Dado que os trabalhadores têm preferencias estritas, completas e transitivas sobre as firmas rígidas, eles podem, portanto, expressá-las por listas ordenadas de preferências. Um trabalhador prefere a firma rígida p_i à firma rígida p_h se e somente se $b_i > b_h$. Devido às considerações acima, todos os trabalhadores terão a mesma lista de preferências estritas sobre os agentes rígidos. Logo, $b_i > 0$ para todo $p_i \in P^R$ aceitável para os trabalhadores.[2]

Colocaremos $a_i \equiv (a_{i1}, \dots, a_{in})$, para toda firma p_i. O mercado misto é então dado por $\boldsymbol{(P, Q, a, b)}$, onde a é a matrix dos $a_{ij'}$s e b é o vetor $(b_1, \dots, b_m)$. O mercado $\boldsymbol{(P^F, Q, a, b)}$ será chamado de **mercado flexível**, enquanto $\boldsymbol{(P^R, Q, a, b)}$ de **mercado rígido**.

Informalmente, um *matching* é uma **alocação dos trabalhadores para as firmas** que será denotada por x (a definição formal pode ser vista em Roth e Sotomayor (1990)). Um **matching é factível** se nenhuma firma é designada para mais de um trabalhador e nenhum trabalhador não fictício é alocado para mais de uma firma. Se o trabalhador q_j é alocado para a firma p_i por x então p_i é designada a q_j por x e escrevemos $q_j = x(p_i)$ ou $p_i = x(q_j)$. Se p_i é designado ao trabalhador fictício então diremos, algumas vezes, que p_i é **não designada**. Se q_j não é alocado a nenhuma firma denotaremos algumas vezes $x(q_j) = q_j$. O trabalhador q_0 pode ser alocado para qualquer quantidade de firmas. Dado um conjunto S de agentes pertencentes a um mesmo lado do mercado denotamos $\boldsymbol{x(S) \equiv \{x(s); s \in S\}}$.

Definição 1. *Um **resultado** é um matching x e um par de vetores (u, v) denominado payoff, com $u \in R^m$ e $v \in R^n$. Será denotado por $(u, v; x)$.*

Definição 2. *Um resultado $(u, v; x)$ é **factível** se x é factível e*

a) $u_i \geq 0$ e $v_j \geq 0$ para todo $p_i, q_j) \in P$xQ (racionalidade individual);

b) $u_i = 0$ se p_i não é designada por x;

c) $v_j = 0$ se q_j não é alocado por x;

d) $u_i + v_j = a_{ij} + b_i$ se q_j é alocado a p_i por x;

e) $u_i = a_{ij}$ e $v_j = b_i$ se q_j é alocado a p_i por x e $p_i \in P^R$.

Se $(u, v; x)$ é factível então dizemos que (u, v) é um **payoff factível** e x é compatível com (u, v). O conceito solução para este tipo de jogo é o de estabilidade.

[2]Estas hipóteses são bastante razoáveis em muitos mercados de trabalho. As empresas públicas, por exemplo, costumam contratar pessoal para preenchimento de vagas de uma dada posição oferecendo o mesmo salário para todas as vagas. É também muito comum um profissional, frente a duas ofertas, optar pela que lhe dá o maior salário.

Definição 3. *Um resultado $(u, v; x)$ é* ***estável*** *se é factível e para todo $(p_i, q_j) \in P$xQ temos que*

a) $u_i + v_j \geq a_{ij} + b_i$ se $p_i \in P^F$ e;

a) $u_i > a_{ij}$ ou $v_j \geq b_i$ se $p_i \in P^R$.

Se a) ou b) não é satisfeita para algum par (p_i, q_j), dizemos que o par **bloqueia** o resultado. Assim, **um resultado é estável se é factível e não tem nenhum par bloqueante**.

Se $(u, v; x)$ é estável dizemos que o payoff (u, v) é um **payoff estável**.

Desde que os pares (p_i, q_j) são as únicas coalizões essenciais, um resultado é estável se e somente se está no núcleo do jogo cooperativo coalizional induzido pelo mercado (P, Q, a, b).

Definição 4. *Um resultado (u, v) é o* ***resultado estável ótimo para as firmas*** *se $u_i \geq u_i^{'}$ e $v_j \leq v'j$ para todo payoff estável (u', v'). Simetricamente, (u, v) é* ***o resultado estável ótimo para os trabalhadores*** *se $v_j \geq v_j'$ e $u_i \leq u_i'$ para todo payoff estável (u', v').*

2.1 O mercado rígido: (P^R, Q, a, b)

O trabalhador q_j é **aceitável** para a firma p_i se $a_{ij} \geq 0$. Todos os agentes podem listar seus parceiros potenciais em ordem, numa lista finita de preferências estritas. Todos os trabalhadores têm a mesma lista de preferências. Este mercado é um caso particular do bem conhecido *Marriage Market*, introduzido por Gale e Shapley em 1962. Um resultado $(u, v; x)$ é factível se satisfaz a), b), c) e e) da Definição 2. O resultado **$(u, v; x)$ é estável se é factível e não existe um par (p_i, q_j) tal que q_j prefere p_i** a $x(q_j)$ e **p_i prefere q_j** a $x(p_i)$.

Gale e Shapley provaram que sempre existe o resultado estável otimo para as firmas e o resultado estável ótimo para os trabalhadores.

2.2 O mercado flexível: (P^F, Q, a, b)

De acordo com o que assumimos anteriormente, $a_{ij} + b_i \geq 0$ para todo $(p_i, q_j) \in P^F$xQ e o salário de reserva de cada trabalhador é 0. Este modelo é o *Assignment Game* introduzido por Shapley e Shubik (1972).

Um resultado $(u, v; x)$ é factível se satisfaz a), b), c) e d) da Definição 2. Um resultado $(u, v; x)$ é estável se é factível e satisfaz a) da Definição 3. **Isto**

é, se $(u, v; x)$ é estável então cada p_i está maximizando o seu payoff utilidade aos salários v, todo trabalhador q_j está maximizando o seu payoff utilidade aos payoffs u e todo agente não alocado por x tem payoff 0. Este conceito está intimamente relacionado com o de alocação de equilíbrio competitivo neste mercado. Nesse caso v é chamado um **vetor de salários de equilíbrio competitivo**.

Analogamente ao mercado rígido, e devido a Shapley e Shubik, existe sempre um resultado estável ótimo para as firmas e um resultado estável ótimo para os trabalhadores.

