



# Simulação numérica de movimento de água em solo não-saturado



Paulo C. Oliveira<sup>1</sup> & José L. Lima<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Prof. Adjunto, Depto Eng. Rural, CCAUFES/UFES. E-mail: [pacol@npd.ufes.br](mailto:pacol@npd.ufes.br) (Foto)

<sup>2</sup> Bolsista de PIBIC (CNPq-UFES), Graduando em Agronomia. E-mail: [lima-l@bol.com.br](mailto:lima-l@bol.com.br)

Protocolo 117 - 21/8/2002 - Aprovado em 29/4/2003

**Resumo:** Neste trabalho, o método de volumes finitos foi utilizado com esquema de discretização mais elaborado, chamado *Flux-Spline*, a fim de simular numericamente problemas unidimensionais não lineares de infiltração de água em solo hidraulicamente homogêneo não-saturado. Problemas-teste foram apresentados e resolvidos para alguns valores e combinações dos dois parâmetros adimensionais de governo, para demonstrar as vantagens do novo esquema quando comparado ao tradicional esquema de diferença central. Os resultados obtidos mostraram melhor desempenho do esquema quando comparado à diferença central, em todos os casos simulados, demonstrando que o esquema pode ser recomendado para a simulação numérica de movimentação de água em solo hidraulicamente homogêneo não-saturado.

**Palavras-chave:** difusão, volumes finitos, movimento de água no solo

## Numerical simulation of water movement in an unsaturated soil

**Abstract:** In this work the finite volume method was used with an improved scheme of discretization called *Flux-Spline*, for the numerical study of non-linear problems in uni-dimensional water flow in hydraulically homogeneous unsaturated soil. Test-problems were presented and resolved to some values and combinations of the two governing non-dimensional parameters to demonstrate the advantages of the new scheme when compared to the traditional central difference scheme. The results obtained showed a better performance of the new scheme when compared to the central difference scheme in all simulated cases, demonstrating that the scheme can be recommended for numerical simulation of water movement in hydraulically homogeneous unsaturated soil.

**Key words:** diffusion, finite volumes, water movement in soil

## INTRODUÇÃO

Processos físicos, governados por difusão pura aparecem em fenômenos de interesse prático como: escoamentos em meios porosos, em solos agrícolas, no processamento de alimentos, na condução de calor em sólidos, em processos metalúrgicos contendo mudanças de fase, nos escoamentos potenciais ou completamente desenvolvidos em dutos.

Embora em alguns casos particulares se conheça a solução analítica para as equações que governam tais fenômenos, a presença de geometrias não-regulares e/ou não-linearidades devido à forte variação das propriedades do meio (caso de solos agrícolas) e/ou condições de contorno particulares, impossibilita a solução desses problemas, com os métodos analíticos atualmente conhecidos, tornando obrigatória a utilização de métodos numéricos.

O esquema de discretização *Flux-Spline* foi desenvolvido por Varejão (1979). Nieckele (1985) comparou este esquema a outros dezesseis utilizados na literatura da área térmica e

de fluidos em problemas envolvendo convecção-difusão. Em trabalhos posteriores, Varejão et al. (1991a), Varejão et al. (1991b), Oliveira (1997) e Oliveira (1999) mostraram que o esquema apresenta desempenho superior para problemas de escoamento bidimensional em regime permanente.

Devido ao bom desempenho do esquema em problemas de grande complexidade, como os acima citados, tal esquema será aqui empregado com o objetivo de simular o comportamento da equação diferencial parcial não-linear que governa o movimento de água em solo hidraulicamente homogêneo não-saturado.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Discretização de difusão unidimensional em regime permanente por volumes finitos

A equação de governo para o caso geral de um fenômeno difusivo unidimensional, em regime permanente, é:

$$\frac{dJ}{dx} = S^\phi \tag{1}$$

em que  $S^\phi$  é o termo fonte distribuído ao longo do domínio da variável dependente  $\phi$  linearizado na forma  $S^\phi = S_{c_i} + S_{p_i}\phi_i$ , de acordo com Patankar (1980);  $J$  é o fluxo difusivo na direção  $x$  dado por:

$$J = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2}$$

Integrando a equação de governo (1), sob a hipótese de que o termo fonte  $S^\phi$  e o coeficiente de difusão  $k$  são constantes em cada volume de controle de comprimento  $\Delta x_i$  e que os fluxos são distribuídos uniformemente nas interfaces dos volumes de controle, obtendo-se, pelo método dos volumes finitos, a expressão:

$$J_{i+1} - J_i = (S_{c_i} + S_{p_i}\phi_i)\Delta x_i \tag{3}$$

A variável dependente  $\phi_i$ , a ser calculada quando da simulação, é posicionada no centro do volume de controle correspondente em  $x_i = \Delta x_i/2$ . Maiores detalhes do esquema *Flux-Spline* podem ser obtidos em Oliveira (1999). A equação para os fluxos na direção da coordenada  $x$  é:

$$J_i = J_{hat}_i + DJ_i(\phi_{i-1} - \phi_i) \tag{4}$$

em que:

$$DJ_i = \frac{2,0}{\left(\frac{\Delta x_{i-1}}{\kappa_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{\kappa_i}\right)} \tag{5}$$

$$J_{hat}_i = BJ_i(J_i - J_{i+1}) + CJ_i(J_i - J_{i-1}) \tag{6}$$

$$BJ_i = \frac{1}{8}DJ_i \frac{\Delta x_i}{\kappa_i} \tag{7}$$

$$CJ_i = \frac{1}{8}DJ_i \frac{\Delta x_{i-1}}{\kappa_{i-1}} \tag{8}$$

A expressão (4) quando substituída na equação de governo integrada (3) fornece a equação de discretização da variável dependente, representada por:

$$AP_i \phi_i = AIM_i \phi_{i-1} + AIP_{i+1} \phi_{i+1} + S_{c_i} \Delta x_i + S_{sp_i} \tag{9}$$

em que:

$$AIP_i = DJ_{i+1} \tag{10}$$

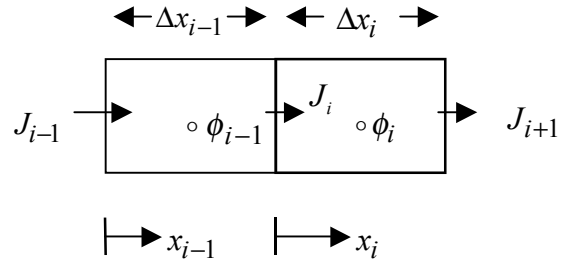


Figura 1. Discretização unidimensional para volumes finitos

$$AIM_i = DJ_i \tag{11}$$

$$AP_i = AIM_i + AIP_i - S_{p_i} \Delta x_i \tag{12}$$

$$S_{sp_i} = J_{hat}_i - J_{hat}_{i+1} \tag{13}$$

O método de resolução do sistema de equações algébricas, para o fluxo  $J$  e a variável dependente  $\phi$ , é descrito em detalhes por Oliveira (1999).

**Discretização de problema difusivo transiente utilizando-se o método de volumes de controle, com esquema Flux-Spline**

A discretização proposta por Patankar (1980), para casos transientes, é totalmente implícita no tempo, o que faz com que se obtenha, aproveitando-se a dedução anterior para o caso de regime permanente, as seguintes expressões:

$$AP_i \phi_i = AIM_i \phi_{i-1} + AIP_{i+1} \phi_{i+1} + S_{c_i} \Delta x_i + S_{sp_i} + \phi_i^{old} \frac{\Delta x_i}{\Delta \tau} \tag{14}$$

$$AP_i = AIM_i + AIP_i - S_{p_i} \Delta x_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta \tau} \tag{15}$$

em que  $\phi_i$  é o valor da variável dependente no tempo atual,  $\phi_i^{old}$  é o valor da variável dependente no tempo anterior e  $\Delta \tau$  é o intervalo de tempo adimensional.

**Equação de conservação de massa para a umidade no solo em regime transiente**

A movimentação de água em solos não-saturados hidráulica-mente homogêneos é regida pela equação de Richards:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \tag{16}$$

O modelo aqui usado é válido somente para solo hidráulica-mente homogêneo onde, de acordo com Prevedello (1996), o potencial mátrico  $h(U)[m]$ , a condutividade hidráulica  $k(U) [m s^{-1}]$  e a umidade dimensional do solo  $U(x, t)[m^3_{H_2O} m^{-3}_{solo}]$  são funções contínuas e deriváveis

