

# Desvendando a radiação Hawking

## Unraveling Hawking radiation

Natali Soler Matubaro de Santi<sup>\*1</sup>, Raphael Santarelli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Física, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 8 de Novembro de 2018. Revisado em 21 de Janeiro de 2019. Aceito em 25 de Janeiro de 2019

Buracos negros clássicos, descritos pela relatividade geral, podem absorver partículas, mas não podem emití-las. Entretanto efeitos quânticos fazem com que buracos negros passem a emitir partículas e comportem-se como um corpo com temperatura diretamente proporcional a  $\kappa$ , a gravidade superficial do buraco negro em questão. Este artigo tem o objetivo de desvendar a radiação Hawking, para o colapso esféricamente simétrico, servindo de motivação e apoio para estudos introdutórios em teoria quântica de campos em espaços curvos.

**Palavras-chave:** radiação Hawking, relatividade geral, teoria quântica de campos em espaços curvos.

In the classical theory of general relativity black holes can only absorb and not emit particles. However it is shown that quantum mechanical effects cause black holes to create and emit particles as if they were hot bodies with temperature proportional to  $\kappa$ , the surface gravity of the black hole. This paper has the main goal to unraveling Hawking radiation, for spherically symmetric collapse, serving as motivation and support to introductory studies in quantum field theory in curved space-times.

**Keywords:** general relativity, Hawking radiation, quantum field theory in curved spaces.

## 1. Introdução

Até o presente momento não temos uma teoria quântica da gravitação, ou seja, uma descrição quantizada dos efeitos gravitacionais. Entretanto, esforços incontáveis, desde a década de 70, criaram o que chamamos de teoria quântica de campos em espaços curvos (TQCEC) [1–9]. Ela é considerada uma teoria suplente para o que esperamos de uma teoria quântica da gravitação, pois é entendida como uma junção entre a teoria quântica de campos (TQC) e a relatividade geral (RG), considerando os campos de matéria quantizados sobre o espaço-tempo que atua como “pano de fundo”, ou seja, a gravitação continua sendo descrita pela RG, mas os campos de matéria considerados são quânticos, descritos pela TQC<sup>1</sup>. Essa teoria prevê uma série de fenômenos extremamente interessantes, não intuitivos e muitas vezes intrigantes. Fenômenos estes como o efeito Unruh [11], a criação de partículas devido à expansão do universo [12], o fenômeno dos espelhos acelerados [13] e a própria radiação Hawking [14].

Em 1975 Stephen William Hawking publicou seu emblemático artigo “Particle Creation by Black Holes” [14]. Podemos dizer que o mesmo causou um grande rebulhão científico na época porque unia três diferentes áreas da física, a TQC, a RG e a termodinâmica clássica, consoli-

dando a TQCEC e a termodinâmica de buracos negros. Vale dizer que, antes do trabalho de Hawking, a termodinâmica de buracos negros existia apenas como uma “teoria especulativa”. Isso porque, uma série de trabalhos já apontavam *semelhanças* (e nada mais) entre as grandezas observáveis dos buracos negros e suas leis com as grandezas e leis da termodinâmica clássica, mantendo todos os aspectos relativos a recém teoria clássica de buracos negros, como a referência [15]. Já o artigo [16] de Jacob David Bekenstein, tido como o “pai da termodinâmica de buracos negros”, postulava que buracos negros possuíam entropia e, portanto, deveriam possuir temperatura, porém não fornecia uma razão física para tal. Assim, a radiação Hawking contraria a ideia clássica de que buracos negros são objetos passivos, no sentido de apenas absorverem matéria e nunca emití-la, mostrando que os mesmos emitem partículas assintoticamente no futuro, e, portanto, possuem temperatura e entropia. Para uma extensiva revisão histórica da radiação Hawking e da termodinâmica de buracos negros veja a referência [17].

O objetivo do presente artigo é desvendar a radiação Hawking da maneira mais simples possível, servindo como um primeiro contato para os interessados em TQCEC e para professores que queiram utilizá-lo como um tópico além do conteúdo padrão de cursos como de TQC ou de RG (para outras leituras introdutórias veja as referências [4, 5, 18–21]). Com esse intuito, na seção 2 vamos fazer um breve apanhado sobre RG, de tópicos que nos serão úteis no tratamento em TQCEC, como o espaço-tempo de Schwarzschild e o colapso esféricamente

\*Endereço de correspondência: natalidesanti@gmail.com.