3. Mecanismo de Ajuste Salarial Dinâmico

Na seção 4 ilustraremos os nossos resultados com exemplos, onde os salários são determinados pelo mecanismo de ajuste salarial dinâmico de Sotomayor (2003). Para facilitar o entendimento desses exemplos devotaremos esta seção a descrição deste mecanismo. Então, considere uma central que recebe as informações relativas ao mercado, isto é, os conjuntos P^R, P^F, Q e os pares de parâmetros (a, b). De posse dessas informações a central usa o algorítmo descrito abaixo, que encontra um salário para cada trabalhador e uma alocação dos diversos trabalhadores para as firmas, respeitando as cotas dos agentes: cada trabalhador é alocado para no máximo uma firma e nenhuma firma emprega mais de um trabalhador. Este mecanismo coincide com o de Demange et alii (1986) quando restrito ao mercado flexível. Neste caso o resultado produzido é o estável ótimo para as firmas. Quando restrito ao mercado rígido, coincide com o mecanismo de Gale e Shapley (1962) com as firmas fazendo as ofertas, e portanto o resultado produzido é também o estável ótimo para as firmas.

É provado em Sotomayor (2000) que uma condição suficiente para a existência de resultados estáveis ótimos para cada um dos lados do mercado misto é que o núcleo definido por dominação forte coincida com o núcleo definido por dominação fraca. Embora esta propriedade possa não ocorrer no mercado em questão, é mostrado em Sotomayor (2003) que, fixada a alocação das firmas rígidas, o mecanismo de ajuste salarial dinâmico produz a alocação estável mais preferida pelas firmas.

Necessitamos de mais algumas notações e terminologias. Dado um vetor de salários v e $p_i \in P^F$, denotaremos por $D_i(v)$ o conjunto dos trabalhadores q_j tais que $a_{ij}+b_i-v_j \geq a_{ik}+b_i-v_k$ para todo trabalhador q_k. Isto é, o payoff de p_i quando ela emprega o trabalhador $q_j \in D_i(v)$ ao salário v_j é maior ou igual ao payoff de p_i quando ela emprega qualquer outro trabalhador q_k ao salário v_k. Pode existir mais de um trabalhador em $D_i(v)$. O trabalhador fictício é sempre uma opção para

p_i, logo $D_i(v) \neq \phi$ para todo $p_i \in P^F$. Dado um conjunto S de trabalhadores, o conjunto T de firmas h com $D_h(v) \subseteq S$ é chamado de conjunto de **demandadores leais** de S. Se $|T| \geq |S|$ dizemos que S é **quasi-super demandado**; Se $|T| > |S|$ dizemos que S é **super-demandado**.

Para as firmas rígidas, dado um vetor de salários v, daremos um procedimento para computar $D_i(v)$ para todo $p_i \in P^R$. Indexe as firmas rígidas $P^R = p_1, p_2, \ldots, p_r$ onde p_i é a i-èsima firma da lista de preferências (comum) dos trabalhadores. Considere as listas de preferências de todas as firmas $p_i \in P^R$ sobre os trabalhadores. Remova da lista de cada p_i todos os trabalhadores com salários $v_j > b_i$. Remova também qualquer trabalhador $q_j \neq q_0$ de salário $v_j = b_i$ e pertencente a algum conjunto S **quasi-super demandado** e tal que se T é o conjunto de demandadores leais de S então $T \subseteq P^F \cup p_1, ..., p_{i-1}$. Além disso, S é **minimal para q_j**, i.e., S não tem nenhum subconjunto próprio que contém q_j e que seja quasi-superdemandado. As novas listas de preferências serão chamadas de listas reduzidas. Definiremos $D_1(v)$ como o trabalhador favorito de p_1 segundo a sua lista reduzida. Remova o trabalhador de $D_1(v)$ das listas das demais firmas, caso $D_1(v) \neq q_0$. Definiremos $D_2(v)$ como o trabalhador favorito de p_2 da sua lista resultante. Remova $D_2(v)$ das listas de $\{p_3, \ldots, p_r\}$, caso $D_2(v) \neq q_0$. Definiremos $D_3(v)$ como o trabalhador favorito de p_3 de sua lista resultante, e assim sucessivamente. Assim, $D_i(v)$ é o trabalhador favorito de p_i da lista que resulta depois que os trabalhadores de $D_1(v) \cup D_2(v) \cup ... \cup D_{i-1}(v) - \{q_0\}$ foram removidos de sua lista reduzida.

Observe que o trabalhador fictício nunca é removido das listas das firmas rígidas, logo $D_i(v) \neq \phi$ para todo $p_i \in P^R$.

Por um abuso de linguagem, chamaremos **$D_i(v)$ de conjunto de demanda da firma p_i aos salários v**, embora os firmas rígidas não estejam, necessariamente, maximizando seus payoffs neste conjunto.

Para descrever o algoritmo faremos uso do seguinte resultado conhecido da Teoria dos Grafos, sub área da Teoria Combinatória. Sejam B e C dois conjuntos finitos e disjuntos, por exemplo, firmas e trabalhadores, respectivamente. Para cada p_i em B, seja D_i um subconjunto de C. Uma **alocação simples** é uma alocação dos trabalhadores para os firmas tal que cada firma p_i está designada exatamente para um trabalhador q_j e q_j está em D_i. Além disso cada trabalhador é alocado a no máximo uma firma. (Isto é, uma alocação simples aloca algum trabalhador para toda firma mas pode não designar todo trabalhador para algum firma). É claro então que se existe uma alocação simples, cada firma em todo subconjunto B' de B deve estar designado a um trabalhador diferente, e portanto deve existir no mínimo tantos trabalhadores em $D(B') \equiv \cup_{B'} D_i$ quanto existe de firmas em B'. O Teorema devido a Hall (1935) [3] diz que esta condição necessária é também suficiente.

Consideraremos todos os números a_{ij} e b_j como sendo inteiros. Na primeira etapa do algorítmo cada firma especifica seu conjunto de demanda ao salário $v(1) = (0, ..., 0)$.

Etapa $(t+1)$: Depois que os conjuntos de demanda são especificados, se for possível designar cada firma para um trabalhador do seu conjunto de demanda ao salário $v(t)$ o algoritmo pára. O salário final será $v_j(t+1) = v_j(t)$ se q_j for alocado para uma firma flexível e será $v_j(t+1) = b_i$ se q_j é alocado para alguma firma rígida. Se uma tal alocação não existe, o teorema de Hall implica que existe algum conjunto de trabalhadores superdemandado. O mecanismo escolhe um conjunto S superdemandado minimal. Um conjunto de trabalhadores superdemandado é **minimal** se não possui nenhum subconjunto próprio superdemandado. O salário $v_j(t+1)$ de cada trabalhador q_j no conjunto S é obtido da seguinte maneira: Defina T como o conjunto de demandadores leais de S. Se $T \cap P^R \neq \phi$ então existe algum objeto $q_j \in S$ que tem um demandador leal $p_i \in P^R$. Neste caso $v_j(t) < b_i$ (isto segue da definição de $D_i(v(t))$ e do fato que S é super-demandado). Então defina $v_j(t+1) = b_i$ se $v_j(t) < b_i$ e q_j é demandado pela firma rígida p_i, e $v_j(t+1) = v_j(t)$, caso contrário. Se $T \cap P^R = \phi, v_j(t+1) = v_j(t) + 1$ para todo $q_j \in S$. Todos os outros salários continuam inalterados.

