

# Caracterização experimental da permissividade dielétrica de materiais através da técnica de refletometria no domínio do tempo

(*Experimental characterization of the dielectric permittivity of materials through the time domain reflectometry technique*)

C.A. Dartora<sup>11</sup>, Armando Heilmann<sup>2,3</sup> Fabiano Thomazi<sup>1,3</sup>, E. Burkarter<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico SIMEPAR, Curitiba, PR, Brasil

<sup>3</sup>Faculdade Educacional Araucária, Campus Araucária, Araucária, PR, Brasil

<sup>4</sup>Instituto Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 20/10/2014; Aceito em 17/11/2014; Publicado em 31/3/2015

Do ponto de vista eletromagnético, uma ampla gama de materiais não apresentam resposta magnética significativa, podendo ser caracterizados inteiramente por uma grandeza conhecida como permissividade dielétrica complexa, na qual a parte imaginária está associada à condutividade elétrica do material. O objetivo geral deste trabalho é apresentar didaticamente e utilizando instrumentos de medida comumente encontrados nos laboratórios de cursos graduação em física e engenharia, uma técnica simples que permita a caracterização experimental da permissividade dielétrica complexa no espectro de RF, baseada na refletometria no domínio do tempo, permitindo ao estudante associar conceitos teóricos do eletromagnetismo às técnicas experimentais do mundo real. Primeiramente a teoria geral da permissividade dielétrica complexa e sua dependência em relação à frequência e aspectos microscópicos dos materiais será apresentada e brevemente discutida. Posteriormente, será considerada a técnica tradicional de medida de permissividade, baseada no uso de um circuito RC, onde o capacitor é preenchido com o material que se quer caracterizar, evidenciando assim a conexão entre as propriedades do material em teste com grandezas de circuitos elétricos. Na sequência, a técnica da refletometria no domínio do tempo, cuja base está na propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão, é apresentada e detalhadamente discutida. Tendo em vista o aspecto didático, a água e o material FR-4, amplamente empregado na fabricação de placas de circuito impresso, serão caracterizados utilizando a técnica de refletometria.

**Palavras-chave:** permissividade dielétrica, refletometria no domínio do tempo, água.

From the electromagnetic viewpoint, the wide variety of non-magnetic materials can be entirely characterized by a physical quantity known as complex dielectric permittivity, in which the imaginary part is related to the electrical conductivity. The aim of this contribution is to present an experimental technique using standard measurement equipments commonly encountered in didactic laboratories, based on the time domain reflectometry, to measure the dielectric permittivity of materials in the RF spectrum, helping students to perceive the connection between theory and practice. First of all, the general theory of the complex dielectric permittivity is presented and typical dependence of the permittivity versus frequency are briefly discussed and illustrated. Next, we discuss the standard permittivity measurement technique based on the RC circuit, in which the capacitor is filled with the material medium to be characterized. Finally, the time domain reflectometry technique is presented in the context of permittivity determination, and for didactic purposes, water and the material known as FR-4, used in printed circuit boards, are experimentally characterized.

**Keywords:** dielectric permittivity, time domain reflectometry, water.

## 1. Introdução

De modo geral, a abordagem usual do eletromagnetismo em cursos de graduação em física e engenharia ampara-se exclusivamente na apresentação de aulas teóricas, sendo a parte experimental relegada a segundo plano, fazendo com que uma parte significativa dos estudantes não consigam associar os conhecimentos abordados de forma teórica em sala de aula ao mundo

real e à prática experimental. Nesse sentido há dois problemas principais: i) o conceito teórico nem sempre é associado pelo estudante a grandezas físicas mensuráveis e ii) o estudante desconhece a técnica de medida da grandeza física envolvida e tampouco é capaz de perceber as dificuldades e limitações experimentais inerentes à técnica de medida utilizada. Mesmo a bibliografia comumente utilizada numa primeira abordagem da teoria eletromagnética pouco aborda técnicas expe-

<sup>1</sup>E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br.

rimentais [1-4].

De acordo com o eletromagnetismo clássico, os materiais são inteiramente caracterizados por sua permissividade dielétrica complexa  $\epsilon_c$ , que incorpora na parte imaginária a condutividade elétrica  $\sigma$ , e por sua permeabilidade magnética  $\mu$  [1-5]. Além disso, a ampla maioria dos materiais responde apenas fracamente ao estímulo de campos magnéticos e pode-se considerar que  $\mu = \mu_0$ , onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$  é a permeabilidade magnética do vácuo, de forma que a resposta de materiais isotrópicos e não-quirais aos campos eletromagnéticos no domínio da frequência está inteiramente caracterizada através da permissividade dielétrica complexa que por sua vez está intimamente relacionada a parâmetros microscópicos dos materiais, como sua estrutura interna e composição. Do ponto de vista de engenharia, pode-se utilizar os conhecimentos adquiridos em medidas da permissividade dielétrica complexa para classificar os materiais com relação ao comportamento de sua condutividade elétrica em isolantes, bons condutores ou semicondutores na frequência de interesse, permitindo ainda desenvolver aplicações tecnológicas específicas, como sensores de composição de líquidos, baseadas no monitoramento da permissividade dielétrica complexa.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar didaticamente e utilizando instrumentos de medida comumente encontrados nos laboratórios de cursos de graduação em física e engenharia, uma técnica simples que permita a caracterização experimental da permissividade dielétrica complexa no espectro de RF, baseada na refletometria no domínio do tempo, permitindo ao estudante associar conceitos teóricos do eletromagnetismo às técnicas experimentais do mundo real. Primeiramente a teoria geral da permissividade dielétrica complexa e sua dependência em relação à frequência e aspectos microscópicos dos materiais será apresentada e brevemente discutida. Posteriormente, será considerada a técnica tradicional de medida de permissividade, baseada no uso de um circuito RC, onde o capacitor é preenchido com o material que se quer caracterizar, evidenciando assim a conexão entre as propriedades do material em teste com grandezas de circuitos elétricos. Na sequência, a técnica da refletometria no domínio do tempo, cuja base está na propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão, é apresentada e detalhadamente discutida. Tendo em vista o aspecto didático, a água e o material FR-4, amplamente empregado na fabricação de placas de circuito impresso, serão caracterizados utilizando a técnica de refletometria.

## 2. Teoria geral da permissividade dielétrica complexa

O ponto de partida para a análise dos fenômenos eletromagnéticos são as equações de Maxwell, mostradas

abaixo no domínio do tempo [1-5]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4)$$

onde  $\rho = \sum_a q_a n_a$  [C/m<sup>3</sup>] e  $\mathbf{J} = \sum_a n_a q_a \mathbf{v}_a$  [A/m<sup>2</sup>] são a densidade de carga volumétrica total e o vetor densidade de corrente, respectivamente, produzidas pelas cargas  $q_a$ , que se movem com velocidade  $\mathbf{v}_a$  e cuja densidade volumétrica, em partículas por unidade de volume, é dada por  $n_a$ ,  $\mathbf{E}$  é o vetor intensidade de campo elétrico, medido em V/m,  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento elétrico em C/m<sup>2</sup>,  $\mathbf{H}$  é o vetor intensidade de campo magnético em A/m e  $\mathbf{B}$  é o vetor densidade de fluxo magnético em Wb/m<sup>2</sup>. Todas as unidades utilizadas estão no sistema internacional de medidas (SI).

Para completar o conjunto das equações, é necessário conhecer as relações constitutivas do meio material, que contém a resposta do mesmo à aplicação dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . No caso mais simples, ou seja, para um meio não-magnético, linear, isotrópico e homogêneo, na presença de campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , que variam suavemente no espaço em comparação com a escala atômico-molecular, a resposta é dada pelas relações

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6)$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t' - t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (7)$$

onde  $\mathbf{P}$  é a densidade de polarização dielétrica do meio,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$  é a permissividade dielétrica do vácuo e  $\chi_e(t - t')$  é a função resposta ou susceptibilidade dielétrica no domínio do tempo.

Nesse ponto é conveniente definir o par de transformadas de Fourier, conectando os espaços de tempo  $t$  e frequência angular  $\omega = 2\pi f$ , na forma

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8)$$

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (9)$$

Aplicando a transformada de Fourier às equações de Maxwell no domínio do tempo dadas acima, e utilizando a equação de continuidade da carga, já considerada no domínio da frequência angular,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -i\omega\rho$ , obtemos facilmente

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_c = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D}_c, \quad (13)$$

onde o vetor  $\mathbf{D}_c$ , definido no domínio de  $\omega$ , incorpora em uma única quantidade, o efeito da densidade de corrente de condução  $\mathbf{J}$  e do vetor densidade de deslocamento  $\mathbf{D}$ , conforme a equação

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{D} - \frac{i}{\omega} \mathbf{J} . \quad (14)$$

Como regra geral, podemos considerar que o meio material satisfaz a lei vetorial de Ohm, onde a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  são proporcionais no domínio da frequência,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} , \quad (15)$$

sendo  $\sigma$  a condutividade elétrica do material. Aplicando transformação de Fourier às Eqs. (5) e (7), a integral de convolução (7) reduz-se no domínio da frequência a um produto  $\mathbf{P}_c(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi_c(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ . Nesse caso a Eq. (14) toma a forma

$$\mathbf{D}_c(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_c(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (16)$$

onde a permissividade dielétrica complexa é relacionada à susceptibilidade dielétrica complexa  $\chi_c(\omega)$  pela equação

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left[ 1 + \chi_c(\omega) - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right] = \varepsilon_0 [1 + \chi_c(\omega)] . \quad (17)$$

Veja que a parte imaginária da permissividade dielétrica complexa está diretamente ligada à condutividade do meio material. Finalmente, podemos expressar as equações de Maxwell na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} , \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c \mathbf{E} . \quad (21)$$

Definindo o vetor de densidade de polarização dielétrica na forma  $\mathbf{P} = n_q \mathbf{q} \mathbf{x}$ , onde  $n$  é a densidade de cargas do tipo  $q$ ,  $\mathbf{x}$  é o vetor de posição relativa entre a carga  $q$  e o respectivo íon no material, este podendo ser considerado estático, uma vez que sua massa é muito maior que a massa dos elétrons (ou buracos), e utilizando as leis de Newton da mecânica, podemos obter uma equação diferencial descrevendo a dinâmica do vetor  $\mathbf{P}$ , incluindo efeito de dissipação e um termo de força de mola que caracteriza o vínculo da carga  $q$  a um dado íon do material. A demonstração fica a encargo do leitor, sendo o resultado no domínio do tempo dado