O fluxo total de água no solo é  $\vec{q} = -k\nabla H_T [m s^{-1}]$ . O potencial total atuando sobre a água no solo é a soma do potencial mátrico  $h$  mais o potencial gravitacional  $z$  e, portanto,  $H_T = h + z [m]$ . Na direção  $z$ , o sentido positivo foi arbitrado seguindo-se

a gravidade e, desta forma, o fluxo total na direção z, descrito pela equação de Buckingham-Darcy, é:

$$q_z = -D \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa \quad (17)$$

em que, neste caso,  $D = k(dh/dU)$  [ $m^2 s^{-1}$ ] é a difusividade hidráulica com  $dh/dU$  obtido da curva de retenção do solo. Para o caso unidimensional na direção z, obtém-se então a seguinte equação de governo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -D \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa \right] = 0 \quad [m^3_{H_2O} m^{-3}_{solo} s^{-1}] \quad (18)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -D \frac{\partial U}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \kappa}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial z} \quad [m^3_{H_2O} m^{-3}_{solo} s^{-1}] \quad (19)$$

Se o fluxo difusivo dimensional de umidade na direção z devido ao gradiente de umidade, é  $jz^U = -D(\partial U/\partial z)$ , obter-se-á:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} jz^U = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial U} \left( \frac{\partial h}{\partial U} \right)^{-1} jz^U \quad [m^3_{H_2O} m^{-3}_{solo} s^{-1}] \quad (20)$$

**Procedimento de adimensionalização**

Este procedimento será executado de forma a se obter os parâmetros adimensionais que regem o fenômeno de movimento de água em solo hidraulicamente homogêneo, não-saturado. Para a adimensionalização do tempo usar-se-á:  $t = tD_{sat} L_C^{-2}$  em que  $D_{sat}$  é a difusividade hidráulica na umidade de saturação  $U_{sat}$  admitindo que a curva de retenção e a curva da condutividade hidráulica deste solo, são contínuas e deriváveis em todos os pontos (Prevedello, 1996) e a curva de retenção é aproximadamente linear na iminência de saturação. Para o espaço, tem-se:  $Z = Z/L_C$ . A condutividade hidráulica adimensional é  $K = k/k_{sat}$  em que  $k_{sat}$  é a condutividade hidráulica na umidade de saturação  $U_{sat}$ . A umidade é adimensionalizada usando-se:  $\theta = (U - U_0)/(U_{sat} - U_0)$  em que  $U_0$  é a umidade residual do modelo de van Genuchten (1980). A substituição das expressões em (20) fornece:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial Z} \left[ -\frac{D}{D_{sat}} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \left( \frac{\partial H_{mat}}{\partial \theta} \right)^{-1} JZ^\theta \quad (21)$$

em que  $H_{mat} = h/L_C$  é o potencial mátrico adimensionalizado. Definindo-se  $D/D_{sat}$  como o coeficiente de difusão  $\Gamma^\theta$ , obter-se-á:

$$\Gamma^\theta = K \frac{\partial H_{mat}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial H_{mat}}{\partial \theta} \Big|_{sat} \right)^{-1} \quad (22)$$

Com isto, a equação de governo pode ser colocada na forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial Z} JZ^\theta = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \left( \frac{\partial H_{mat}}{\partial \theta} \right)^{-1} JZ^\theta \quad (23)$$

Definir-se-á  $[(1/K)][(\partial K/\partial \theta)][(\partial H_{mat}/\partial \theta)]^{-1}$  como o parâmetro adimensional de solo PAS, notando-se que seu valor define a importância do termo fonte (devido ao potencial gravitacional) com relação ao fluxo difusivo, atuando num determinado volume de controle.

O coeficiente de difusão  $\Gamma^\theta$  e o parâmetro PAS podem ser calculados, num caso geral, pelas equações combinadas de van Genuchten (1980). Sob adimensionalização, estas equações ficam na forma:

$$K = \theta^2 \left[ 1 - \left[ 1 - \theta^M \right]^M \right]^2$$

e

$$H_{mat} = \frac{1}{\alpha L_C} \left[ \left( \frac{1}{\theta} \right)^M - 1 \right]^{\frac{1}{N}}$$

em que  $U_0$ ,  $U_{sat}$ ,  $M$ ,  $N$  e  $\alpha$  são os parâmetros independentes para cada tipo de solo. Valores desses parâmetros podem ser encontrados em Centurion & Andrioli (2000) para solos de Jaboticabal, SP. Usando-se os dados de Prevedello & Balena (2000) para areia marinha e Latossolo Vermelho é mostrado, na Figura 2, o comportamento conjunto da tangente à curva de retenção, da condutividade e da difusividade hidráulica  $\Gamma^\theta$ , em função da umidade adimensional  $\theta$ .

Como o comportamento do produto  $K[(\partial H_{mat})/\partial \theta] \{[(\partial H_{mat})/\partial \theta]_{sat}\}^{-1}$  é marcadamente exponencial assumir-se-á, para a difusividade hidráulica, um modelo similar ao usado em Bacchi et al. (1991) para condutividade hidráulica.