É claro que o algoritmo pára em alguma etapa, pois tão logo o salário de um trabalhador se torne mais alto do que o máximo dos $a'_{ij}s + b_i$'s, então ele não será demandado por nenhuma firma flexível, e tão logo o salário de um trabalhador q_j se torne mais alto do que o máximo dos b_i's ele não será demandado por nenhuma firma rígida. É demonstrado em Sotomayor (2003) que este algorítmo produz um resultado estável e, fixada a alocação das firmas rígidas, o salário final é menor ou igual ao salário de qualquer alocação estável. Em decorrência disso, quando $P^R = \phi$ os salários finais coincidem com os salários mínimos competitivos para o mercado flexível e é portanto a alocação ótima para as firmas para o mercado flexível; quando $P^F = \phi$ a alocação dos trabalhadores é a obtida usando-se o algoritmo de Gale e Shapley com as firmas propondo, e é portanto a alocação estável ótima para as firmas para o mercado rígido.

[3] Teorema de Hall: Uma alocação simples existe se e somente se, para todo subconjunto B' de B, o número de elementos em $D(B')$ é maior ou igual ao número de elementos em B'.

Vale observar que devido às preferências dos trabalhadores serem as mesmas com respeito às firmas rígidas, existe uma única alocação estável para o mercado rígido.

4. Exemplos

Exemplo 1 (inexistência do resultado estável ótimo para as firmas) Considere $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_0\}$, onde $P^R = \{p_1, p_2\}, P^F = \{p_3\}$. O vetor dos $a_{3j} + b_3, j = 1, 2, 3, 0$ é $(5, 3, 0, 0)$; a matriz dos a_{ij}'s para as firmas rígidas é dada por:

$$\begin{array}{c|cccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_0 \\ p_1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ p_2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Os b_i's correspondentes às firmas rígidas são dados pelo vetor $b = (4, 2)$.

Existem exatamente dois resultados estáveis: $(u^1, v^1; x^1)$, $(u^2, v^2; x^2)$, onde x^1 designa p_1 para q_1, p_2 para q_3 e p_3 para q_2; x^2 designa p_1 para q_3, p_2 para q_2 e p_3 para q_1; $u^1 = (3, 2, 1)$, $v^1 = (4, 2, 2)$; $u^2 = (2, 3, 1)$ e $v^2 = (4, 2, 4)$.

Não existe nenhum resultado estável que seja ótimo para as firmas: p_1 prefere o primeiro resultado e p_2 prefere o segundo.

Exemplo 2 (funcionamento do mecanismo de ajuste salarial dinâmico) *Considere o mercado dado por* $P^R = \{p_1, p_2\}$, $P^F = \{p_3, p_4, p_5, p_6\}$ *e* $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_0\}$. *A matriz dos* $a_{ij} + b_i$*'s correspondente às firmas do mercado flexível é a seguinte:*

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_3 & 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ p_4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ p_5 & 4 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ p_6 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

A matriz dos a_{ij}'s para as firmas rígidas é dada por:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ p_2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Se preferirmos podemos trabalhar com as listas de preferências:

$$L(p_1) = q_4, q_1, q_3, q_2, q_0$$

$$L(p_2) = q_4, q_1, q_3, q_2, q_0$$

Os b_i's correspondentes às firmas rígidas são dados pelo vetor: $b = (7, 2)$. Logo, $L(q_j) = p_1, p_2$, para todo $q_j \in Q$.

O vetor de salários inicial é $v(1) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Os valores correspondentes aos trabalhadores demandados estão em negrito:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_0
p_3	4	2	3	**5**	0
p_4	2	1	2	**3**	0
p_5	**4**	3	**4**	3	0
p_6	3	2	2	**4**	0

Como os salários são inferiores aos b_i's, p_1 demanda q_4. Segundo as regras, p_2 não pode demandar q_4. Então ele demanda q_1. O conjunto $\{q_4\}$ é super-demandado minimal (é demandado por p_1, p_3, p_4 e p_6). O salário de q_4 é então aumentado para $b_1 = 7$, por ser demandado por p_1. Assim, $v(2) = (0, 0, 0, 7, 0)$. Recalculamos os valores $a_{ij} + b_i - v_j(2)$ e os novos conjuntos de demanda das firmas flexíveis que estão em negrito na tabela abaixo. Os números $a_{ij} + b_i - v_j(2) < 0$ serão substituídos por z:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_0
p_3	**4**	3	2	z	0
p_4	**2**	1	**2**	z	0
p_5	**4**	3	**4**	z	0
p_6	**3**	2	2	z	0

Daqui para frente nenhuma firma flexível demandará q_4. Logo p_1 sempre demandará q_4 que será excluído da lista de preferências de p_2. A firma p_2 demanda q_1 e $\{q_1\}$ é super-demandado e minimal (p_3, p_6 e p_2 são seus demandadores leais). O salário de q_1 é então aumentado para b_2=2, por causa de p_2. Assim, $v(3) = (2, 0, 0, 7, 0)$. Recalculamos os valores $a_{ij} + b_i - v_j(3)$ e os novos conjuntos de demanda das firmas flexíveis que estão em negrito na tabela abaixo.

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_3 & 2 & \mathbf{3} & 2 & z & 0 \\ p_4 & 0 & 1 & \mathbf{2} & z & 0 \\ p_5 & 2 & 3 & \mathbf{4} & z & 0 \\ p_6 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & z & 0 \end{array}$$

A firma p_1 demanda q_4 e p_2 demanda q_1. O conjunto $\{q_3\}$ é super-demandado minimal. Como nenhuma firma rígida está demandando q_3, o salário de q_3 é aumentado em uma unidade. Então, $v(4) = (2, 0, 1, 7, 0)$. A nova matriz dos valores das firmas flexíveis é dada por

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_3 & 2 & \mathbf{3} & 1 & z & 0 \\ p_4 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & z & 0 \\ p_5 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & z & 0 \\ p_6 & 1 & \mathbf{2} & 1 & z & 0 \end{array}$$

A firma p_1 demanda q_4 e p_2 demanda q_1. O conjunto $\{q_2, q_3\}$ é superdemandado por p_3, p_4, p_5 e p_6, mas não é minimal. O único conjunto super-demandado minimal é $\{q_2\}$. O novo vetor de salários é $v(5) = (2, 1, 1, 7, 0)$ e a matriz de valores das firmas flexíveis correspondentes é dada por:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_3 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & 1 & z & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & \mathbf{1} & z & 0 \\ p_5 & 2 & 2 & \mathbf{3} & z & 0 \\ p_6 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & z & 0 \end{array}$$