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} , \quad (22)$$

onde  $\omega_p = n_q q^2 / (m \varepsilon_0)$  é denominada frequência de plasma associada à carga  $q$ , cuja massa vale  $m$  e densidade de partículas de carga  $q$  sendo dada por  $n_q$ ,  $\omega_0$  é a frequência de ressonância, associada a uma força

de ligação da carga  $q$  ao sistema de íons do material, modelado como um sistema massa-mola. Efeitos de dissipação, sempre presentes em sistemas físicos reais, são levados em conta através do termo fenomenológico contendo a frequência  $\nu = 1/\tau$ , sendo  $\tau$  uma constante de tempo de amortecimento do sistema, associada aos diversos mecanismos de dissipação que podem estar presentes no meio, como por exemplo colisões binárias e reorientação dos momentos de dipolo elétrico na presença do campo variante no tempo. Resolvendo a equação acima no domínio da frequência, e generalizando para o caso de mais de um tipo de portador de carga e/ou mais de uma frequência de ressonância do material obtém-se uma expressão geral para a permissividade dielétrica complexa [5-7]

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_1(\omega) - i\varepsilon_2(\omega) , \quad (23)$$

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \sum_j \sum_n \frac{\omega_{pj}^2 (\omega_{0jn}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0jn}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu_{jn}^2} , \quad (24)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0} = \sum_j \sum_n \frac{\omega_{pj}^2 \omega \nu_{jn}}{(\omega_{0jn}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu_{jn}^2} , \quad (25)$$

onde o índice  $j$  denota a soma sobre os diversos tipos de portadores de carga  $q_j$  e o índice  $n$  está associado à soma sobre as diversas frequências de ressonância relacionadas ao portador  $q_j$ ,  $\omega_{pj} = n_j q_j^2 / (m_n \varepsilon_0)$  é a frequência de plasma do portador de tipo  $q_j$ ,  $\omega_{0jn}$  e  $\nu_{jn}$  são a  $n$ -ésima frequência de ressonância e de dissipação associadas ao portador  $q_j$ , respectivamente. Para fins de simplicidade, na sequência deste trabalho vamos restringir a análise para os casos em que exista apenas um tipo de portador de carga. Pode-se perceber facilmente das expressões mostradas acima que  $\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_1(-\omega)$  e  $\varepsilon_2(\omega) = -\varepsilon_2(-\omega)$ . Essa relação de paridade das funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  está associada à causalidade e às relações de Kramers-Krönig [5-11]

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' , \quad (26)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon_1(\omega') - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (27)$$

onde o símbolo  $P$  acima denota parte principal da integral, que significa remover os pontos para os quais a integral diverge. A importância prática das relações de Kramers-Kronig encontra-se no fato de que a medida experimental da parte real de  $\varepsilon_c$  em frequência permite a determinação indireta da parte imaginária, e vice-versa.

É interessante analisar o comportamento idealizado em frequência de meios materiais que são considerados isolantes ou condutores no regime DC. Suponha por simplicidade que somente haja uma frequência de ressonância  $\omega_0$  no material, reduzindo as expressões (24)

e (25) às seguintes:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}, \quad (28)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(\omega)}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2\omega\nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}. \quad (29)$$

Primeiro vamos considerar um material dielétrico de poucas perdas, tendo como exemplo isolantes dielétricos utilizados em dispositivos de alta tensão ou ainda fibras ópticas. O caso ideal corresponde a levar as expressões acima ao limite  $\nu \rightarrow 0$ , significando que não há dissipação para  $\omega \neq \omega_0$ . Realizando o limite  $\nu \rightarrow 0$  obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (30)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \pi \frac{\omega_p^2}{2\omega} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (31)$$

Na frequência angular de ressonância  $\omega = \omega_0$ , a parte real  $\varepsilon_1$  torna-se indeterminada enquanto a parte imaginária  $\varepsilon_2$  diverge. Uma vez que a parte imaginária está diretamente associada à condutividade, na forma  $\sigma(\omega) = \omega\varepsilon_2$ , esta última diverge em  $\omega = \omega_0$ , implicando que mesmo um meio dielétrico de poucas perdas passa a comportar-se como bom condutor, com alta condutividade efetiva, na frequência angular de ressonância. Todavia, longe das ressonâncias do material a parte imaginária é nula,  $\varepsilon_2 = 0$ , e obtém-se a famosa equação de Sellmeier [11], dada abaixo considerando apenas um tipo de portador mas com várias frequências de ressonância  $\omega_{0n}$  no material

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \sum_n \frac{\omega_{pn}^2}{\omega_{0n}^2 - \omega^2}. \quad (32)$$

É bastante fácil verificar a validade das relações de Krammers-Krönig para as Eqs. (28) e (29), o que permite vislumbrar um método de caracterização experimental da permissividade dielétrica complexa. Determina-se experimentalmente a parte imaginária da permissividade dielétrica complexa em frequência e obtém-se a parte real a partir da Eq. (26). É fácil verificar que a parte imaginária da permissividade dielétrica complexa está associada à absorção do material, uma vez que o campo  $\mathbf{E}$  aplicado induz uma corrente  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , levando a uma dissipação média de potência cuja densidade volumétrica é dada por

$$\mathcal{P}_{dis} = \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_2|\mathbf{E}|^2. \quad (33)$$

Conhecendo a amplitude do campo elétrico de frequência  $\omega$  aplicado ao material e medindo a densidade de potência média dissipada no material tem-se a medida desejada de  $\varepsilon_2$ . Essa técnica é muito útil em altas frequências, onde  $|\mathbf{E}|^2$  está diretamente relacionado à densidade de fluxo de energia incidente no material.

Indo adiante, nos meios condutores os elétrons são quase livres, o que corresponde a não haver ressonâncias,  $\omega_0 \rightarrow 0$ , ou seja, a força de restituição de mola é desprezível. Condutores metálicos usuais ainda satisfazem a condição  $\nu \gg \omega$  para frequências abaixo do espectro ultravioleta, o que resulta em

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 - i\frac{\omega_p^2}{\omega\nu}. \quad (34)$$

Por comparação, é fácil ver que  $\sigma = \omega_p^2\varepsilon^0/\nu = n_q q^2 \tau/m$ , o que corresponde à condutividade de Boltzmann dos metais.

A Fig. 1 mostra curvas típicas da permissividade dielétrica complexa para um meio dielétrico hipotético com frequências de plasma  $\omega_p/\omega_0 = 3$  e de colisões  $\nu/\omega_0 = 0.5 < \omega_p/\omega_0$ , normalizadas pela frequência de ressonância  $\omega_0$ , em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$ . É fácil ver que no valor de pico da parte imaginária  $\varepsilon_2$  há uma diminuição significativa da parte real  $\varepsilon_1$ . Um caso distinto é ilustrado na Fig. 2 para outro meio hipotético, que poderia ilustrar um material com condutividade iônica, por exemplo, fazendo  $\omega_p < \nu$ . Foram escolhidos os valores normalizados  $\omega_p/\omega_0 = 1.5$  e  $\nu/\omega_0 = 3$ .

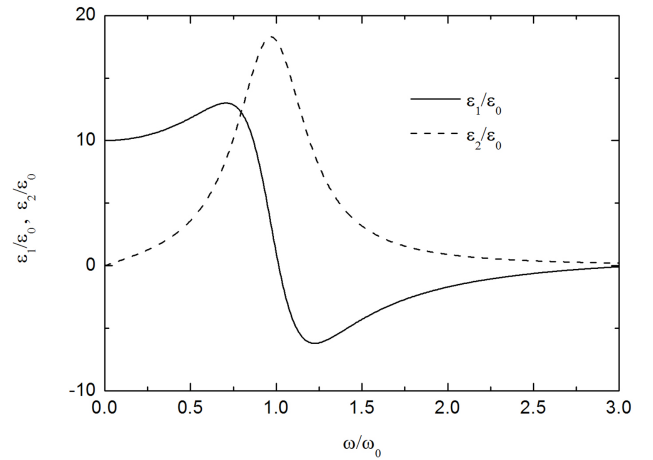


Figura 1 - Permissividade dielétrica para um dielétrico hipotético em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$  com valores  $\omega_p/\omega_0 = 3$  e  $\nu/\omega_0 = 0.5$ .

Cabe destacar que é bastante usual na área de materiais dielétricos apresentar o comportamento da permissividade dielétrica complexa através do diagrama de Nyquist, onde a parte real  $\varepsilon_1(\omega)/\varepsilon_0$  é plotada *versus* a parte imaginária  $\varepsilon_2(\omega)/\varepsilon_0$ , ambas obviamente parametrizadas pela frequência  $\omega$ . A Fig. 3 mostra em (a) os gráficos de  $\varepsilon_1/\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_2/\varepsilon_0$  em função da frequência e em (b) o diagrama de Nyquist para a situação em que  $\omega_p/\omega_0 = 5$  e  $\nu/\omega_0 = 1$ . As flechas mostradas na curva em 3.(b) indicam o sentido de varredura de frequência, partindo de  $\omega = 0$ .

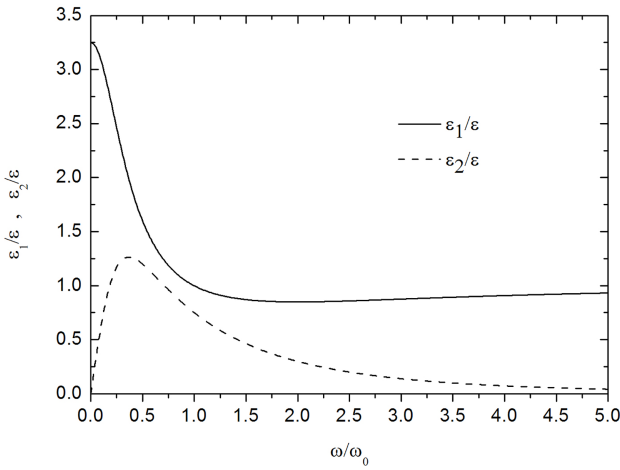


Figura 2 - Permissividade dielétrica para um meio hipotético em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$  com valores  $\omega_p/\omega_0 = 1.5$  e  $\nu/\omega_0 = 3$ .

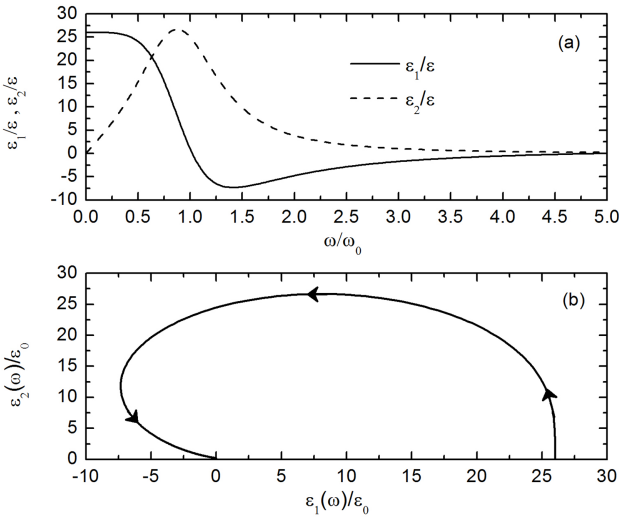


Figura 3 - (a) Permissividade dielétrica e (b) Diagrama de Nyquist para um meio hipotético em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_0$  com valores  $\omega_p/\omega_0 = 5$  e  $\nu/\omega_0 = 1$ .