Neste modelo,  $k = k_{sat} e^{\gamma(U - U_{sat})}$  resulta numa condutividade hidráulica adimensional  $K = e^{(\gamma \Delta U)/(\theta - 1)}$  e, sob esta hipótese,  $\Gamma^\theta \cong e^{(\gamma_c \Delta U)/(\theta - 1)}$  em que o novo  $\gamma_c$  reúne a influência conjunta da condutividade hidráulica e da tangente à curva de retenção do solo. Desta forma obtém-se, para solo hidraulicamente homogêneo, a equação de governo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial Z} JZ^\theta = PAS JZ^\theta \quad (24)$$

em que o fluxo difusivo de umidade é expresso por:

$$JZ^\theta = -e^{-(\gamma_c \Delta U)/(\theta - 1)} [\partial \theta / \partial Z] \quad (25)$$

**Influência do parâmetro  $\gamma_c \Delta U$  sobre a equação de governo**

Sob as hipóteses simplificadoras anteriormente descritas e impostas, o parâmetro  $\gamma_c \Delta U$  define o comportamento da difusividade hidráulica adimensional  $\Gamma^\theta$ .

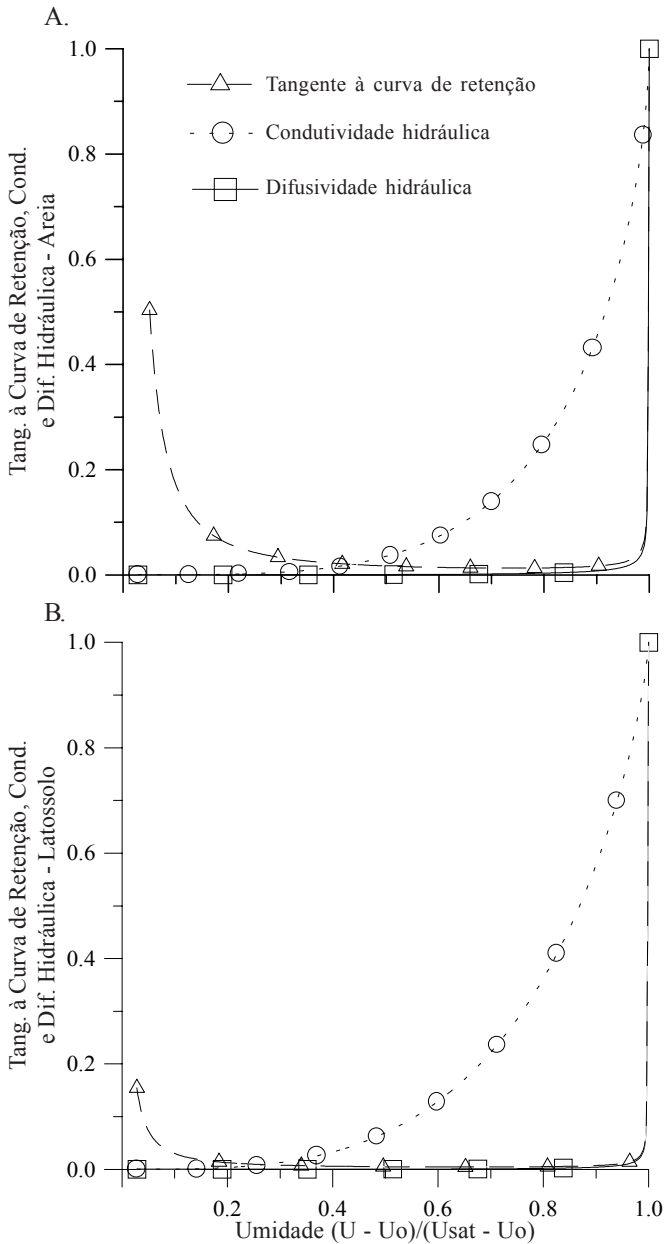


Figura 2. Curvas de condutividade hidráulica, tangente à curva de retenção e difusividade hidráulica para areia marinha (A) e latossolo (B)

Pode-se observar, na Figura 3, que para altos valores de  $\gamma_c \Delta U$ , um elemento de solo se comporta de forma a absorver toda a umidade que nele chega, “isolando” o elemento seguinte, até que se atinjam altos valores de umidade, pois o valor da difusividade somente se afasta de zero perto da saturação.