A firma p_1 demanda q_4 mas p_2 não pode mais demandar q_1, porque $v_1(5) = b_2$ e $\{q_1, q_2, q_3\}$ é quasi-super demandado minimal para q_1 (na realidade este conjunto é super demandado e não minimal!). Assim, p_2 demanda q_3 que tem salário menor que $b_2 = 2$. O conjunto $\{q_3\}$ é super-demandado minimal. Logo o salário de q_3 é aumentado para $b_2 = 2$ e $v(6) = (2, 1, 2, 7, 0)$. A matriz de valores das firmas flexíveis correspondentes é dada por:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\ p_3 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & 0 & z & 0 \\ p_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & z & \mathbf{0} \\ p_5 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & z & 0 \\ p_6 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & z & 0 \end{array}$$

A firma p_1 demanda q_4. A firma p_2 não pode mais demandar q_3, pois $\{q_1, q_2, q_3\}$ é um conjunto quasi-super-demandado minimal para q_3. A firma p_2 então demanda q_2 que tem preço menor do que b_2. O conjunto $\{q_1, q_2\}$ é super demandado minimal. Logo, o salário de q_2 é aumentado para $b_2 = 2$ e o de q_1 é aumentado para 3. O novo preço é $v(6) = (3, 2, 2, 7, 0)$. A matriz de valores das firmas flexíveis correspondente é dada por:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_0 \\
p_3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & z & 0 \\
p_4 & z & z & \mathbf{0} & z & \mathbf{0} \\
p_5 & 1 & 1 & \mathbf{2} & z & 0 \\
p_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & z & 0
\end{array}$$

A firma p_1 demanda q_4 e p_2 demanda q_2. Não existe conjunto super-demandado, donde, pelo Teorema de Hall, existe uma alocação simples dos trabalhadores, x : q_1 é alocado para p_3 e q_2 é alocado para p_2, q_3 é alocado para p_5, q_4 é alocado para p_1. As firmas p_4 e p_6 são designadas para q_0 que está nos seus conjuntos de demanda. O salário final é $v = (3, 2, 2, 7, 0)$. O vetor que corresponde aos payoffs das firmas é $u = (5, 1, 1, 0, 2, 0)$. O leitor é encorajado a verificar que $(u, v; x)$ é um resultado estável.

Exemplo 3. (efeito sobre o payoff dos agentes causado pela entrada de firmas rígidas no mercado flexível) Ilustraremos o fato de que a entrada de firmas rígidas no mercado flexível tende a beneficiar os trabalhadores e prejudicar as firmas flexíveis. Este resultado é implicado pelo Teorema 1. Considere o exemplo 2. É um instrutivo exercício verificar que o mecanismo de ajuste salarial dinâmico para o mercado $(P^F, Q, (a, b))$ produz o vetor de salários $v = (1, 0, 1, 2, 0)$. Este é o salário mínimo de equilíbrio competitivo, correspondente ao resultado estável ótimo para as firmas flexíveis: $(u_3 = 3, u_4 = 1, u_5 = 3, u_6 = 2, v; x)$, onde $x(p_3) = q_4$, $x(p_4) = q_3$, $x(p_5) = q_1$ e $x(p_6) = q_2$. Podemos ver que a entrada das firmas rígidas provoca um aumento nos salários de todos os trabalhadores, mesmo daqueles que continuam alocados para firmas flexíveis. Embora p_3 e p_5 considerem pagar até 4 pelo trabalhador q_1, este trabalhador é contratado pelo salário 1 quando p_1 e p_2 não estão no mercado. Quando estas firmas entram no mercado, os salários fixados para q_1 por elas são 7 e 2, respectivamente, mas mesmo assim, q_1 não é contratado por nenhuma delas, sendo contratado por p_3 por um salário de 3, maior do que 1.

A explicação de porque os salários de q_1 e q_3 aumentam com a entrada de p_1 e p_2 no mercado, dado que nenhuma dessas firmas contrata estes trabalhadores, não é tão óbvia assim. A explicação é encontrada observando-se a dinâmica do mecanismo de ajuste salarial. Quando a firma p_2 demanda o trabalhador q_1 a um salário maior do que o salário pelo qual q_1 seria contratado no mercado puramente flexível, esse aumento no salário de q_1 provoca uma super demanda de q_2 e q_3, o que determina uma subida nos seus salários, que por sua vez provoca uma quasi-super demanda de q_1, que faz com que p_2 demande o seguinte de sua lista, q_3, cujo salário sobe para um valor que coincide com o máximo que uma firma flexível estaria disposta a pagar levando em conta a concorrência com as outras firmas. Este aumento no salário de q_3 provoca uma super-demanda de q_1 e q_2 por parte das firmas flexíveis, determinando a subida final de seus salários. Portanto, a entrada de p_1 e p_2 no mercado contribui para a elevação dos salários de todos os trabalhadores, embora essas firmas não contratem nem q_1 e nem q_3.

Em contra partida, os payoffs das firmas flexíveis diminuem para $u'_3 = 1$, $u'_4 = 0$, $u'_5 = 2$ $u'_6 = 0$ com a entrada das firmas rígidas.

Exemplo 4. (efeito nos salários dos trabalhadores quando há migração de um dado mercado para outro) Este exemplo visa ilustrar os efeitos nos salários dos trabalhadores quando alguns decidem mudar de mercado. Observaremos primeiro os efeitos nos salários dos que deixam um mercado para entrar no outro. Não existe regra que determine o que é melhor para um dado agente. Cada caso é um caso. Para fixar idéias, consideraremos que todos os trabalhadores do exemplo 2 estão no mercado flexível mas alguns saem para o mercado rígido. Os salários dos trabalhadores no mercado flexível são dados por $v = (1, 0, 1, 2, 0)$. Se quaisquer dois trabalhadores deixarem o mercado flexível para participarem exclusivamente do mercado rígido, ambos serão beneficiados, pois os salários oferecidos pelas firmas rígidas são maiores do que os dados por v. Suponha agora que q_1, q_3 e q_4 migrem para o mercado rígido. É facil ver que q_1 e q_4 serão beneficiados, contratados por 2 e 7, respectivamente, e q_3 ficará desempregado. Nesse caso, é mais vantajoso para q_3 permanecer no mercado flexível do que mudar de mercado.

Numa outra situação, com os dois mercados operando separadamente, os salários dos trabalhadores que operam somente no mercado rígido tendem a diminuir e dos que operam somente no mercado flexível tendem a aumentar quando trabalhadores deixam o mercado flexível para juntar-se ao rígido. Da mesma forma, os salários dos trabalhadores que operam somente no mercado flexível tendem a diminuir e dos que operam somente no mercado rígido tendem a aumentar quando trabalhadores deixam o mercado rígido para juntar-se ao flexível.