Na Fig. 4 ilustra-se o caso de um material com duas ressonâncias distintas  $\omega_{01}$  e  $\omega_{02}$ , considerando  $\omega_{02} = 4\omega_{01}$ . As frequências de plasma e colisões associadas às duas ressonâncias foram tomadas idênticas por simplicidade, sendo adotados os valores  $\omega_p/\omega_{01} = 2$  e  $\nu/\omega_{01} = 0.5$ . Note que há um loop interno correspondendo à segunda ressonância no gráfico de Nyquist para esse caso. Tipicamente, um material real apresenta diversas ressonâncias, correspondentes a distintos mecanismos, que vão desde os processos iônicos em baixas frequências, passando pela excitação de modos de vibrações moleculares, no espectro de microondas e infravermelho, até os mecanismos atômicos e eletrônicos, que usualmente ocorrem no espectro do visível, ultravioleta e acima.

Em materiais sólidos, é bastante provável a existência de uma banda de ressonâncias ao invés de uma frequência central bem definida, ou seja, um inter-

valo de frequências  $\omega_0$  onde é permitido que haja significativa absorção da radiação eletromagnética, como ocorre, por exemplo, em um semiconductor. Nesse caso a absorção de fótons, denominado efeito fotoelétrico interno, correspondendo ao que chamamos aqui de ressonância, passa a acontecer de modo pronunciado a partir de uma frequência mínima igual ao *gap* de energia dividido pela constante de Planck,  $f_0 = \omega_0/(2\pi) = E_g/h$ . Uma vez atingido esse valor de frequência, qualquer frequência em uma banda  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ , com  $\omega_2$  correspondendo a um possível limite superior, pode promover um elétron da banda de valência para a banda de condução do material, gerando grande absorção. Nessa situação, as somas que aparecem nas Eqs. (24) e (25) devem ser substituídas por integrais

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \rho(\omega_0) d\omega_0, \quad (35)$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega_p^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \rho(\omega_0) d\omega_0, \quad (36)$$

onde  $\rho(\omega_0)$  é uma função de densidade de estados de ressonância. Na Fig. 5 é mostrado um gráfico típico dessa situação, com  $\rho(\omega_0) = 2.5\sqrt{\omega_0}$ ,  $\omega_2/\omega_1 = 3$ ,  $\omega_p/\omega_1 = 2$  e  $\nu/\omega_1 = 0.4$ . Observe que  $\varepsilon_2(\omega)$  assume valores significativos em todo o intervalo de ressonância, enquanto nessa faixa  $\varepsilon_1(\omega)$  decresce de maneira praticamente linear. Tipicamente, a frequência  $\omega_1$  está localizada no espectro infravermelho ou acima e a técnica experimental de determinação da permissividade geralmente envolve medida de refletividade e absorção óptica de uma amostra do material. A refletividade do material na incidência normal está diretamente associada ao índice de refração complexo  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_c(\omega)}$  através da relação  $R = |(n - 1)/(n + 1)|^2$ .

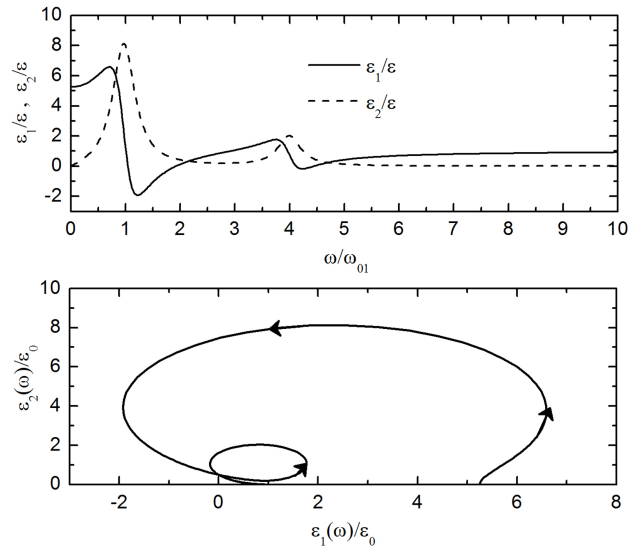


Figura 4 - a) Permissividade dielétrica e (b) Diagrama de Nyquist para um meio hipotético com duas ressonâncias em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_{01}$ , com valores normalizados  $\omega_{02} = 4\omega_{01}$ ,  $\omega_p/\omega_{01} = 2$  e  $\nu/\omega_{01} = 0.5$ .

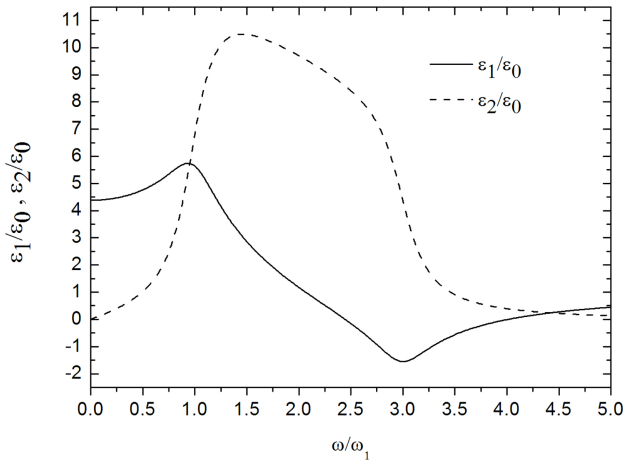


Figura 5 - Permissividade dielétrica para um meio semiconductor hipotético com uma banda de ressonâncias  $\omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_2$ , em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_1$ , com valores normalizados  $\omega_2 = 3\omega_1$ ,  $\omega_p/\omega_1 = 2$  e  $\nu/\omega_1 = 0.4$ .

### 3. A técnica do circuito RC para medidas em baixas frequências

No regime de baixas frequências, para as quais o comprimento de onda  $\lambda = c/f$  é muito maior do que todas as dimensões físicas envolvidas no sistema considerado, métodos muito simples, baseados na teoria de circuitos elétricos [12-14], podem ser usados para determinar a função de permissividade complexa,  $\varepsilon_c$ . A realização experimental mais simples é o circuito RC ilustrado na Fig. 6.

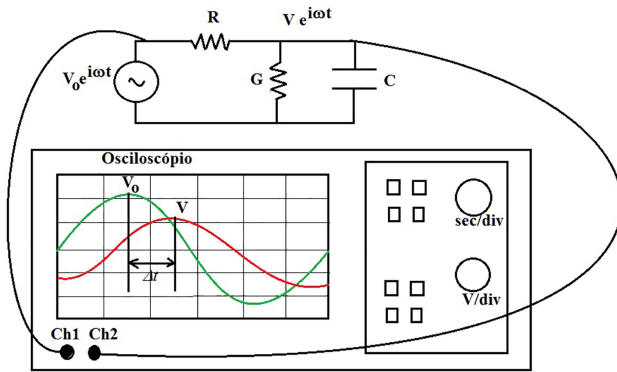


Figura 6 - Esquema para a medida da permissividade dielétrica utilizando o modelo de circuito RC. A condutância  $G$  e a capacitância  $C$  dependem do meio material que se quer caracterizar.

Na teoria de circuitos elétricos no domínio da frequência podemos generalizar o conceito de condutância para uma quantidade complexa denominada admitância  $Y$ , que é a razão entre a corrente  $I$  que passa sobre um elemento e a tensão  $V$  aplicada sobre ele. Como a corrente  $I$  pode não estar em fase com a tensão aplicada  $V$ , a admitância necessariamente torna-se um número complexo  $Y = G + iX = |Y|e^{i\theta}$ , com módulo e fase, tal que o módulo é dado por  $|I/V| = |Y| = \sqrt{G^2 + X^2}$ , enquanto  $\theta = \text{atan}(X/G)$  é a fase relativa entre  $I$  e  $V$  na frequência  $\omega$  considerada.

Para um capacitor real, a admitância é dada na forma  $Y = G + i\omega C$ , sendo  $C$  a capacitância desejada e  $G$  a condutância relacionada à corrente de fuga. Idealmente  $G = 0$  e temos  $|Y| = \omega C$  enquanto a fase relativa entre corrente e tensão é  $90^\circ$ , significando que para uma fonte de tensão senoidal de frequência  $\omega$  aplicada ao capacitor a corrente adianta-se em relação à tensão um intervalo de tempo que corresponde a  $1/4$  do período  $T = 2\pi/\omega$  da fonte.

Considerando o circuito da Fig. 6 e tendo um osciloscópio à disposição, pode-se medir a relação de amplitude e fase entre a tensão  $V e^{i\omega t}$  medida na admitância  $Y = G + i\omega C$  e a corrente  $I = (V_0 - V)/R$  que circula pelo circuito, medida através do resistor  $R$ . Uma vez que  $I = YV = (V_0 - V)/R$  pode-se calcular  $Y$  conforme a equação

$$Y = \frac{\Delta V}{RV} = G + i\omega C, \quad (37)$$

onde  $\Delta V = V_0 - V$ . A essência da medida está na confecção de um capacitor  $C_m$ , que é preenchido pelo material a ser caracterizado, ou seja, o material em teste faz o papel de dielétrico do capacitor. A geometria desse capacitor pode ser variada de acordo com a conveniência. Para sólidos que podem ser facilmente moldados em formas de blocos com faces planas e perfeitamente paralelas a geometria mais simples é a do capacitor de placas paralelas. É importante ressaltar que se o capacitor  $C_m$  é confeccionado de tal forma que sua capacitância é muito pequena, na ordem de algumas dezenas ou poucas centenas de pF, será necessário levar em conta o efeito das pontas de prova utilizadas na medida experimental. Geralmente a ponta de prova é caracterizada por uma admitância  $Y_p = 1/R_p + i\omega C_p$ , onde  $R_p$  é a resistência e  $C_p$  a capacitância da mesma, respectivamente. Essa admitância  $Y_p$  da ponta de prova associa-se de forma paralela com o capacitor  $C_m$  contendo o material a ser caracterizado e representado pela admitância  $Y_m$ . A admitância total nesse caso de associação paralela é a soma das admitâncias. Valores típicos de  $C_p$  estão na faixa de 10pF, enquanto  $R_p$  na escala de 10MΩ. Para obter a admitância do material temos que fazer  $Y_m = Y - Y_p$ . Uma forma mais adequada de realizar a medida experimental é introduzir buffers de isolamento de alta impedância de entrada, para minimizar os efeitos das pontas de prova sobre o circuito a ser medido. Esses buffers podem ser feitos utilizando amplificadores operacionais de alta performance, configurados para ganho unitário, entre os pontos de medida do circuito e as pontas de prova. Observe que as perdas por corrente de fuga no material dielétrico que preenche o capacitor  $C_m$  estão incorporadas na parte real de  $Y_m$ . Na realização experimental, o valor do resistor  $R$  é perfeitamente conhecido e não pode depender da frequência  $\omega$ . Para medidas de alta precisão, pode-se utilizar um resistor SMD de aplicação em alta frequência. A admitância  $Y_m = G_m + i\omega C_m$  é função do produto da permissividade dielétrica do material  $\varepsilon_c$  e da geometria do capacitor, através de um fator geométrico  $F_g$ , ou seja,  $Y_m = i\omega\varepsilon_c(\omega)F_g$ . Para um

capacitor de placas paralelas de área  $A$  separadas por uma distância  $d$ , no interior do qual é colocado o material que se quer analisar, tem-se  $F_g = A/d$ . Observe que o volume da amostra de material que se quer medir é simplesmente dado pelo produto  $Ad$ , na situação mais simples, ou seja, o meio material a ser caracterizado preenche totalmente a área interna do capacitor de placas paralelas. Nesse caso tem-se  $G_m = \sigma A/d$  e  $C_m = \epsilon_1 A/d$ , onde  $\sigma$  é a condutividade do material e  $\epsilon_1$  a parte real de sua permissividade dielétrica complexa. Pode-se ainda expressar a admitância complexa dessa estrutura de placas paralelas na forma

$$Y_m = (\sigma + i\omega\epsilon_1) \frac{A}{d} = i\omega \frac{A}{d} \left( \epsilon_1 - i \frac{\sigma}{\omega} \right). \quad (38)$$