Este procedimento visa facilitar a simulação numérica da influência das várias combinações possíveis entre os dois parâmetros  $\Gamma^\theta$  e PAS, presentes na equação diferencial de governo, sem a necessidade de dados específicos oriundos de diferentes tipos de solo.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### Aplicação do esquema de discretização a problemas teste

Os problemas-teste, a seguir, foram construídos de forma a se mostrar o comportamento da equação diferencial de governo

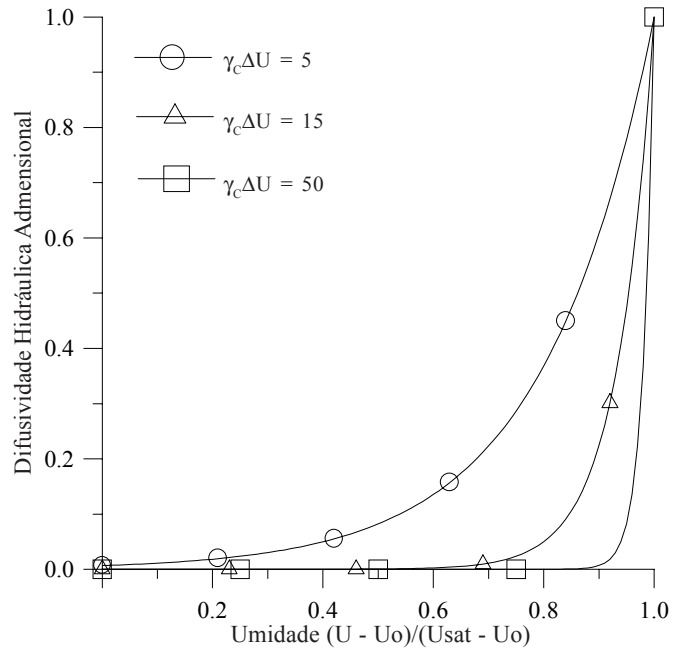


Figura 3. Difusividade hidráulica adimensional  $\Gamma^\theta$  em função da umidade

com relação a diferentes combinações dos parâmetros  $\gamma_c \Delta U$  e PAS. Concomitantemente, será avaliado o desempenho de cada esquema de discretização, em função dessas combinações.

### Problema-teste 1

Infiltração vertical unidimensional de água em solo não-saturado, para um valor de  $\gamma_c \Delta U$  igual a 13,5 e PAS igual a um. O domínio do tempo  $\tau$  foi feito igual a 25 e dividido em 2000 partes. O domínio em Z foi feito igual a 0,30.

Foram comparadas malhas de 25 e 50 volumes de controle sob os dois esquemas (Dif. Central e Spline) utilizando-se a malha de 100 volumes de controle com o esquema de Diferença Central, aqui considerado como uma solução de “referência”, no sentido de apontar o comportamento do fenômeno.

A condição inicial do solo é  $\theta(Z, \tau = 0) = 0,0$  e as condições de contorno são  $\theta(Z = 0, \tau > 0) = 1,0$  e  $\theta(Z = 0,25, \tau > 0) = 0,0$ .

Observa-se, na simulação numérica e tendo em vista os resultados gráficos apresentados na Figura 4, uma precisão menor para o esquema de Diferenças Centrais, devido ao fato de que, no caso de grandes valores do parâmetro  $\gamma_c \Delta U$ , o fenômeno assume comportamento em degrau, gerando grande gradiente na frente de molhamento e dificultando sua simulação.

Observa-se que uma malha de 50 volumes de controle com o esquema *Flux-Spline*, fornece boa aproximação do resultado obtido com o esquema de Diferença Central com malha de cem volumes de controle (referência), implicando em menor esforço computacional, principalmente em problemas multidimensionais transientes.

Com o objetivo de mostrar a dominância do comportamento exponencial da difusividade hidráulica sobre a equação de governo, a Figura 5 demonstra, usando-se 50 volumes de controle e esquema *Flux-Spline*, a pequena influência, neste caso, do parâmetro PAS sobre a frente de molhamento.