<sup>1</sup>Veja que, por definição, a TQCEC não se propõe a explicar fenômenos abaixo dos comprimento e tempo de Planck ou mesmo acima da energia de Planck. Para mais informações sobre a dedução da escala de Planck, ver referência [10].

simétrico. Na seção 3 vamos lidar com o campo de Klein-Gordon, sua motivação, solução clássica e quantização no espaço-tempo plano. Ainda nessa seção introduziremos o formalismo da TQCEC. Finalmente na seção 4 apresentaremos a dedução da radiação Hawking até chegarmos na temperatura de buracos negros de Schwarzschild. Fecharemos este artigo com algumas discussões acerca do desenvolvimento teórico escolhido, da temperatura dos buracos negros de Schwarzschild, a possível evaporação dos mesmos e de experimentos análogos à radiação Hawking. Veja que, no decorrer do texto, utilizamos as unidades de Planck, ou seja, definimos as constantes fundamentais: velocidade da luz  $c$ , constante universal da gravitação  $G$ , constante de Planck reduzida  $\hbar = h/2\pi$  e constante de Boltzmann  $k_B$  como valendo 1. Retomamos as mesmas quando conveniente.

## 2. Tópicos de relatividade geral

Para entendermos a radiação Hawking precisamos de uma introdução à RG. Na presente seção fornecemos os principais tópicos de RG que nortearão estudos daqueles que não os possuem, além de fazermos uma visão geral do problema abordado nas próximas seções. O leitor que quiser fazer um estudo mais profundo destes, e de outros tópicos em RG, pode fazer uso das seguintes referências [18, 22–26]. Observe que esperamos um conhecimento prévio de relatividade especial (RE) e que, sobre todos os índices repetidos “em cima” e “em baixo”, consideramos a convenção da soma de Einstein.

### 2.1. A solução de Schwarzschild

Em 1916 Karl Schwarzschild desenvolveu a primeira solução [27] para as equações de Einstein. Essa solução descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto massivo, estático, com simetria esférica, sem rotação, sem carga elétrica no vácuo e é resultado do teorema de Birkhoff [18, 19, 22]. Ela pode ser expressa como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

sendo  $M$  a massa do objeto massivo,  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  as coordenadas esféricas usuais. É importante notar que temos 4 vetores de Killing<sup>2</sup>, sendo que um deles é associado à simetria temporal e pode ser escrito como  $K = \partial_t$ .

<sup>2</sup>Vetores de Killing estão associados à simetrias de translação do espaço-tempo e são definidos pela equação de Killing

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0. \quad (2)$$

Sua representação em coordenadas fica  $K^\mu = (\partial_\nu)^\mu = \delta_\nu^\mu$  e, fisicamente, eles representam a noção de conservação de quantidades físicas, como de energia  $E = -t_\mu (\partial_t)^\mu$  (quando associados à simetria temporal) ou de momento angular  $L = t_\mu (\partial_\phi)^\mu$  (quando associados à simetria de rotação), sendo  $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  o vetor tangente à geodésicas afinamente parametrizadas por  $\lambda$ . Note que as geodésicas representam a noção de trajetórias em RG e são dadas

Ao tomarmos valores de  $r = 0$  ou  $r = 2M$  a métrica (ver equação (1)) diverge. Para analisarmos essa divergência, podemos calcular o escalar associado à curvatura da métrica de Schwarzschild por meio do tensor de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Desse modo,

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (4)$$

sendo  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \infty$  para  $r = 0$  e  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{3}{4M^4}$  para  $r = 2M$ . Portanto, para  $r = 0$  temos uma *singularidade*, dado que  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$  diverge e para  $r = 2M$  temos uma *singularidade removível*, ou seja, inerente ao sistema de coordenadas utilizado, porque  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$  é finito. Além disso,  $r = 2M$  é conhecido como *raio de Schwarzschild*. Esses valores de  $r$  foram o ponto de partida para a teoria clássica de buracos negros [28].