Combinando as Eqs. (37) e (38) obtém-se prontamente os valores de  $\epsilon_1$  e  $\sigma$ , uma vez conhecidos dos valores medidos experimentalmente para  $V$  e  $\Delta V$ , utilizando o osciloscópio para medir máxima amplitude da tensão no capacitor  $|V|$  e a máxima amplitude da tensão no resistor  $|\Delta V|$ , bem como a fase relativa entre  $V$  e  $\Delta V = V_0 - V$ , dada por  $\theta = \omega\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o intervalo temporal transcorrido entre o máximo de amplitude da fonte e o máximo de amplitude de sinal medido no capacitor, conforme ilustrado na Fig. 6. O resultado final é

$$\epsilon_1 = \frac{d}{A\omega} \left( \frac{1}{R} \frac{|\Delta V|}{|V|} \text{sen}\theta - \omega C_p \right), \quad (39)$$

$$\sigma = \frac{d}{A} \left( \frac{1}{R} \frac{|\Delta V|}{|V|} \text{cos}\theta - \frac{1}{R_p} \right). \quad (40)$$

Para ilustrar o método, realizamos medidas experimentais da permissividade dielétrica complexa de uma placa para circuito impresso dupla face, com material de substrato FR-4. Sabe-se da literatura corrente que a parte real da permissividade dielétrica re-

lativa desse material está na faixa 4,5-5,5, independente da frequência na escala que vai até 10 MHz [15]. Utilizamos uma placa de área  $30 \times 10 \text{ cm}^2$  e espessura aproximadamente 0,9 mm, determinada através de um paquímetro digital, o que nos fornece um fator geométrico  $F_g = 33 \text{ m}$ , aproximadamente. Utilizamos na medida um resistor  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ , para as frequências de 10 kHz, 50 kHz e 100 kHz. O osciloscópio utilizado nas medidas é um Agilent InfiniiVision modelo DSO-X2002A 70 MHz e 2GSa/s, que possui um gerador de funções interno e permite salvamento de dados através de uma porta USB para um dispositivo de armazenamento tipo pendrive, disponível nos laboratórios de engenharia elétrica da Universidade Federal do Paraná. Consideramos  $R_p = \infty$  e  $C_p = 0$ , para fins de simplicidade de cálculo, mas esse fato é justificado porque o capacitor construído tem capacitância teórica duas ordens de grandeza maior que a capacitância da ponta de prova  $C_p = 10 \text{ pF}$ , enquanto que a resistência da ponta,  $R_p = 10 \text{ M}\Omega$  produz efeitos com ordens de grandeza menores do que a precisão com que somos capazes de determinar a condutividade do próprio material.

A Fig. 7 ilustra a medida experimental do material FR-4 para a frequência de 10 kHz. Observe que os valores máximos são  $V_m = 448 \text{ mV}$  e  $\Delta V_m = 194 \text{ mV}$ , enquanto  $\Delta t = 25 \mu\text{s}$ , que corresponde a  $\theta = \omega\Delta t \approx \pi/2$ , lembrando que  $\omega = 2\pi f$ . Utilizando a fórmula (39), obtemos facilmente o valor  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 4,92$  nessa frequência. Nas Figs. 8 e 9 são mostradas as medidas experimentais para  $f = 50\text{kHz}$  e  $f = 100\text{kHz}$ , respectivamente. A Tabela 1 sumariza os resultados obtidos. Pode-se observar uma variação do valor de  $\epsilon_1/\epsilon_0$ , que ficou entre 4,9 e 5,2. Nesse caso, as variações de permissividade com a frequência devem-se sobretudo a incertezas experimentais e não podem ser atribuídas ao comportamento intrínseco do material.

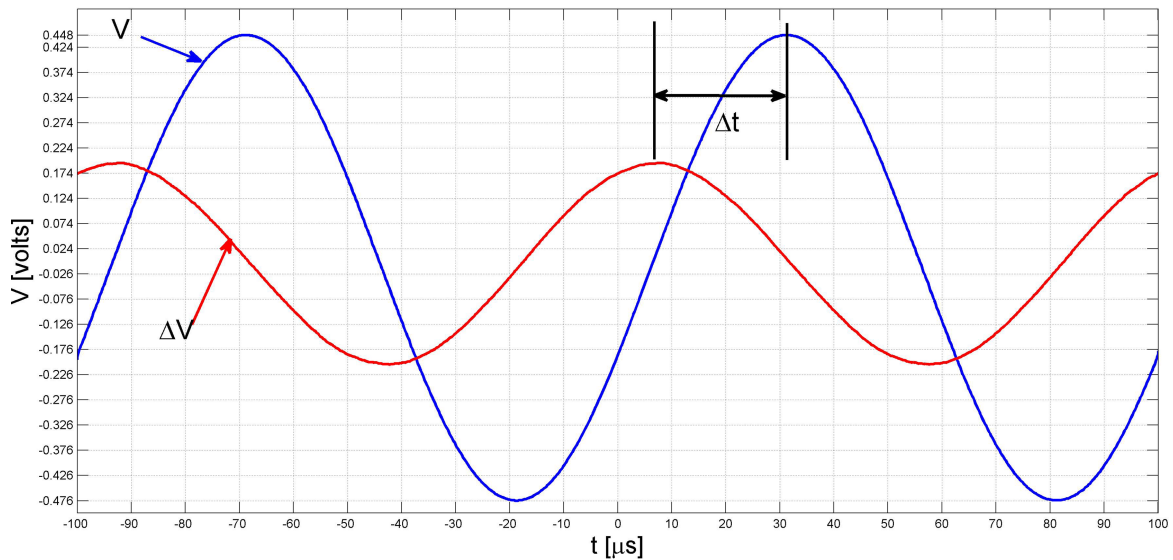


Figura 7 - Medida experimental de  $V(t)$  e  $\Delta V(t)$  para o material FR-4 na frequência  $f = 10\text{kHz}$  utilizando o osciloscópio Agilent InfiniiVision modelo DSO-X2002A. Pode-se observar que os valores máximos são  $V_m = 448 \text{ mV}$  e  $\Delta V_m = 194 \text{ mV}$ , enquanto  $\Delta t = 25 \mu\text{s}$ , que corresponde a  $\theta = \omega\Delta t \approx \pi/2$ .

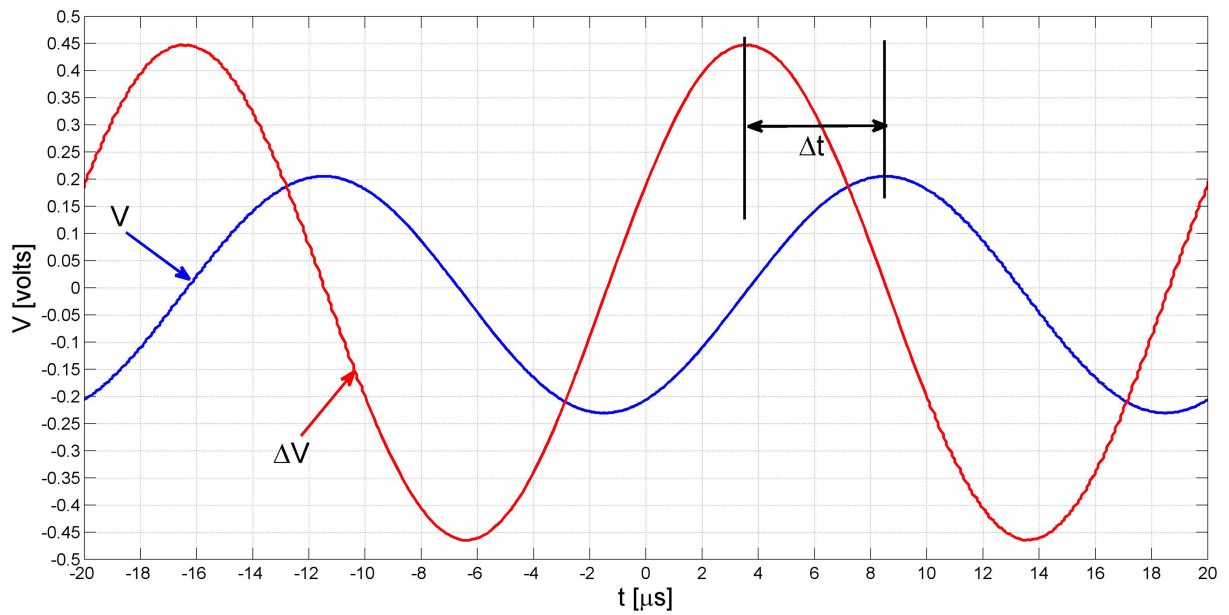


Figura 8 - Medida experimental de  $V(t)$  e  $\Delta V(t)$  para o material FR-4 na frequência  $f = 50$  kHz utilizando o osciloscópio Agilent InfiniiVision modelo DSO-X2002A. Pode-se observar que os valores máximos são  $V_m = 200$  mV e  $\Delta V_m = 450$  mV, enquanto  $\Delta t = 5$   $\mu$ s, que corresponde a  $\theta = \omega \Delta t \approx \pi/2$ .