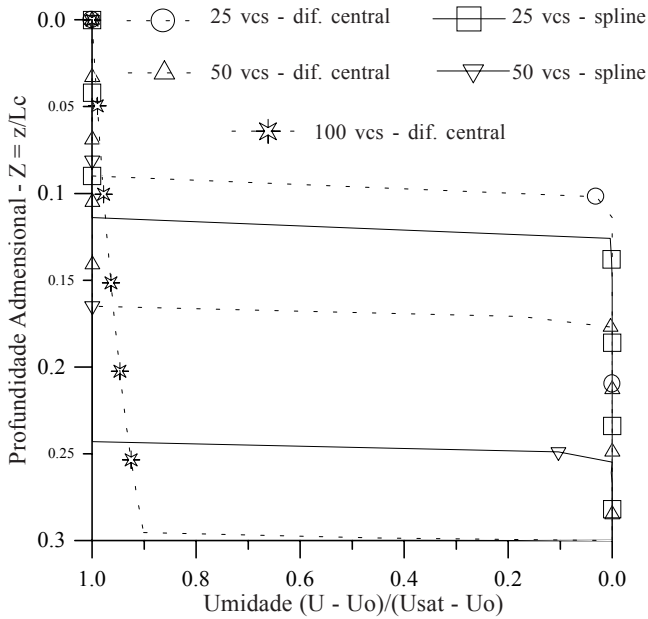


Figura 4. Umidade em função de  $Z$  para  $\gamma_c \Delta U = 13,5$ ,  $\tau = 25$  e  $PAS = 1$

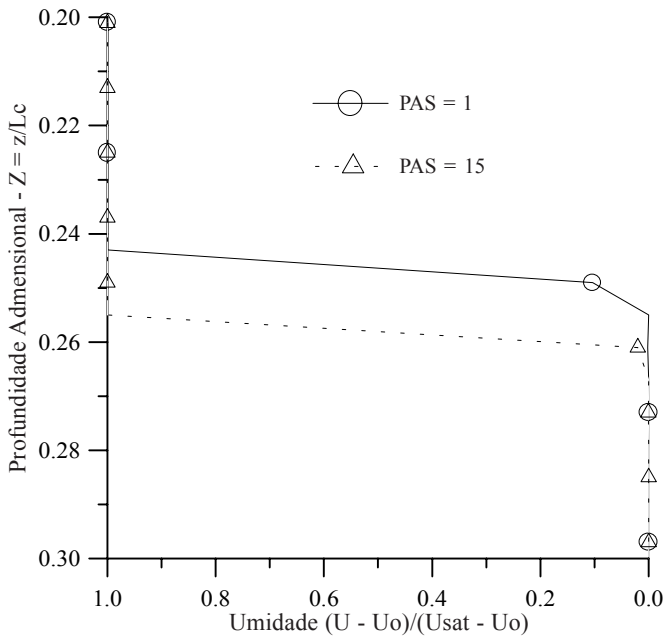


Figura 5. Influência de  $PAS$  sobre a posição do degrau para  $PAS^0 = 13,5$

Os problemas-teste adiante são propostos com o objetivo de se avaliar o desempenho numérico dos esquemas de discretização para várias combinações dos parâmetros  $PAS^0$  e  $PAS$ , que podem surgir durante a simulação de um caso real, em que os mesmos variam com a umidade, ao longo do espaço e do tempo.

**Problema-teste 2**

Infiltração vertical unidimensional de água em solo não-saturado, impondo-se saturação em  $Z=0$ , para um valor de  $PAS^0 = 4,94$  e  $PAS = 1$ . As condições, inicial e de contorno, são as mesmas do caso anterior. A solução numérica foi executada utilizando-se os esquemas de Diferença Central e *Flux-Spline*,

com malhas de 10 e 30 volumes de controle. Na solução de referência utilizou-se o esquema de Diferenças Centrais com 120 volumes de controle. Para o tempo adimensional  $\tau = 0,25$  dividido em 240 intervalos, obteve-se a solução descrita pela Figura 6. Os demais problemas-teste serão resolvidos para este tempo.

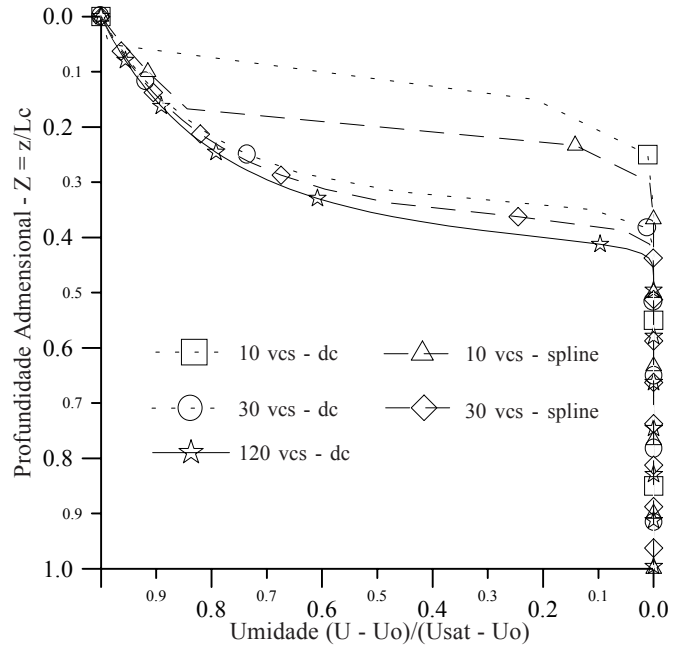


Figura 6. Umidade em função de  $Z$ , para  $PAS^0 = 4,94$ ,  $\tau = 0,25$  e  $PAS = 1$