Para ilustrar essas situações, considere que no exemplo 2, q_1 e q_2 operem somente no mercado rígido e q_3 e q_4 operem somente no mercado flexível. Então, q_1

é contratado por 7 e q_2 é contratado por 2; q_3 é contratado por 2 e q_4 é contratado por 4. Se q_1 decide negociar no mercado flexível, os salários de q_3 e q_4 passarão a ser 2 e 3 em vez de 2 e 4 e o de q_2 subirá para 7. Se q_3 migra para o mercado rígido é claro que q_1 manterá o salário mas q_2 ficará desempregado.

Exemplo 5. (efeito no salário de um trabalhador da restrição dele participar somente em um dos mercados) Veremos que podem existir situações em que um trabalhador prefira negociar com ambos os tipos de firmas, rígida e flexível, a participar exclusivamente de um dado mercado e vice-versa. Além disso, um trabalhador pode preferir que todos possam negociar no mercado misto a que alguns deles participem somente num dado mercado e vice-versa. Os efeitos sobre o salário dependem de quais trabalhadores são escolhidos para participar do mercado em questão e dos valores dos salários oferecidos pelas firmas rígidas.

Considere o exemplo 2. O salário obtido para o mercado misto é $v = (3, 2, 2, 7, 0)$. Suponha que q_1 e q_2 deixem o mercado misto e participem somente do mercado rígido. Isto é, por alguma razão, eles só aceitarão ofertas das firmas rígidas. Então, q_1 receberá 2 da firma p_2 em vez de 3 de p_3, e q_2 ficará desempregado, pois p_1 continuará contratando q_4. Neste caso ambos, q_1 e q_2, preferirão negociar no mercado misto. O trabalhador que resta, q_3, continuará a receber 2 de p_5. A saída de q_1 e q_2 para o mercado rígido não é vantajosa para ninguém e é melhor para os trabalhadores operar num mercado misto. Aliás, neste mercado, nenhum trabalhador preferirá se restringir ao mercado rígido a negociar no mercado misto.

Podemos também ter uma situação inversa. Suponha que no exemplo 2 fazemos as seguintes alterações: $L(p_1) = q_4,\ q_1,\ q_3,\ q_2,\ q_0$, $L(p_2) = q_1,\ q_2,\ q_4,\ q_3,\ q_0$, $b_1 = 7$ e $b_2 = 3$. No mercado misto o vetor de salários será $v = (3, 2, 2, 7)$, $x(q_1) = p_2, x(q_2) = p_3$, $x(q_3) = p_5$ e $x(q_4) = p_1$. Se q_2 se recusa a aceitar ofertas das firmas flexíveis ele conseguirá ser contratado por p_2 ao salário 3, maior que o anterior.

5. Resultados de Estática Comparativa

Os resultados de estática comparativa enunciados e provados nesta seção fornecem a teoria necessária para tratar com as situações ilustradas nos exemplos acima.

Necessitaremos dos seguintes resultados. Os três primeiros foram provados em outros artigos e não serão demonstrados aqui.

Proposição 1 (Sotomayor, 2003). *Seja $(u, v; x)$ o resultado obtido com o mecanismo de ajuste salarial dinâmico para o mercado (P, Q, a, b). Então, $(u, v; x)$ é estável e $u_i \geq u'_i$ e $v_j \leq v'_j$ para todo $p_i \in P$ e $q_j \in Q$, e para todo resultado estável $(u', v'; x')$ onde $x(p_i) = x'(p_i)$ para todo $p_i \in PR$.*

Proposição 2 (Demange e Gale, 1985). *Sejam $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$ os resultados estáveis ótimos para as firmas pros mercados (P^F, Q, a, b) e (P^F, Q', a', b), respectivamente, onde $Q' \subseteq Q$ e $a_{ij} = a'_{ij}$ para todo $q_j \in Q'$. Então, $u_i \geq u'_i$ e $v_j \leq v'_j$ para todo $(p_i, q_j) \in P^F x Q'$.*

Proposição 3 (Gale e Sotomayor, 1985). *Sejam $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$ os resultados estáveis ótimos para as firmas pros mercados (P^R, Q, a, b) e (P^R, Q', a', b), respectivamente, onde $Q' \subseteq Q$ e $a_{ij} = a'_{ij}$ para todo $q_j \in Q'$. Então, $u_i \geq u'_i$ e $v_j \leq v'_j$ para todo $(p_i, q_j) \in P^R x Q'$.*

Lema 1. *Sejam $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$, respectivamente, resultados estáveis para os mercados $M = (P, Q, a, b)$ e $M' = (P, Q, a', b)$, onde $a_i = a'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $a'_{ij} < 0$ para todo $p_i \in P^R$ e todo $q_j \neq q_0$ (i.e., somente o trabalhador fictício é aceitável para uma firma rígida em M'). Seja $P(x) \equiv \{p_i \in P^F; u_i > u'_i\}$ e seja $Q(x') \equiv \left\{q_j \in Q; v'_j > v_j\right\}$. Então x' e x alocam todo trabalhador de $Q(x')$ em $P(x)$ e designam toda firma de $P(x)$ para $Q(x')$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $x(P(x)) \subseteq Q(x')$, $q_0 \notin Q(x')$ e $x'(Q(x')) \subseteq P(x)$ e usar que $P(x)$ e $Q(x')$ são finitos e x e x' são biunívocas.

Se $p_i \in P(x)$ implica que $p_i \in P^F$ e p_i é designado por x para algum trabalhador não fictício desde que $u_i > u'_i \geq 0$. Então seja $x(p_i) = q_j$. Temos que $v_j < v'_j$, pois se não, $a_{ij} + b_j = u_i + v_j > u'_i + v'_j$ pelo fato de que $p_i \in P^F$, o que contradiz a estabilidade de $(u', v'; x')$. Então, $q_j \in Q(x')$ e todas as firmas de $P(x)$ são designados a $Q(x')$ por x. Assim, $x(P(x)) \subseteq Q(x')$. Agora, suponha que $q_j \in Q(x')$. Então $v'_j > v_j \geq 0$, donde q_j é alocado por x' para algum $p_i \in P^F$ (lembre que todas as firmas rígidas são designadas ao trabalhador fictício por x'). Afirmamos que $u_i > u'_i$. De fato, se $u_i \leq u'_i$ teríamos que $a_{ij} + b_j = u'_i + v'_j > u_i + v_j$, o que contradiz a estabilidade de (u, v). Desta forma, $x'(Q(x')) \subseteq P(x)$ e a demonstração está completa. ■

Lema 2. *Com as mesmas hipóteses e notações do Lema 1 temos que* $(u \vee u', v \wedge v'$ *é estável para* M', *onde* $(u \vee u')_i = max\{u_i, u'_i\}$ *se* $p_i \in P^F$, $(u \vee u'_i = u'_i$ *se* $p_i \in P^R$ *e* $(v \wedge v')_j = min\left\{v_j, v'_j\right\}$ *para todo* $q_j \in Q$.