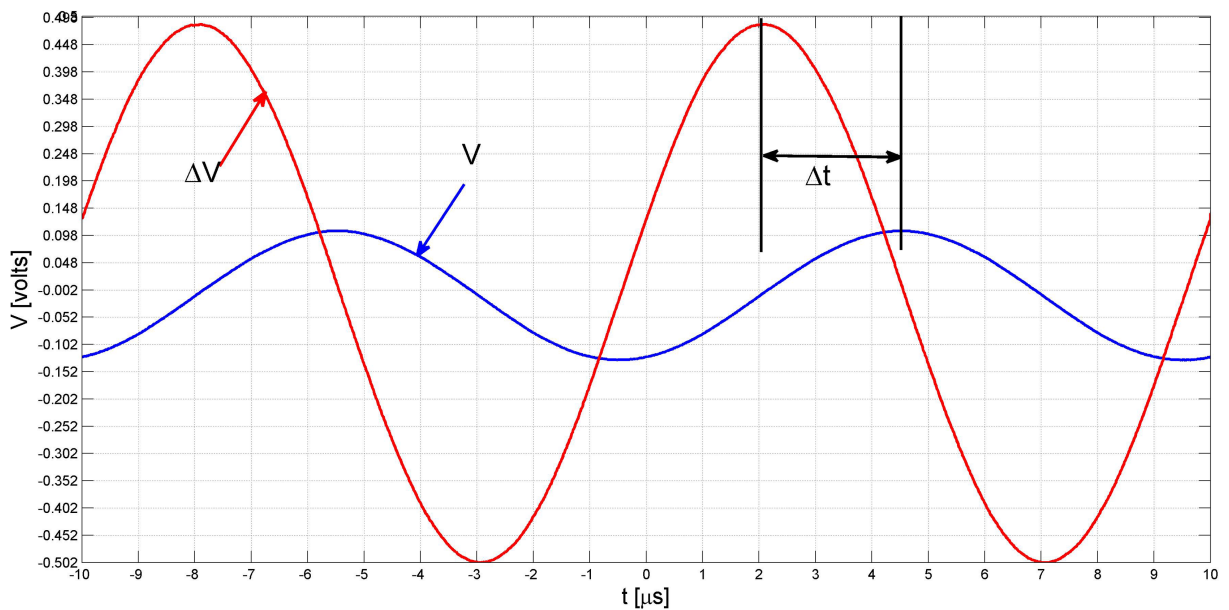


Figura 9 - Medida experimental de  $V(t)$  e  $\Delta V(t)$  para o material FR-4 na frequência  $f = 100$  kHz utilizando o osciloscópio Agilent InfiniiVision modelo DSO-X2002A. Pode-se observar que os valores máximos são  $V_m = 100$  mV e  $\Delta V_m = 485$  mV, enquanto  $\Delta t = 2,5$   $\mu$ s, que corresponde a  $\theta = \omega \Delta t \approx \pi/2$ .

Tabela 1 - Sumário das medidas da permissividade dielétrica do material FR-4 utilizando a técnica do circuito RC.

$f$ [kHz]	$ \Delta V $ [mV]	$ V $ [mV]	$\Delta t$ [ $\mu$ s]	$\epsilon_1/\epsilon_0$	$\sigma$ [S/m]
10	194	448	25	4,92	0
50	450	200	5	4,98	0
100	485	100	2,5	5,19	0

#### 4. A técnica de refletometria no domínio do tempo

A técnica de refletometria no domínio do tempo considera essencialmente o efeito de reflexão que ocorre quando um pulso propagante em uma linha de transmissão encontra uma terminação na qual a impedância



da carga  $Z_L$  conectada à linha é distinta da impedância característica da linha  $Z_0$ , gerando um pulso refletido [16]. A impedância de carga afeta tanto a forma quanto a amplitude do pulso refletido, que pode ser separado do pulso incidente na entrada da linha, desde que esse último seja suficientemente curto no tempo, comparativamente ao tempo necessário para que o pulso incidente viaje até a terminação da linha, e o pulso refletido retorne até a entrada da linha, tomada como referência, caso contrário haverá interferência entre o pulso incidente e o pulso refletido nesse ponto, sendo muito difícil extrair informações confiáveis nessa situação.

Em uma linha de transmissão sem perdas, as ondas de tensão  $V(z, t)$  e corrente  $I(z, t)$ , que representam os campos elétrico e magnético transversais, respectivamente, satisfazem as equações do telegrafista [1,2,4]

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}, \quad (42)$$

onde  $L_0$  [H/m] é a indutância por unidade de comprimento e  $C_0$  [F/m] a capacitância por unidade de comprimento da linha. Estas equações podem ser prontamente resolvidas, tomando a derivada da Eq. (41) em relação à coordenada  $z$  e utilizando a Eq. (42), para obter a equação de ondas de tensão, na forma

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(z, t) = 0. \quad (43)$$

A velocidade de propagação das ondas de tensão na linha está relacionada ao produto  $L_0 C_0$ , na forma

$$L_0 C_0 = \frac{1}{v^2}. \quad (44)$$

A consistência com as equações de Maxwell requer ainda que  $\mu_0 \varepsilon = L_0 C_0$ , onde supõe-se que o material dielétrico do qual a linha de transmissão é feita é não magnético, por isso  $\mu = \mu_0$  e além disso possui uma permissividade puramente real  $\varepsilon$ , ou seja, possui condutividade nula. Os condutores utilizados na linha são assumidos ideais, de condutividade  $\sigma \rightarrow \infty$ . A solução das equações acima no domínio da frequência toma a forma

$$V(z, \omega) = [V_0^+(\omega)e^{-i\beta z} + V_0^-(\omega)e^{i\beta z}] \quad (45)$$

$$I(z, \omega) = \frac{1}{Z_0} [V_0^+(\omega)e^{-i\beta z} - V_0^-(\omega)e^{i\beta z}] \quad (46)$$

onde  $V_0^+(\omega)$  é a amplitude da componente de frequência  $\omega$  da onda propagante, que vai do gerador para a carga conectada ao final da linha, e  $V_0^-(\omega)$  a amplitude da componente de frequência  $\omega$  da onda refletida pela carga e que propaga-se no sentido do gerador,  $\beta$  é a constante de fase (ou número de onda) na frequência

angular  $\omega$  e  $Z_0$  a impedância característica da linha, e são dadas pelas expressões

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = \frac{\omega}{v}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (47)$$

Em linhas ideais e sem perdas assume-se que  $L_0$ ,  $C_0$  e  $Z_0$  são independentes da frequência de operação, o que é uma excelente aproximação para cabos coaxiais com dielétricos poliméricos como o polietileno ( $\varepsilon/\varepsilon_0 = 2,25$ ), pelo menos abaixo do espectro de microondas. Essa independência dos parâmetros da linha de transmissão com a frequência é uma característica altamente desejável para medidas de refletometria, porque a propagação é não-dispersiva dentro da linha, ou seja, componentes de frequência distintas de um pulso propagam-se com a mesma velocidade. Caso a velocidade de propagação na linha dependa da frequência, é necessário fazer medidas de calibração e correção que não são tão simples.

A técnica de refletometria é baseada na medida do coeficiente de reflexão  $\Gamma(z, \omega)$ , definido como a razão entre a amplitude da onda refletida e a amplitude da onda propagante em um dado plano  $z$  da linha [1,2], levando em conta a relação de fase entre essas duas ondas, na forma

$$\Gamma(z, \omega) = \frac{V_0^-(\omega)e^{i\beta z}}{V_0^+(\omega)e^{-i\beta z}} = \Gamma_0(\omega)e^{2i\beta z}, \quad (48)$$

onde

$$\Gamma_0(\omega) = \Gamma(z = 0, \omega) = \frac{V_0^-(\omega)}{V_0^+(\omega)}. \quad (49)$$

Aqui chamamos a atenção do leitor para a nomenclatura adotada de maneira usual em engenharia no estudo das linhas de transmissão e seguida na presente Seção deste trabalho. É convencional no estudo de ondas eletromagnéticas denominar de coeficiente de reflexão (ou refletividade) o valor dado por  $R = |\Gamma|^2$  [3]. Todavia no contexto de refletometria em linhas de transmissão e em geral, livros de teoria eletromagnética voltados para o público de engenharia, denomina-se a própria função amplitude relativa  $\Gamma(z, \omega)$  de coeficiente de reflexão [1,2].

Para linhas sem perdas o módulo do coeficiente de reflexão de cada frequência  $\omega$  é invariante ao longo da linha, ao passo que a sua fase varia. No caso com perdas, deve-se introduzir um efeito de atenuação na forma  $e^{-2\alpha z}$ . Tendo em conta a definição do coeficiente  $\Gamma(z, \omega)$  podemos escrever  $V(z, \omega)$  e  $I(z, \omega)$  como

$$V(z, \omega) = V^+(\omega)e^{-i\beta z} [1 + \Gamma(z, \omega)], \quad (50)$$

$$I(z, \omega) = \frac{1}{Z_0} V^+(\omega)e^{-i\beta z} [1 - \Gamma(z, \omega)]. \quad (51)$$

A conexão do coeficiente de reflexão com os elementos da teoria de circuitos elétricos torna-se mais evidente através da definição de impedância  $Z(z, \omega)$ , medida no

plano  $z$  para a componente de frequência  $\omega$ , sendo a razão entre  $V(z, \omega)$  e  $I(z, \omega)$ , permitindo obter

$$Z(z, \omega) = \frac{V(z, \omega)}{I(z, \omega)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z, \omega)}{1 - \Gamma(z, \omega)}. \quad (52)$$

Uma vez que na terminação de uma linha de transmissão de comprimento  $l$  é conectada uma carga de impedância  $Z_L$ , por consistência temos que  $Z(l, \omega) = Z_L$ . Uma vez que a medida do coeficiente de reflexão é realizada em  $z = 0$ , podemos relacioná-lo ao coeficiente de reflexão em  $z = l$  através da Eq. (48), para obter

$$Z_L(\omega) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0(\omega)e^{2i\beta l}}{1 - \Gamma_0(\omega)e^{2i\beta l}}. \quad (53)$$

Agora vamos descrever a técnica de medida da refletometria no domínio do tempo. A configuração experimental é mostrada na Fig. 10. Um cabo coaxial de comprimento  $l$ , impedância característica  $Z_0$  e velocidade de propagação  $v$  é utilizado para conectar um gerador de pulsos a uma carga  $Z_L$ . No caso da medida de permissividade dielétrica, que é do nosso interesse, a carga é basicamente um capacitor, preenchido pelo material que desejamos caracterizar, analogamente ao caso da medida através do circuito RC discutido na Seção anterior. O pulso emitido pelo gerador propaga-se até a carga através do cabo coaxial, onde é refletida de volta. Através de uma conexão do tipo T o ponto onde o gerador é conectado ao cabo está simultaneamente conectado ao canal A de um osciloscópio. Quando há essa opção, pode-se usar um gerador de sinais do próprio osciloscópio, que é o caso do modelo Agilent InfiniiVision modelo DSO-X2002A 70 MHz e 2GSa/s, utilizado nesse trabalho. É importante que a impedância do gerador esteja casada ao cabo, para evitar reflexões no ponto de entrada do sinal. Tipicamente os geradores de sinal tem impedância de  $50 \Omega$  e por esse motivo optamos por um cabo coaxial de  $Z_0 = 50 \Omega$ . No canal A do osciloscópio podemos ver tanto o pulso incidente quanto o pulso refletido, que propaga-se da carga até o ponto de conexão com o gerador. Observe que a visualização do início do pulso refletido tem um atraso de tempo  $\Delta t = 2l/v$  na tela do osciloscópio, em relação ao início do pulso incidente, correspondendo ao tempo necessário para o pulso incidente propagar a distância  $l$  do gerador à carga, com velocidade  $v$  e um tempo igual para o pulso refletido fazer o caminho de volta. Se o atraso  $\Delta t$  é maior do que a duração do pulso incidente  $T$ , é possível visualizar o pulso refletido nitidamente separado do pulso incidente. No caso em que  $\Delta t < T$  a duração do pulso incidente é maior do que o atraso e em  $z = 0$  os dois pulsos passam a interferir uma vez que o sinal visualizado na tela do osciloscópio é a tensão  $V(0, t)$  resultante da soma dos pulsos incidente e refletido, conforme a equação

$$V(0, t) = V_0^+(t) + V_0^-(t), \quad (54)$$

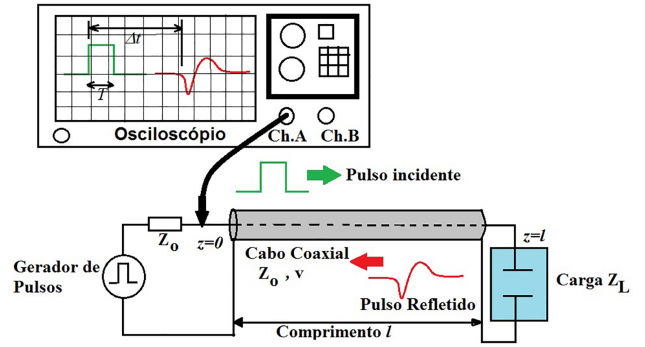


Figura 10 - Aparato Experimental para Medida de Refletometria no Domínio do Tempo.