Observa-se, na Figura 6, que para esses valores de  $PAS^0$  e  $PAS$ , o refinamento das malhas, tanto para Diferença Central como para *Flux-Spline*, conduz rapidamente a uma solução bastante aproximada daquela tida como referência devido ao comportamento “suave” do fenômeno. O esquema *Flux-Spline* mostra-se para determinada malha, sempre mais próximo da solução de referência que o esquema de Diferenças Centrais, confirmando novamente, neste caso, seu melhor desempenho.

**Problema-teste 3**

Infiltração vertical unidimensional de água em solo não-saturado, a partir de imposição de saturação em  $Z$  igual a zero e  $Z$  igual a um, para  $PAS^0 = 4,94$  e vários valores de  $PAS$ .

- Condição inicial:  $\theta(Z, \tau = 0) = 0,0$
- Condições de contorno:  $\theta(Z = 0, \tau > 0) = 1,0$  e  $\theta(Z = 1, \tau > 0) = 1,0$

Visto seu melhor desempenho, confirmado nos casos anteriores, utilizou-se o esquema *Flux-Spline* com uma malha de 200 volumes de controle e 240 intervalos de tempo, para geração das soluções para  $PAS$  igual a um, dez e quinze.

A Figura 7 mostra o comportamento do fenômeno para a combinação de baixo valor de  $PAS^0$ , em função da variação do parâmetro  $PAS$ . Valores menores de  $PAS^0$  ao lado de valores altos de  $PAS$ , configuram um fenômeno onde o potencial gravitacional se sobrepõe ao potencial mátrico. A ação de  $PAS$  é, neste caso, afastar a curva de qualquer simetria. Note-se



que, para valores menores de PAS, a curva tende a ser simétrica e o fenômeno passa a ser novamente dominado por difusão pura.

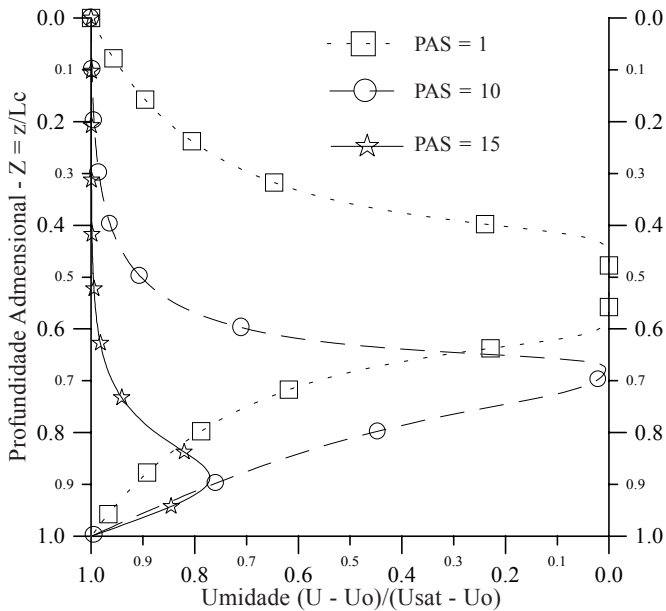


Figura 7. Curva de umidade para  $\tau = 0,25$ ,  $PAS^0 = 4,94$  e alguns valores de PAS

**Problema-teste 4**

O objetivo deste problema foi verificar as dificuldades na simulação numérica de problemas de infiltração de água no solo governados pelo potencial gravitacional. A avaliação dos esquemas de Diferença Central e *Flux-Spline* para infiltração de água em solo não saturado, com  $PAS^0$  igual a 4,94 e PAS igual a 15, será conduzida para várias malhas, de forma a se visualizar, neste caso, o desempenho dos dois esquemas. As condições de contorno e inicial são as mesmas do caso anterior.