Demonstração. Defina a alocação y dos trabalhadores tal que os agentes de $P(x)$ e $Q(x')$ são designados de acordo com x e os demais de acordo com x'. Pelo Lema 1, y é uma alocação dos trabalhadores factível. Para todo $(p_i, q_j) \in P$xQ, denote $u_i^+ \equiv (u \vee u')_i$ e $v^- j \equiv (v \wedge v')_j$. Então, $u_i^+ = u_i$ se $p_i \in P(x)$ e $u_i^+ = u'_i$, caso contrário; $v_j^- = v_j$ se $q_j \in Q(x')$ e $v_j^- = v'_j$ caso contrário.

Devemos mostrar que $(u^+, v^-; y)$ é estável para M'. A factibilidade segue do fato de que $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$ são estáveis e portanto factíveis. Que (p_i, q_j) não forma um par bloqueante é também imediato se $p_i \in P^F$ e $u_i^+ = u_i$ e $v_j^- = v_j$ ou $u_i^+ = u'_i$ e $v_j^- = v'_j$ ou se $p_i \in P^R$. Neste último caso, $a'_{ij} \leq 0$ para todo $q_j \in Q$, donde p_i é designado ao trabalhador fictício por x', e portanto por y, e nenhum outro trabalhador é aceitável para ela, logo (p_i, q_j) não pode ser um par bloqueante. Nos outros casos, se $p_i \in P^F$ e $u_i^+ = u_i$ e $v_j^- = v'_j$ então $u_i^+ + v_j^- = u_i + v'_j \geq u'_i + v'_j \geq a_{ij} + b_i$ pela estabilidade de $(u', v'; x')$; se $p_i \in P^F$ e $u_i^+ = u'_i$ e $v_j^- = v_j$ então $u_i^+ + v_j^- = u'_i + v_j \geq u_i + v_j \geq a_{ij} + b_j$ pela estabilidade de $(u, v; x)$. Logo $(u^+, v^-; y)$ é estável para M'. ■

Lema 3. *Com as mesmas hipóteses e notações do Lema 1 temos que* $(u \wedge u', v \vee v')$ *é estável para* M, *onde* $(u \wedge u')_i = min\{u_i, u'_i\}$ *se* $p_i \in P^F$, $(u \wedge u')_i = u_i$ *se* $p_i \in P^R$ *e* $(v \vee v')_j = max\left\{v_j, v'_j\right\}$ *para todo* $q_j \in Q$.

Demonstração. Defina a alocação y dos trabalhadores tal que os agentes de $P(x)$ e $Q(x')$ são designados de acordo com x' e os demais de acordo com x. Pelo Lema 1, y é uma alocação dos trabalhadores factível. Para todo $(p_i, q_j) \in PxQ$, denote $u_i^- \equiv (u \wedge u')_i$ e $v^+ j \equiv (v \vee v')_j$. Então, $u_i^- = u'_i$ se $p_i \in P(x)$ e $u_i^- = u_i$, caso contrário; $v_j^+ = v'_j$ se $q_j \in Q(x')$ e $v_j^+ = v_j$ caso contrário.

Devemos mostrar que $(u^-, v^+; y)$ é estável para M. A factibilidade segue do fato de que $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$ são estáveis e portanto factíveis. Que (p_i, q_j) não forma um par bloqueante é também imediato se $p_i \in P^F$ e $u_i^- = u_i$ e $v_j^+ = v_j$ ou $u_i^- = u'_i$ e $v_j^+ = v'_j$ ou se $p_i \in P^R$. Neste último caso, $v_j^+ = v'_j$, pois caso contrário (p_i, q_j) bloquearia (u, v). Mas se p_i prefere q_j ao seu parceiro $y(p_i) = x(p_i)$, então devemos ter $v_j \geq b_i$, pela estabilidade de (u, v). Como $v_j^+ = v'_j$ segue que $v'_j \geq v_j \geq b_i$, donde q_j não prefere p_i ao seu parceiro $y(q_j)$ e portanto não pode formar um par bloqueante com p_i. Nos outros casos, se $p_i \in P^F$ e $u_i^- = u_i$ e

$v_j^+ = v'_j$ então $u_i^- + v_j^+ = u_i + v'_j \geq u_i + v_j \geq a_{ij} + b_i$ pela estabilidade de $(u, v; x)$; se $p_i \in P^F$ e $u_i^- = u'_i$ e $v_j^+ = v_j$ então $u_i^- + v_j^+ = u'_i + v_j \geq u'_i + v'_j \geq a_{ij} + b_j$ pela estabilidade de $(u', v'; x')$. Logo $(u^-, v^+; y)$ é estável para M. ■

O Exemplo 1 ilustrou que podem existir mercados mistos nos quais não existe o resultado estável ótimo para as firmas. Podemos no entanto provar a existência de alocações estáveis muito especiais. Tais alocações são também de interesse econômico, pois quando o conjunto das firmas rígidas (respectivamente, flexíveis) é vazio elas coincidem com as alocações ótimas para cada lado correspondente do mercado para o Mercado do Casamento (respectivamente, Assignment Game). A obtenção dessas duas alocações pode ser feita utilizando-se o mecanismo de ajuste salarial dinâmico, que produz uma das alocações num número finito de etapas.

Seja z um matching compativel com algum resultado estável para o mercado misto M. Denotaremos por $C(z)$ o conjunto dos resultados estáveis para $M, (u, v; y)$, com $y(p_i) = z(p_i)$ para todo $p_i \in P^R$. Isto é, $C(z)$ é o conjunto dos resultados estáveis de M que mantém invariantes as alocações das firmas rígidas em z. É deixado para o leitor provar que $C(z)$ é um reticulado completo. Portanto existem o resultado estável ótimo para as firmas e o resultado estável ótimo para os trabalhadores em $C(z)$.

No que segue diremos que um mecanismo H é estável se ele associa cada mercado M a um resultado estável $H(M)$ para o dado mercado. Um mecanismo estável H será dito *ótimo para as firmas* se quando $H(M) = (u, v; x)$, então (i) se M é um mercado misto, $H(M)$ é o resultado estável ótimo para as firmas em $C(x)$; (ii) se M é flexível ou rígido, $H(M)$ é o resultado estável de M ótimo para as firmas. Analogamente definimos um mecanismo estável *ótimo para os trabalhadores.*

Dadas as considerações acima, um exemplo de um mecanismo estável *ótimo para as firmas* é o mecanismo de ajuste salarial dinâmico, que nos fornece um modo de determinar uma alocação estável $(u, v; x)$ que coincide com o resultado estável ótimo para as firmas em $C(x)$ (Sotomayor, 2003). Ele pode ser usado como a primeira etapa de um mecanismo (dinâmico) estável *ótimo para os trabalhadores.* Obtido $(u, v; x)$, a restrição de $C(x)$ ao Assignment game reduzido, resultante da remoção das firmas rígidas com seus respectivos parceiros, é um sub-reticulado do conjunto dos resultados estáveis para o Assignment game reduzido. A alocação ótima para os trabalhadores pode então ser obtida via algum procedimento que determine o correspondente ponto extremo do sub-reticulado (ver capítulo 8 em Roth e Sotomayor (1990)). Como mencionado na Introdução este procedimento pode não mais ser ótimo para os trabalhadores no caso em que as firmas possam discriminar os trabalhadores, oferecendo salários distintos para diferentes trabalhadores. A razão é que quando M é o mercado rígido, $H(M)$ será a alocação obtida com o mecanismo de ajuste salarial dinâmico, logo será a ótima para as firmas, a qual pode não ser a ótima para os trabalhadores, visto que o reticulado desse mercado não necessita mais ser unitário.