As Figs. 11 e 12 ilustram as situações em que  $\Delta t > T$  e  $\Delta t < T$ , respectivamente. Somente no caso em que  $\Delta t > T$  o uso da técnica de refletometria no domínio do tempo sem o uso de um dispositivo específico capaz de separar a onda incidente da onda refletida é possível. Portanto é preciso configurar o aparato experimental para que o pulso incidente tenha duração  $T$  menor do que  $\Delta t$ , ou seja,  $T < 2l/v$ , fazendo possível a separação visual na tela do osciloscópio entre o pulso incidente e o pulso refletido.

Admitindo agora que  $T < \Delta t$  para permitir o uso da técnica, sabemos que no domínio do tempo a onda de tensão do pulso incidente  $V_0^+(t)$  e do pulso refletido  $V_0^-(t)$ , observados no ponto onde o gerador de pulso é conectado, estão relacionadas ao domínio da frequência pela transformada de Fourier mostrada abaixo

$$V_0^+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0^+(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} V_0^-(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0^-(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (56) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_0(\omega) V_0^+(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Uma vez realizada a medida experimental, podemos salvar os dados de  $V(t)$  em  $z = 0$  utilizando um osciloscópio digital. A separação de  $V(t)$  nas componentes incidente  $V_0^+(t)$  e refletida  $V_0^-(t)$  pode ser feita matematicamente, multiplicando  $V(t)$  por funções de Heaviside  $\Theta[\pm(t - t_0)]$ , onde  $t_0$  é escolhido visualmente em uma região do eixo temporal entre o pulso incidente e o pulso refletido para o qual  $V(t) = 0$ , tal que  $V_0^+(t) = \Theta(t_0 - t)V(t)$  e  $V_0^-(t) = \Theta(t - t_0)V(t)$ . Após separadas as componentes incidente e refletida no domínio do tempo é fácil obter o espectro através das transformadas de Fourier

$$V_0^+(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0^+(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (57)$$

$$V_0^-(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0^-(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (58)$$

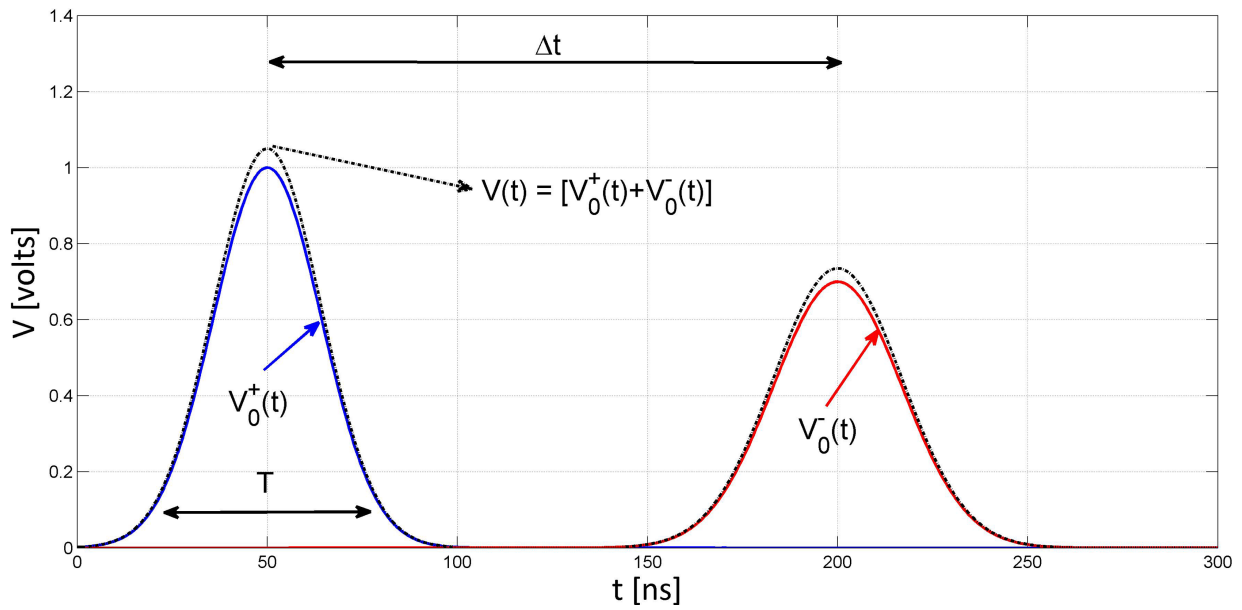


Figura 11 - Tensão resultante da superposição do pulso incidente e do pulso refletido,  $V(t) = V_0^+(t) + V_0^-(t)$  em  $z = 0$  no caso em que a duração do pulso incidente  $T$  é menor que o atraso de propagação  $\Delta t$  do pulso refletido. No gráfico a tensão resultante foi multiplicada por um fator 1,05 apenas para facilitar a visualização, uma vez que ela coincide exatamente com a onda incidente para tempos anteriores à chegada do pulso refletido, e com a onda refletida, depois que o pulso incidente já terminou.

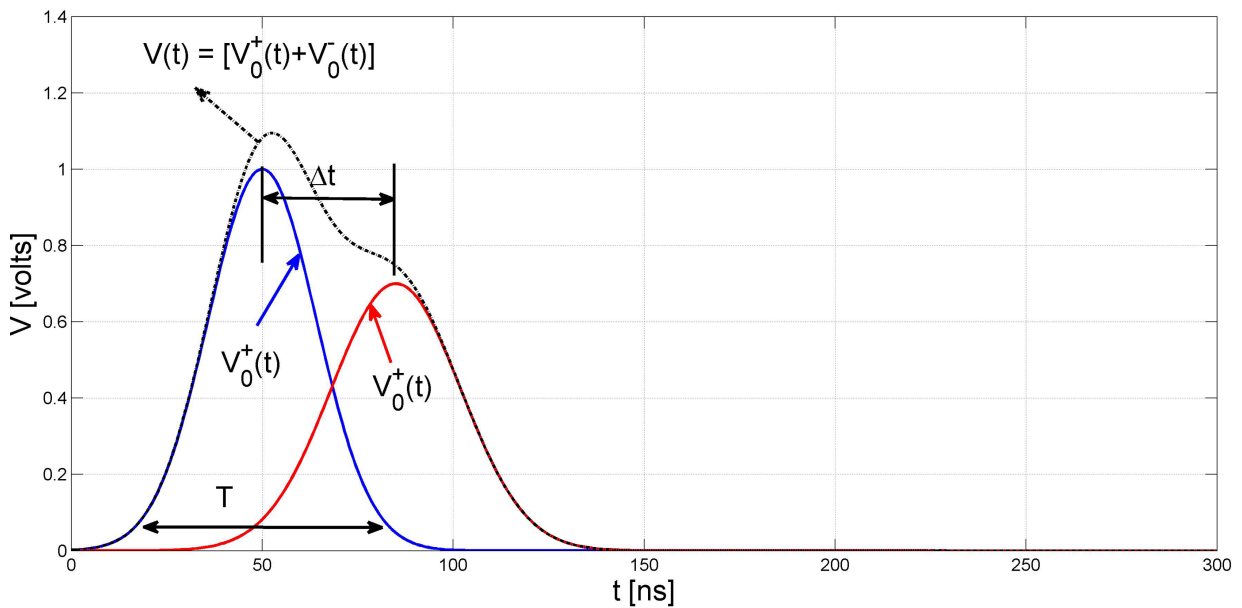


Figura 12 - Tensão resultante da superposição do pulso incidente e do pulso refletido,  $V(t) = V_0^+(t) + V_0^-(t)$  em  $z = 0$  no caso em que a duração do pulso incidente  $T$  é maior do que o atraso de propagação  $\Delta t$  do pulso refletido. Nesse caso não há como separar o pulso refletido da onda incidente, uma vez que na tela do osciloscópio vemos apenas a resultante da superposição.

Tendo o espectro da onda incidente e refletida, podemos calcular  $\Gamma_0(\omega) = V_0^-(\omega)/V_0^+(\omega)$  e finalmente a impedância de carga  $Z_L(\omega)$  através da Eq. (53). Conforme mencionado acima, a impedância de carga é simplesmente um capacitor preenchido com o material que se quer caracterizar, de tal forma que

$$Y_L(\omega) = \frac{1}{Z_L} = G(\omega) + i\omega C(\omega) = [\sigma(\omega) + i\omega\epsilon_1(\omega)] F_g, \quad (59)$$

onde  $F_g$  novamente define o fator geométrico,  $\sigma(\omega)$  é

a condutividade do material e  $\varepsilon_1(\omega)$  é a parte real da permissividade dielétrica complexa.

A montagem experimental realizada nesse trabalho para caracterizar materiais baseou-se no uso de um cabo coaxial de comprimento  $l = 13$  m (medido utilizando uma fita métrica) e impedância característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , cujo dielétrico interno é o polietileno, com  $\varepsilon_1 = 2,25\varepsilon_0$ , o que resulta em uma velocidade de propagação das ondas  $v = 2 \times 10^8$  m/s, independente da frequência. Nesse caso o limite de largura de pulsos que podemos aplicar para ainda podermos separar o pulso incidente do refletido é dado por  $T < 2l/v = 130$  ns. O limite inferior do gerador disponível no próprio osciloscópio é  $T = 20$  ns, o que permite a realização de medidas com  $20 \text{ ns} < T < 130$  ns. Com a finalidade de confirmar os parâmetros do cabo, foram realizados testes com  $Z_L = 0$ , ou seja, terminação curto-circuitada, que produz um pulso refletido invertido mas de mesmo módulo,  $Z_L = \infty$ , que corresponde a terminação em circuito aberto, que produz um pulso refletido apenas deslocado em relação ao pulso incidente, e  $Z_L = 50 \Omega$ , que não deve produzir reflexão. Nos casos de curto-circuito ou circuito aberto é possível também perceber se há atenuação significativa ou algum efeito de dispersão do sinal. A Fig. 13 ilustra uma dessas medidas com a terminação em circuito aberto, para confirmar os dados do fabricante. Notamos que a dispersão é desprezível porque a largura do pulso incidente é igual à do pulso refletido, enquanto a atenuação no cabo foi desprezada, para fins de simplicidade dos cálculos, porque

a amplitude do pulso refletido foi apenas ligeiramente menor ( $< 5\%$ ) e pode ser devida a ruído na aquisição de dados.