Vamos agora apresentar dois sistemas de coordenadas convenientes para reescrevermos a métrica de Schwarzschild de modo a removermos sua singularidade removível  $r = 2M$ : as coordenadas de Eddington-Finkelstein e de Kruskal-Szekeres.

#### 2.1.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

As coordenadas de Eddington-Finkelstein são obtidas requerendo-se geodésicas nulas, ou seja,  $ds^2 = 0$ . Em vez de apenas lidarmos com o elemento de linha nulo, por questões de resultados posteriores (ver subseção 4.2), vamos fazer uso das simetrias da métrica (ver equação (1)) [6]. Inicialmente vamos requerer a conservação da energia  $E \equiv -t_\mu (\partial_t)^\mu$  e do momento angular  $L \equiv t_\mu (\partial_\phi)^\mu$  para essas geodésicas. As mesmas serão dadas sob um plano definido por  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Como queremos as geodésicas nulas, usamos o fato de que seu vetor tangente é nulo ( $t^\mu t_\mu = 0$ ), então

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}. \quad (5)$$

Restringindo-nos à geodésicas nulas radiais temos  $L = 0$ , bem como  $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$ , de forma que a equação (5) fica

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}. \quad (6)$$

De onde podemos definir a *coordenada tartaruga*  $r_*$  tal que

$$\frac{dr_*}{d\lambda} \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\lambda}, \quad (7)$$

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (8)$$

por

$$t^\nu \nabla_\nu t^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (3)$$

onde  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$  é o *símbolo de Christoffel* [18, 22].

Como  $r \in (2M, \infty)$ , temos  $r_* \in (-\infty, \infty)$  já que  $\lim_{r \rightarrow 2M} r_* \rightarrow -\infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} r_* \rightarrow \infty$ .

Assim, a integração da equação (6), substituindo  $\frac{dr}{d\lambda}$  por  $(1 - \frac{2M}{r}) \frac{dr_*}{d\lambda}$ , em  $t$  e  $r_*$ , leva as geodésicas nulas radiais que são escritas como

$$t = \pm r_* + \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} u = t - r_* \\ v = t + r_* \end{cases}, \quad (9)$$

válidas nos intervalos  $u, v \in (-\infty, \infty)$ . As coordenadas  $(u, v)$  são conhecidas como *coordenadas tartaruga do cone de luz*. Podemos reescrever o elemento de linha de Schwarzschild, ver equação (1), em cada uma dessas coordenadas, no lugar de  $t$ , como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (11)$$

Dessa forma, não há divergências em  $r = 2M$ .

### 2.1.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Vimos que, usando as coordenadas  $u$  e  $v$  definidas na equação (9), conseguimos reescrever a métrica de Schwarzschild removendo a singularidade  $r = 2M$ , de duas formas distintas. As *coordenadas de Kruskal-Szekeres* permitem reescrever a métrica de Schwarzschild com apenas uma representação sem a singularidade em  $r = 2M$ , formando o que é chamado de *espaço-tempo de Schwarzschild estendido*<sup>3</sup> [5, 18, 19, 22, 23]. Para isso, temos que reescrever a equação (1), mantendo essa singularidade e fazendo uso das coordenadas  $(u, v, \theta, \phi)$  como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (12)$$

sendo  $r = r(u, v)$ , pois  $r_* = (v - u)/2$ . Tomando a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} U = -e^{-u/4M} \\ V = e^{v/4M}, \end{cases} \quad (13)$$

válida portanto para  $r > 2M$ , com os intervalos  $U \in (-\infty, 0)$  e  $V \in (0, \infty)$ , reescrevemos a métrica (ver equação (12)) como

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dUdV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (14)$$

<sup>3</sup>Para uma visão simplificada, porém com detalhes para a dedução das coordenadas de Kruskal-Szekeres, ver referência [29].

sendo agora  $r = r(U, V)$ , definido implicitamente por  $UV = (1 - \frac{r}{2M}) e^{\frac{r}{2M}}$ .

Vale notar que, definindo coordenadas tipo tempo  $T$  e tipo espaço  $R$  de acordo com

$$\begin{cases} U = T - R \\ V = T + R, \end{cases} \quad (15)$$

podemos reescrever a métrica, da equação (14), da forma

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (16)$$

sendo agora  $r = r(T, R)$ , definido implicitamente por  $T^2 - R^2 = (1 - \frac{r}{2M}) e^{\frac{r}{2M}}$ . Note que  $R \in (-\infty, \infty)$  e  $T^2 < R^2 + 1$ . As coordenadas  $(T, R, \theta, \phi)$  são conhecidas como as *coordenadas de Kruskal-Szekeres* e as coordenadas nulas  $(U, V)$  são suas *coordenadas do cone de luz*.