Proposição 4. *Considere os mercados mistos $M = (P, Q, a, b)$ e $M' = (P, Q, a', b)$, onde $a_i = a'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $a'_{ij} < 0$ para todo $p_i \in P^R$ e todo $q_j \neq q_0$ (i.e. M' é equivalente ao mercado flexível obtido com a remoção de todas as firmas rígidas). Quer sejam $(u, v; x)$ e $(u', v'; x')$ os resultados para M e M', respectivamente, obtidos por um mecanismo estável ótimo para as firmas ou ótimo para os trabalhadores, $u_i \leq u'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v_j \geq v'_j$ para todo $q_j \in Q$.*

Demonstração. Suponha primeiro que o mecanismo estável usado é o ótimo para as firmas. Pelo Lema 2, $(u' \vee u, v' \wedge v)$ é estável para M', donde usando a maximalidade de u' e a minimalidade de v' segue que $u'_i \geq (u \vee u')_i \geq u_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v'_j \leq (v' \wedge v)_j \leq v_j$ para todo $q_j \in Q$.

Suponha agora que o mecanismo estável usado é o ótimo para os trabalhadores. Pelo Lema 3, $(u' \wedge u, v' \vee v; y)$ é estável para M, e $y(p_i) = x(p_i)$ para todo $p_i \in P^R$. Logo, usando a maximalidade de v e a minimalidade de u em $C(x)$, segue que $u_i \leq (u \wedge u')_i \leq u'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v_j \geq (v' \vee v)_j \geq v'_j$ para todo $q_j \in Q$ e a demonstração está completa. ■

Quer seja usado um mecanismo estável ótimo para as firmas ou um mecanismo estável ótimo para os trabalhadores, a entrada das firmas rígidas no mercado flexível não beneficia as firmas e não prejudica os trabalhadores. De fato,

Teorema 1. *Quer sejam (u,v) e (u*,v*) os payoffs para $M = (P, Q, a, b)$ e $M^F = (P^F, Q, a, b)$, respectivamente, obtidos por um mecanismo estável ótimo para as firmas ou ótimo para os trabalhadores, temos que $u_i \leq u{*}_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v_j \geq v{*}_j$ para todo $q_j \in Q$.*

Demonstração. Seja H um tal mecanismo. Considere o mercado $M' = (P, Q, a', b)$, onde $a_i = a'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $a'_{ij} < 0$ para todo $p_i \in P^R$ e todo $q_j \neq q_0$. Seja (u', v') o payoff obtido pelo mecanismo para o mercado M'. É claro que $u{*}_i = u'_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v_{*j} = v'_j$ para todo $q_j \in Q$. Da Proposição 4 segue que $u_i \leq u'_i = u{*}_i$ para todo $p_i \in P^F$ e $v_j \geq v'_j = v_{*j}$ para todo $q_j \in Q$. ■

Invertendo-se os papéis entre as firmas flexíveis e as firmas rígidas nos Lemas 1, 2, 3 e Proposição 4, pode-se provar o seguinte resultado, usando-se a mesma linha de argumentos usada na demonstração do Teorema 1:

Teorema 2. *Quer sejam (u, v) e (u^*, v^*) os payoffs para $M = (P, Q, a, b)$ e $M^R = (P^R, Q, a, b)$, respectivamente, obtidos por um mecanismo estável ótimo para as firmas ou ótimo para os trabalhadores, $u_i \leq u_i^*$ para todo $p_i \in P^R$ e $v_j \geq v_j^*$ para todo $q_j \in Q$.*

Dessa forma, a entrada das firmas flexíveis no mercado rígido também não beneficia as firmas e não prejudica os trabalhadores em quaisquer dos dois mecanismos. O Teorema 3 implica que se o conjunto das firmas rígidas é vazio, a entrada de novos trabalhadores no mercado flexível não prejudica as firmas e não beneficia os trabalhadores.

Teorema 3. *Seja $Q' \subseteq Q$. Sejam $(u', v'; x')$ e $(u, v; x)$ os resultados produzidos por um mecanismo estável ótimo para as firmas (ou ótimo para os trabalhadores) para os mercados (P^F, Q', a', b) e (P^F, Q, a, b), respectivamente, onde $a'_{ij} = a_{ij}$ para todo $(p_i, q_j) \in P^F$ x Q'. Então $v'_j \geq v_j$ para todo $q_j \in Q'$ e $u'_i \leq u_i$ para todo $p_i \in P^F$.*

Demonstração. *Imediata da Proposição 2.* ■

O Teorema 4 afirma que se o conjunto das firmas flexíveis é vazio, a entrada de novos trabalhadores no mercado não prejudica as firmas e não beneficia os trabalhadores.

Teorema 4. *Seja $Q' \subseteq Q$. Sejam $(u', v'; x')$ e $(u, v; x)$ os resultados produzidos por um mecanismo estável ótimo para as firmas (ou ótimo para os trabalhadores) para os mercados (P^R, Q', a', b) e (P^R, Q, a, b), respectivamente, onde $a'_{ij} = a_{ij}$ para todo $(p_i, q_j) \in P^R$ x Q'. Então $v'_j \geq v_j$ para todo $q_j \in Q'$ e $u'_i \leq u_i$ para todo $p_i \in P^R$.*

Demonstração. *O resultado segue da Proposição 3.* ■

Observação: Pode ser deduzido das demonstrações dos resultados apresentados nesta seção, que as conclusões dos mesmos ainda se verifica no caso em que as firmas possam discriminar os trabalhadores, oferecendo salários distintos para diferentes trabalhadores.