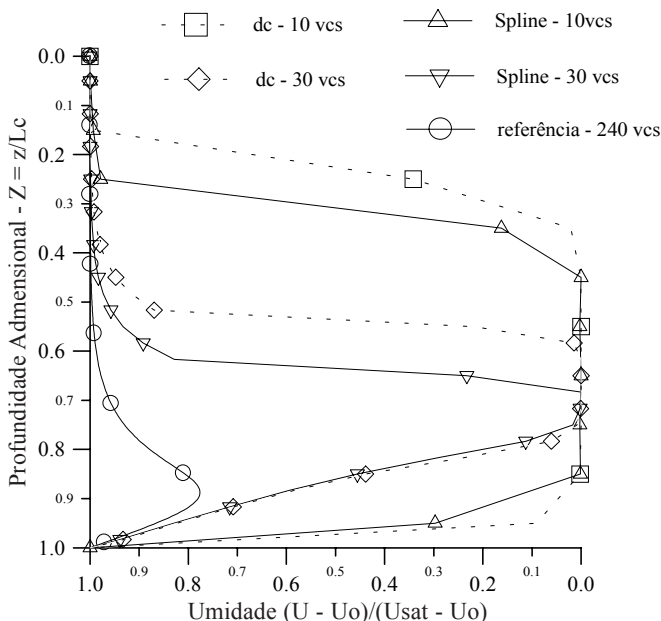


Figura 8. Comportamento numérico com  $\tau = 0,25$ ,  $PAS^0 = 4,94$  e PAS = 15

A Figura 8 mostra a dificuldade dos esquemas de Diferença Central e *Flux-Spline* para se aproximarem da solução de referência, aqui obtida com 240 volumes de controle. Nota-se que, para uma mesma malha, o esquema *Flux-Spline* está mais próximo da solução de referência que o esquema de Diferença Central.

**CONCLUSÕES**

1. Os resultados das simulações numéricas confirmam o bom desempenho do esquema *Flux-Spline* para problemas difusivos unidimensionais transientes não-lineares, em comparação com o tradicional esquema de Diferença Central usado por grande parte da literatura de volumes finitos e diferenças finitas.

2. Dependendo da combinação entre os dois parâmetros adimensionais, denominados  $\Gamma^0$  e PAS, é necessário o emprego de malhas mais refinadas para um tratamento numérico adequado da equação que governa o fenômeno de infiltração de água no solo.

3. No modelo aqui apresentado, o formato da frente de molhamento é governado pelo valor de  $PAS^0$ , pois o mesmo define o comportamento exponencial da difusividade hidráulica  $\Gamma^0$ . Para baixos valores do parâmetro  $PAS^0$ , a frente sofre influência marcante do parâmetro PAS.

**LITERATURA CITADA**

Bacchi, O.O.S.; Corrente, J.E.; Reichardt, K. Análise comparativa de dois métodos simplificados de determinação da condutividade hidráulica de solos. *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, Campinas, v.15, n.3, p.249-252, 1991.

Centurion, J.F.; Andrioli, I. Regime hídrico de alguns solos de Jaboticabal. *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, Campinas, v.24, n.4, p.701-709, 2000.

Nieckele, A.O. Development and evaluation of numerical schemes for the solution of convection-diffusion equations. University of Minnesota, St. Paul, 1985, 296p, PhD Thesis

Oliveira, P.C. Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades abertas com convecção natural. Campinas: UNICAMP, 1997. 196p. PhD Thesis

Oliveira, P.C. Esquema *Flux-Spline* aplicado a problemas difusivos tridimensionais em regime permanente. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, Campina Grande, v.3, n.3, p.327-330, 1999.

Patankar, S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980. 197p.

Prevedello, C.L. Física dos solos com problemas resolvidos. 1ª ed. Curitiba: C.L, 1996. 446p.

Prevedello, C.L.; Balena, S.P. Efeito de polímeros hidrorretentores nas propriedades físico-hídricas de dois meios porosos. *Revista Brasileira de Ciências do Solo*, Campinas, v.24, n.4, p.251-258, 2000.

- van Genuchten, M. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society American Journal, v.1, p.892-898, 1980.
- Varejão, L.M.C. Flux-Spline method for heat, mass and momentum transfer. University of Minnesota, St. Paul, 1979. 235p. Ph.D. Thesis
- Varejão, L.M.C.; Patankar, S.V.; Karki, K.C. Flux-Spline method for convection-diffusion problems. In: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Belo Horizonte, MG, p.161-174, 1991a.
- Varejão, L.M.C.; Patankar, S.V.; Karki, K.C. Flux-Spline method for conduction-type problems. In: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Belo Horizonte, MG, p.175-184. 1991b.