Uma boa forma de visualizar causalmente o espaço-tempo de Schwarzschild estendido é por seu *diagrama de Penrose*<sup>4</sup>. Para montar esse diagrama precisamos da seguinte mudança de coordenadas

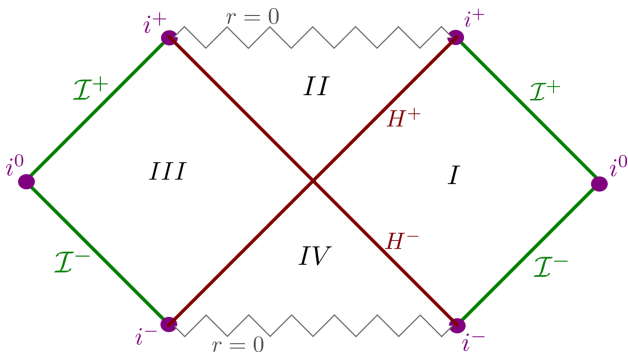
$$\begin{cases} \tilde{U} = \tanh U \\ \tilde{V} = \tanh V \end{cases}, \quad (17)$$

com  $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e elemento de linha  $d\tilde{s}^2 = \Omega^2(\tilde{U}, \tilde{V}) g_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$ , tal que  $\Omega^2(\tilde{U}, \tilde{V}) = \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V}$ . Escolhendo

$$\begin{cases} \tilde{U} = \eta - \chi \\ \tilde{V} = \eta + \chi \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta = \frac{(\tilde{U} + \tilde{V})}{2} \\ \chi = \frac{(\tilde{V} - \tilde{U})}{2} \end{cases}, \quad (18)$$

temos o *diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido* plotando  $\eta \times \chi$ , que pode ser visto na figura 1. O mesmo possui a interpretação de suas regiões *I, II, III e IV*, sendo *I* a região exterior ao buraco negro, *II* o buraco negro em questão, ou seja, uma região a partir da qual nada, nem mesmo a luz consegue escapar<sup>5</sup>, *III* uma região “espelho” ao exterior do buraco negro (*I*) mas não conectada causalmente com a mesma e *IV* um buraco branco, ou seja, o oposto de um buraco negro, no sentido que nada consegue adentrar em tal região. Nesse diagrama geodésicas tipo luz/nulas são representadas por superfícies com  $\pm 45^\circ$  com relação a vertical e geodésicas tipo tempo possuem extremos em  $i^\pm$  ou terminam na singularidade  $r = 0$ .

<sup>4</sup>Um *diagrama de Penrose* é uma representação compacta e finita de um espaço-tempo infinito. Eles são construídos por meio de uma transformação conforme. Essa transformação é definida tal que a métrica resultante da transformação  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  esteja relacionada com a métrica original  $g_{\mu\nu}$  da forma  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$ , tal que  $\Omega(x)$  seja uma função suave e  $\Omega(x) \neq 0, \forall x$ . Esses diagramas são delimitados por superfícies e pontos de extremo. As superfícies são nulas e são chamadas *infinitos futuro e passado nulos*  $\mathcal{I}^\pm$ . Para os pontos temos os *infinitos futuro/passado tipo tempo*  $i^\pm$  que representam



**Figura 1:** Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild estendido: representação nas coordenadas de Kruskal-Szekeres.

### 2.2. Buracos Negros

Muito embora a RG tenha se estabelecido em 1915 com as equações de Albert Einstein [30], o conceito de buraco negro se estabeleceu muito mais tarde, apenas na década de 60, com a interpretação do raio de Schwarzschild  $r = 2M$  como raio do horizonte de eventos  $H^+$  [28]. Até então eram tratados como uma “curiosidade matemática” da teoria, sem significado físico. Com os avanços obtidos nos estudos astrofísicos, especialmente na questão do estágio final (morte) das estrelas e com a detecção dos pulsares (que nada mais são do que estrelas de nêutrons com rotação - e que também eram tratados como objetos irrealis), os buracos negros passaram a ser levados a sério, representando de fato objetos astronômicos. A década de 60 ficou conhecida como a *década de ouro* dos buracos negros.