6. Trabalhos Relacionados e Problemas em Aberto

Um equilíbrio competitivo tradicional não pode existir, em geral, a menos que os bens negociados em cada mercado sejam homogêneos, porque todos os bens no mesmo mercado devem ser vendidos ao mesmo preço.[4] Mercados de trabalho tradicionais, com firmas e trabalhadores heterogêneos, têm a estrutura de um modelo de equilíbrio geral de multi-mercado com muitos mercados em que um dos lados tem apenas um agente. A Teoria dos mercados de matching substitui esta coleção de mercados magros por um único jogo de mercado, em que os termos das parcerias são determinados endogeneamente, junto com o matching, pelos correspondentes parceiros. A noção chave para estes mercados é a de estabilidade, que convenientemente generalizada formaliza a idéia de competição.[5] Esta nova abordagem nos permitiu solucionar o problema de como a transformação de um mercado flexível em misto, ou de um mercado rígido em misto, poderia afetar os payoffs dos agentes quando um mecanismo estável ótimo para algum dos lados é usado. Os resultados de estática comparativa derivados confirmaram a nossa intuição de que a entrada de novos agentes de um lado, enfraquece as posições competitivas dos outros agentes desse lado e fortalece as posições competitivas dos agentes do lado oposto.

Outros autores têm provado resultados de estática comparativa sobre os efeitos de adicionar agentes a mercados de matching mais simples, onde todos os agentes ou são rígidos com preferências estritas ou são flexíveis. Nesses mercados existe sempre uma alocação estável ótima para cada um dos lados, o que permite comparar os payoffs nestas alocações antes e depois da entrada de novos agentes. Kelso e Crawford (1982), por exemplo, demonstraram que, no contexto de firmas (flexíveis) e trabalhadores, com as firmas podendo contratar mais de um trabalhador, adicionando-se uma ou mais firmas ao mercado melhora fracamente para os trabalhadores a alocação estável ótima para as firmas, e adicionando-se um ou

[4]Ver Crawford (1991).

[5]Gale e Shapley provam o teorema de existência para o Mercado do Casamento através de um algorítmo, Sotomayor (1996) oferece uma demonstração não construtiva com argumentos combinatórios enquanto Shapley e Shubik usam o Teorema de Dualidade de programação linear para provar o mesmo resultado para o Assignment Game.

mais trabalhadores melhora fracamente para todas as firmas a alocação estável ótima para as firmas. Esses resultados, restritos às alocações estáveis-por-pares, foram generalizados em Crawford (1991) para o mercado de matching de múltiplos parceiros para ambos os lados e com a utilização adicional do resultado estável-por-pares ótimo para os trabalhadores. Resultados de estática comparativa foram originalmente obtidos por Gale e Sotomayor (1985) para o mercado do casamento e por Demange e Gale (1985) para o mercado flexível onde as utilidades não são necessariamente lineares como no Assignment Game.

Shapley (1962) mostrou que num problema linear de matching ótimo, o produto marginal de um agente de um lado do mercado (definido como o valor maximizado do matching ótimo com o agente, menos o valor maximizado sem ele) fracamente decresce quando um outro agente do mesmo lado é adicionado e cresce fracamente quando um agente do outro lado é adicionado. Demange (1982) e Leonard (1983) (ver Roth e Sotomayor (1990), Lema 8.15) então mostraram que, para o Assignment Game, o payoff de um agente no resultado estável ótimo para o lado deste agente é o seu produto marginal como definido por Shapley. A combinação desses resultados produz os resultados de estática comparativa do tipo estabelecido aqui para o Assignment Game.

Ainda para o Assignment Game, Mo (1988) mostrou que se o trabalhador entrante é alocado a alguma firma em algum resultado estável para o novo mercado, então existe um conjunto de agentes tal que toda firma está melhor e todo trabalhador está pior no novo mercado do que no antigo. Resultado simétrico vale quando o agente entrante é uma firma. Um resultado análogo é provado por Roth e Sotomayor (1990) para o Mercado do Casamento.

O nosso intuito neste trabalho é apenas contribuir para a compreensão do funcionamento de alguns mercados de trabalho que poderiam ser organizados da forma que apresentamos, sem buscar por resultados teóricos mais gerais. Entretanto algumas direções de interesse econômico podem ser apontadas tomando-se por base o modelo explorado aqui. Uma delas, por exemplo, seria comparar os efeitos da entrada no mercado misto de agentes de ambos os tipos: firmas flexíveis e rígidas, quando o mecanismo centralizado de que trata o presente trabalho é usado. É provável que as conclusões dos Teoremas 1 e 2 se verifiquem. Porém, a linha de argumentos usada para provar estes resultados não mais se aplica, o que torna a demonstração correspondentemente mais difícil. Uma outra direção seria estudar a possibilidade de se obter uma generalização dos nossos resultados de forma a permitir a comparação entre quaisquer alocações estáveis.

Para terminar, gostaríamos de lembrar que a adoção de um mecanismo de matching estável sempre induz um jogo não cooperativo no qual as questões de manipulação emergem. Vimos no exemplo 4 que um trabalhador recusando todas as ofertas do mercado flexível consegue melhorar o seu payoff. Esse fato não intuitivo sugere uma forma de manipulação do mecanismo e um assunto de interesse para futuras investigações.

Referências

Bohm-Bawerk, E. V. (1923). *Positive Theory of Capital*. G. E. Steckert, New York. Publicação original em 1891.

Cournot, A. A. (1897). *Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Macmillan dn Co., New York. publicação original em 1838.

Crawford, V. P. (1991). Comparative statics in matching markets. *Journal of Economic Theory*, 54:389–400.

Demange, G. (1982). Strategyproofness in the assignment market game. Laboratoire d'Econometrie de l'École Polytechnique, Paris. Mimeo.

Demange, G. & Gale, D. (1985). The strategy structure of two-sided matching markets. *Econometrica*, 53:873–88.

Demange, G., Gale, D., & Sotomayor, M. (1986). Multi-item auctions. *Journal of Political Economy*, 94:863–72.

Eriksson, K. & Karlander, J. (1997). Stable matching in a common generalization of the marriage and assignment models. Mimeo.

Gale, D. & Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9–15.

Gale, D. & Sotomayor, M. (1985). Ms. Machiavelli and the stable matching problem. *American Mathematical Monthly*, 92:261–8.

Hall, P. (1935). On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 10:26–30.

Kelso, A. S. & Crawford, V. P. (1982). Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50:1483–1504.

Leonard, H. (1983). Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions. *Journal of Political Econmy*, 91:461–79.

Mo, J. P. (1988). Entry and structures of interest groups in assignment games. *Journal of Economic Theory*, 46:66–96.

Roth, A. & Sotomayor, M. (1990). Two sided matching. a study in game-theoretic modeling and analysis. In *Econometric Society Monographs*. Cambridge University Press. 2^{nd} ed., Vol. 18.

Shapley, L. S. (1962). Complements and substitutes in the optimal assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9:45–8.

Shapley, L. S. & Shubik, M. (1972). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130.

Sotomayor, M. (1996). A non-constructive and elementary proof of the existence of stable marriages. *Games and Economic Behavior*, 13:135–137.

Sotomayor, M. (2000). Existence of stable outcomes and the lattice property for a unified matching market. *Mathematical Social Sciences*, 39:199–132.

Sotomayor, M. (2003). Um mecanismo de alocação para um mercado de compra e venda centralizado. Mimeo.

Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16:8–37.