Na sequência realizamos a caracterização da mesma placa de circuito impresso cujo dielétrico é o material FR-4 [15], com fator geométrico  $F_g = 33$  m, informação que foi utilizada nos cálculos da permissividade dielétrica complexa, conforme Eq. (59). Os dados experimentais, convertidos em um arquivo .dat foram processados através do software Matlab, disponível nos laboratórios de informática da UFPR. Através do valor médio obtido para  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 4,68$  e considerando  $\sigma = 0$ , criamos um modelo da placa, considerada um capacitor C ideal, e realizamos uma simulação de  $V_0^-(t)$ , simplesmente integrando a Eq. (57) numericamente, considerando a função espectral  $V_0^+(\omega)$  obtida através da transformada de Fourier da função  $V_0^+(t)$  medida experimentalmente e  $\Gamma_0(\omega)$  calculada teoricamente para um capacitor  $C = \varepsilon_1 F_g = 1,38$  nF. Os resultados são mostrados nas Figs. 14 e 15 e podemos ver uma boa concordância entre a função  $V_0^-(t)$  medida experimentalmente e o valor simulado considerando-se a placa um capacitor ideal. O valor medido de condutividade, mostrada na Fig. 15 em função da frequência, não pode ser considerado confiável, uma vez que a condutividade está associada à perda de energia do pulso refletido, mas vê-se claramente que há um grande ruído no valor determinado experimentalmente para  $V_0^-(t)$ , e região final do pulso refletido apresenta problemas provavelmente associados à amostragem do osciloscópio.

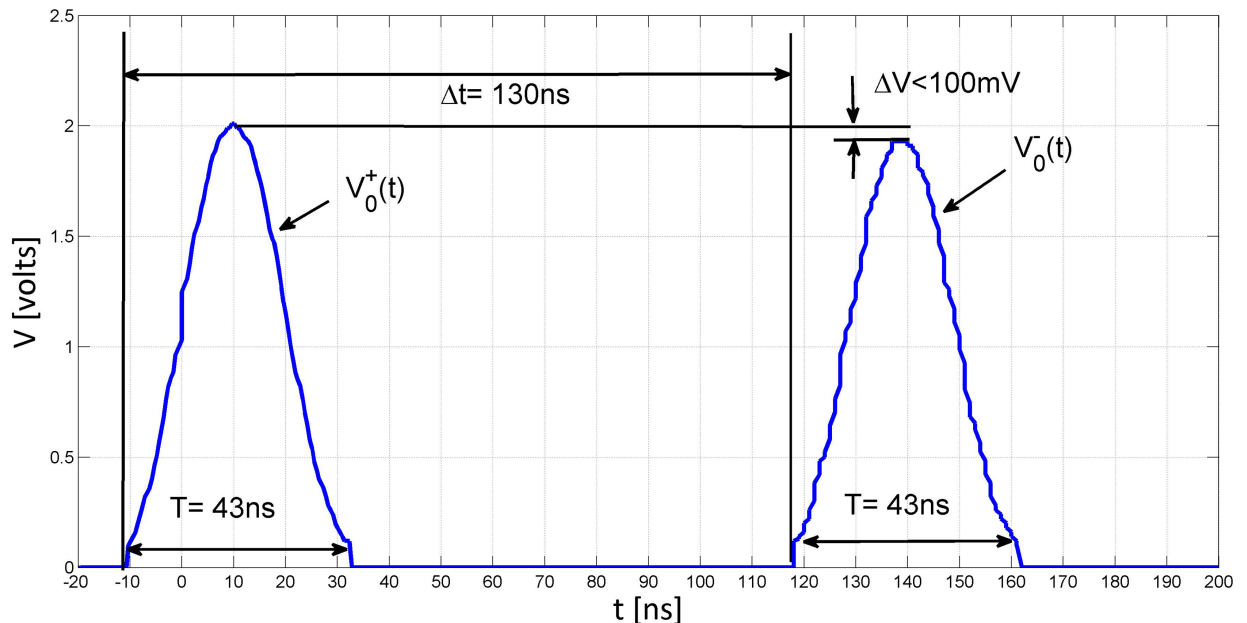


Figura 13 - Pulso incidente de largura  $T \approx 43$  ns, e refletido por uma terminação em circuito aberto, em um cabo coaxial de  $l = 13$  m e  $Z_0 = 50 \Omega$ . Podemos ver que o atraso vale aproximadamente  $\Delta t = 130$  ns, o que permite calcular a velocidade de propagação  $v = 2l/\Delta t = 2 \times 10^8$  m/s, confirmando as informações do fabricante. Além disso, o pulso refletido tem praticamente a mesma largura do pulso incidente e a amplitude difere menos do que 5%.

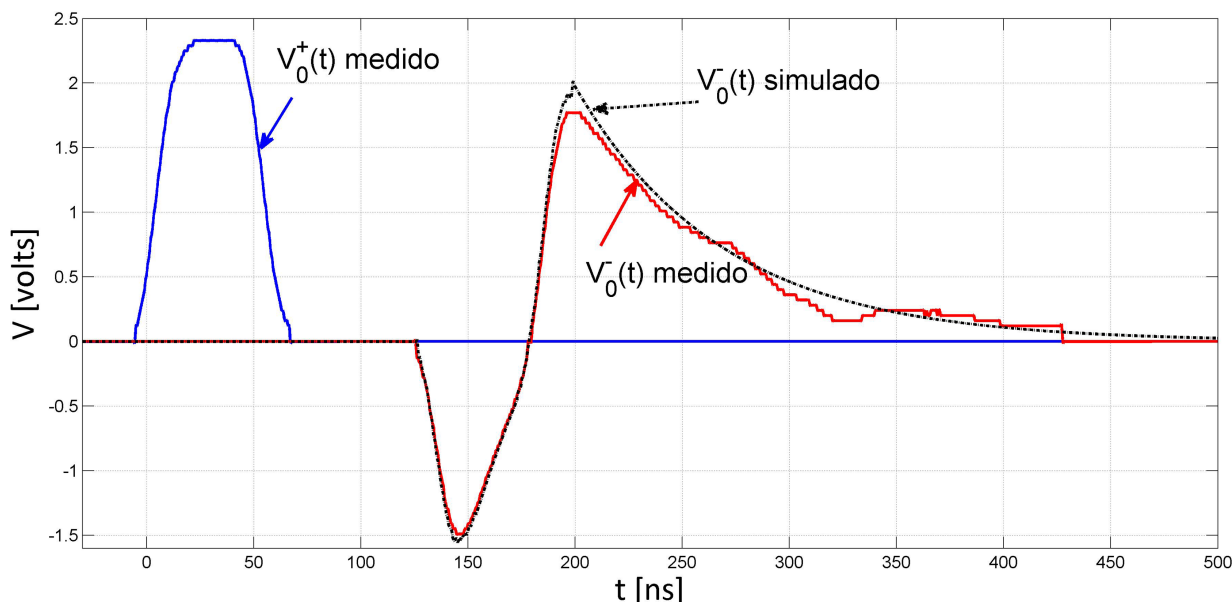


Figura 14 - Caracterização experimental de uma placa de FR-4. São mostrados os valores medidos para o pulso incidente  $V_0^+(t)$  e refletido  $V_0^-(t)$ , bem como a função  $V_0^-(t)$  simulada, modelando a placa como um capacitor ideal sem perdas. A largura do pulso incidente é maior do que 50 ns.

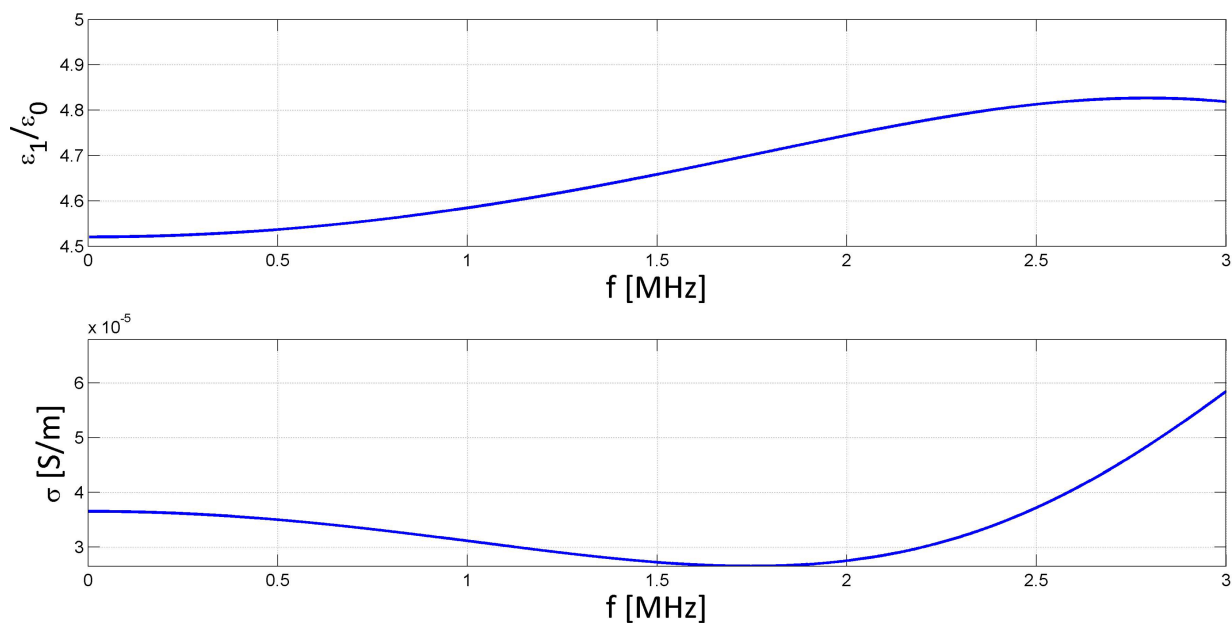


Figura 15 - Parte real da permissividade dielétrica complexa relativa,  $\epsilon_1/\epsilon_0$  e condutividade  $\sigma$  em função da frequência para o material FR-4. O valor médio de permissividade dielétrica relativa é aproximadamente 4,68. Todavia a nossa medida de condutividade não é confiável, porque há ruído, sobretudo ao final da medida do pulso refletido e o erro no valor de  $\sigma$  pode ser maior do que o valor absoluto.