Mais precisamente, um buraco negro representa a região a partir da qual nenhum sinal causal consegue atingir o infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$  e seu horizonte de eventos  $H^+$  representa a superfície que separa os pontos do espaço-tempo que estão conectados com o infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$  por uma curva tipo tempo dos que não estão [18, 22].

De forma geral, buracos negros são formados pelo colapso gravitacional estelar. Uma estrela pode ser pensada como uma estrutura que se sustenta pelo equilíbrio da pressão, devido a fusão nuclear de seus constituintes, com a força gravitacional. Quando a força gravitacional começa a ganhar dizemos que a estrela entra em estágio de colapso: o combustível nuclear se esgota. A partir daí a densidade da estrela aumenta consideravelmente de forma que, ao passar de um determinado ponto (o raio de Schwarzschild e seu então horizonte de eventos), o espaço-tempo fica tão distorcido que nada mais consegue escapar. Temos então um buraco negro [18, 22, 23].

Podemos utilizar a solução de Schwarzschild, ver equação (1), para descrever a região exterior ao *colapso esférica*

a coordenada temporal  $t \rightarrow \pm\infty$  com a coordenada espacial  $r = \text{cte}$  e o *infinito tipo espaço*  $i^0$  que representa a coordenada espacial  $r \rightarrow \pm\infty$  com a coordenada temporal  $t = \text{cte}$ .

<sup>5</sup>Por esse motivo a ideia da emissão de partículas por buracos negros “contradiz” a concepção clássica.

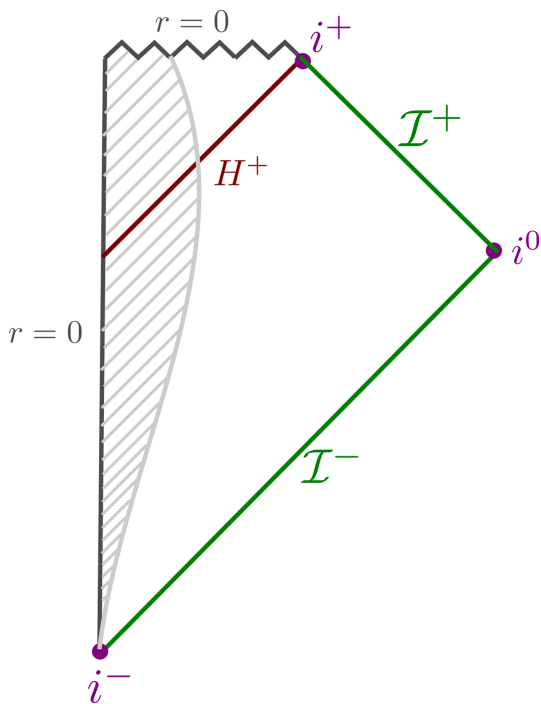
*mente simétrica* de uma estrela de massa  $M$ . O teorema de Birkhoff garante que o exterior de uma estrela em colapso esféricamente simétrico é descrito pela métrica de Schwarzschild, que é estática [18, 19, 22, 23]. É claro que o interior da estrela envolve uma dinâmica estelar interna extremamente complexa, porém não estamos preocupados em como essa dinâmica funciona. O que importa no mesmo é a solução do exterior da matéria em colapso e o momento a partir do qual, ao passar de um determinado ponto (o raio de Schwarzschild), temos a formação do horizonte de eventos  $H^+$  e então seu desenvolvimento temporal até a singularidade  $r = 0$ .