Finalmente foram realizadas medidas das propriedades dielétricas da água. Como se sabe, a condutividade da água varia grandemente em função da concentração de íons. Para realizar tal medida utilizamos um capacitor de placas paralelas com as dimensões de área  $A = 14 \times 10 \text{ cm}^2$  e separação entre as placas  $d = 0,5 \text{ cm}$ , o que produz um fator geométrico de aproximadamente  $F_g = 2,8 \text{ m}$ . Uma fotografia do aparato experimental

utilizado nessa medida é apresentada na Fig. 16.

Os resultados para medida da permissividade dielétrica complexa da água são mostrados nas Figs. 17 e 18. Na Fig. 17, o gráfico do pulso incidente e refletido, que é visualizado na tela do osciloscópio e salvo na forma de dados em um pendrive está ilustrado, e o pulso refletido é comparado ao pulso refletido esperado considerando-se os dados de permissividade dielétrica

da água encontrados na literatura,  $\epsilon_1/\epsilon_0 \sim 80$ . Observe o leitor que os dados experimentais são bastante similares ao que é previsto pela teoria, ou seja, as curvas são bastante coincidentes. Na Fig. 18 a parte real da permissividade dielétrica, bem como a condutividade da amostra de água utilizada são mostradas em função da frequência. É importante ressaltar que a permissividade da água varia de acordo com a temperatura. No dia em que foram realizadas as medidas a temperatura da água era de aproximadamente  $20^\circ\text{C}$ . Obtivemos um valor médio  $\epsilon_1/\epsilon_0 \approx 78,5$ . Os resultados experimentais aqui obtidos para a parte real da permissividade dielétrica complexa são concordantes com aqueles apresentados na literatura corrente [17]. O valor da condutividade apresenta incertezas quanto ao seu valor porque não conhecemos a concentração de íons presentes.

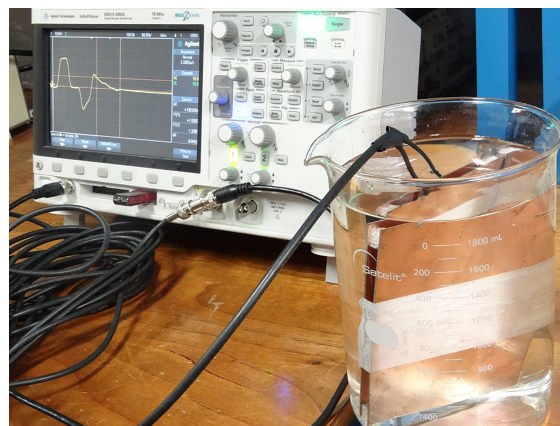


Figura 16 - Montagem experimental utilizada para a caracterização da permissividade dielétrica da água. A tela do osciloscópio ilustra uma resposta típica obtida.

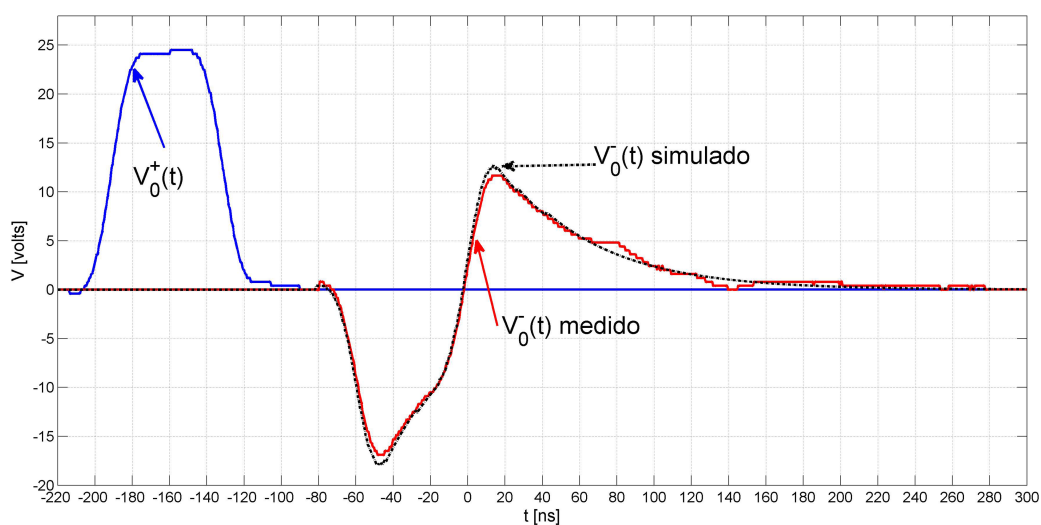


Figura 17 - Caracterização experimental da água. São mostrados os valores medidos para o pulso incidente  $V_0^+(t)$  e refletido  $V_0^-(t)$ , bem como a função  $V_0^-(t)$  simulada, modelando a água através dos valores médios de permissividade dielétrica e condutividade obtidos na medida.

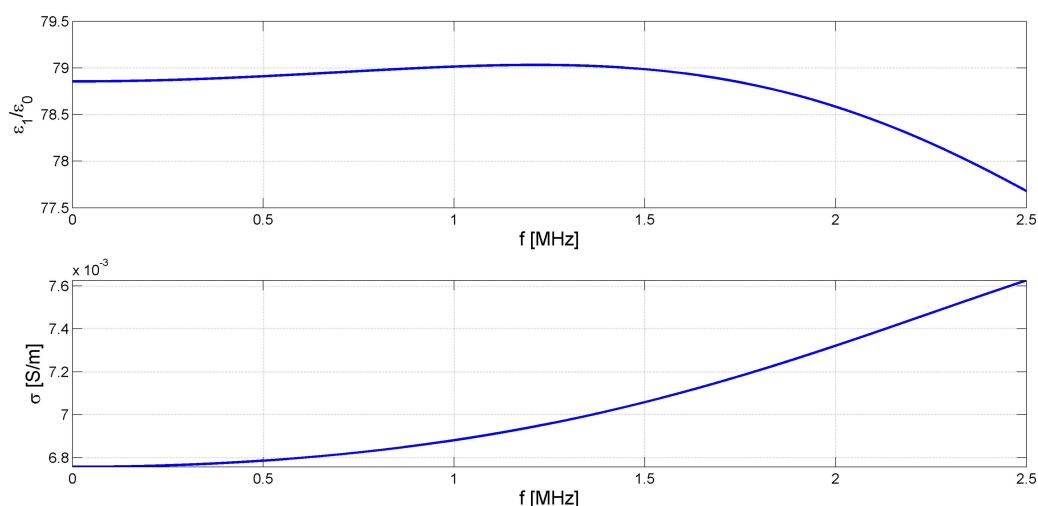


Figura 18 - Parte real da permissividade dielétrica complexa relativa,  $\epsilon_1/\epsilon_0$  e condutividade  $\sigma$  em função da frequência para a água. O valor médio de permissividade dielétrica relativa é aproximadamente 78,5. A medida de condutividade não é totalmente confiável, mas fica na faixa de  $\sigma = 7 \times 10^{-3}$  S/m.

## 5. Conclusões

Sumarizando, neste trabalho discutimos de maneira detalhada aspectos teóricos da permissividade dielétrica, bem como apresentamos dois métodos experimentais simples que podem ser empregados no espectro de RF, a saber: i) o método do circuito RC, onde é possível através do uso de um osciloscópio, medir a capacitância de um capacitor preenchido pelo material que se quer caracterizar e ii) a técnica de refletometria no domínio do tempo. O método do circuito RC é limitado a frequências mais baixas onde são ainda válidas as leis da teoria de circuitos elétricos, ou seja, para situações em que as dimensões do aparato construído sejam muito menores do que o comprimento de onda  $\lambda$  utilizado na caracterização. Por outro lado, a técnica de refletometria pode ser utilizada numa escala de frequências muito maior, bastando haver os instrumentos de medida e geração de pulsos apropriados. Tendo em vista limitações comuns de laboratórios didáticos, focamos as medidas pela técnica de refletometria no uso de pulsos não tão curtos, de largura maior do que 20 ns, o que significa larguras de banda da ordem de 10 MHz. Através de ambas as técnicas foi caracterizado o material dielétrico FR-4, utilizado na confecção de circuitos impressos e cujo valor de permissividade dielétrica relativa é aproximadamente 4,8. Em ambas as técnicas de medida os valores ficaram próximos desse valor. Finalmente, utilizando a técnica de refletometria a água foi caracterizada, e obtivemos bons resultados para a parte real da permissividade dielétrica. O caso da água é emblemático, pois a sua condutividade depende muito da quantidade de impurezas e íons livres. Do ponto de vista didático, pudemos apresentar a conexão entre conceitos teóricos do eletromagnetismo com a prática experimental.

## Agradecimentos

C.A. Dartora agradece ao CNPq pelo suporte financeiro parcial através de Bolsa de Produtividade em Pesquisa Nível 2. A. Heilmann agradece ao SIMEPAR e à FACEAR pelo fomento às práticas experimentais e teóricas. Os autores agradecem o revisor anônimo por suas valiosas contribuições e sugestões para a forma final deste trabalho.

## Referências

- [1] Matthew N.O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo* (Bookman Editora, Porto Alegre, 2012), 5<sup>a</sup> ed.
- [2] William H. Hayt Jr., *Eletromagnetismo* (Editora McGraw-Hill Interamericana, São Paulo, 2008), 7<sup>a</sup> ed.
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1982), 1<sup>a</sup> ed.
- [4] Carl H. Durney and C.C. Johnson, *Introduction to Modern Electromagnetics*, (McGraw-Hill, New York, 1982).
- [5] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1998), 3rd ed.
- [6] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Solid State Physics* (Cengage Learning, Belmont, 1976), 1st. ed.
- [7] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, New York, 2004), 8th ed.
- [8] John S. Toll, *Physical Review* **104**, 1760 (1956).
- [9] R. de L. Kronig, *J. Opt. Soc. Am.* **12**, 547 (1926).
- [10] H.A. Kramers, *Atti Cong. Intern. Fisici*, (Transactions of Volta Centenary Congress) *Como* **2**, 545 (1927).
- [11] W.C. Tan, K. Koughia, J. Singh and S.O. Kasap, "Fundamental Optical Properties of Materials I", in *Optical Properties of Condensed Matter and Applications*, edited by J. Singh (John Wiley & Sons, Nova Jersey, 2006).
- [12] C.K. Alexander and M.N.O. Sadiku, *Fundamentos de Circuitos Elétricos* (Bookman Editora, Porto Alegre, 2003).
- [13] William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly, Steven M. Durbin, *Análise de Circuitos em Engenharia* (McGraw-Hill, São Paulo, 2008).
- [14] David E. Johnson, John L. Hilburn and Johnny R. Johnson, *Fundamentos de análise de circuitos elétricos* (Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1994).
- [15] A.R. Djordjevi, R.M. Biljic, V.D. Likar-Smiljanic and T.K. Sarkar, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **43**, 662 (2001).
- [16] A.M. Nicolson, and G.F. Ross, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-19**, 377 (1970).
- [17] C.G. Malmberg and A.A. Maryott, *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **56**, 2641 (1956).