A representação do *colapso esféricamente simétrico* pode ser vista por meio do *diagrama de Penrose 2*, sendo a região do buraco negro representada acima do horizonte de eventos  $H^+$ , como região tal que todas as curvas causais que dela saem não alcançam o infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ . A ideia da representação de um espaço-tempo por meio de um diagrama de Penrose é visualizar de forma mais clara a *causalidade* do mesmo, ou seja, a forma a partir da qual eventos futuros são consequências de eventos passados. Por meio desses diagramas todo o futuro e o passado de um espaço-tempo podem ser previstos ou revistos a partir de condições iniciais dadas sob uma *superfície de Cauchy*  $\Sigma^6$ , ou seja, uma superfície tal que é interceptada exatamente uma única vez por uma curva causal. Um espaço-tempo que possui pelo menos uma superfície de Cauchy é chamado de um *espaço-tempo globalmente hiperbólico*, ou seja, é um espaço-tempo causalmente conectado. Na figura 2, o *infinito passado nulo*  $\mathcal{I}^-$  representa uma superfície de Cauchy mas o *infinito futuro nulo*  $\mathcal{I}^+$  não. Isso porque não há curvas causais que cruzem  $\mathcal{I}^+$  e também  $H^+$ , chegando ao buraco negro (ou seja, curvas tipo luz que saem de  $\mathcal{I}^-$  “preenchem” todo o espaço-tempo, já as que saem de  $\mathcal{I}^+$  não, pois deixam a região do buraco negro de fora). Dessa forma, temos uma superfície de Cauchy apenas se considerarmos  $\mathcal{I}^+ \cup H^+$  [18–20, 22, 23]. Essa análise será útil na seção 4.

### 3. Teoria quântica de campos em espaços curvos

Tal como na seção anterior, na primeira parte da presente seção fazemos um apanhado sobre a TQC, comentando sobre a equação de Klein-Gordon, sua visão campística e sua quantização no espaço-tempo plano. Para uma abordagem mais completa, ver referências [31–34]. Recomendamos a leitura dessa primeira parte para que o tratamento em espaços curvos, que desenvolveremos no final da presente seção, fique claro. Para mais detalhes sobre a TQCEC veja as referências [5–9].

<sup>6</sup>Uma *superfície de Cauchy*  $\Sigma$  é uma superfície de dimensão  $n - 1$  tal que seu *domínio de dependência*  $D(\Sigma)$  seja a *variedade* completa  $M$  (de dimensão  $n$ ), ou seja,  $D(\Sigma) = M$ . O *domínio de dependência*  $D(\Sigma)$  representa o conjunto completo de eventos que podem ser determinados em  $\Sigma$  e por *variedade* nos referimos ao espaço-tempo de forma técnica.



**Figura 2:** Diagrama de Penrose de uma estrela colapsando esfericamente. A estrela colapsando é representada pela região hachurada em cinza. A linha em zigue-zague representa a singularidade  $r = 0$ . O horizonte de eventos é representado por  $H^+$ .

### 3.1. A equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon foi proposta para descrever partículas relativísticas, escalares e sem carga [35]. Dessa forma, dada uma partícula com massa  $m$  e 4-momento  $k^\mu = (E, \mathbf{k})$ , ela obedece a relação relativística

$$k^\mu k_\mu = -m^2 \Rightarrow E^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2. \quad (19)$$

Definimos partículas como possuindo energia positiva  $E = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}$ .

Reescrevendo e atribuindo aos constituintes da equação (19) interpretações operacionais da MQ:  $E = H = i\partial_t$ , sendo  $H$  o operador hamiltoniano,  $\mathbf{k} = -i\nabla$  e aplicando no campo escalar  $\phi(x)$ , temos

$$\begin{aligned} (E^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - m^2) \phi(x) &= 0, \\ \left[ (i\partial_t)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2 \right] \phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

o que define a equação de Klein-Gordon

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi(x) = 0. \quad (21)$$

Agora vamos para o tratamento campístico.

### 3.2. O campo de Klein-Gordon

Toda teoria de campos clássicos surge de uma densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}$  que, para o campo escalar real  $\phi(x)$ ,

de massa  $m$  e sem interações, é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (22)$$

na qual  $\eta^{\mu\nu}$  é a inversa do tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  e as equações de Euler-Lagrange nos levam a equação de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0, \quad (23)$$

tal como na equação (21). As soluções para essa equação podem ser expandidas no espaço dos momentos  $\mathbf{k}$  e vamos representá-las por meio de ondas planas, já normalizadas, da forma

$$\phi \propto f_{\mathbf{k}} \Rightarrow f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (24)$$

sendo  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}$  a frequência de oscilação do campo, obtida substituindo a solução da equação (24) na equação (23), e  $\mathbf{k}$  o vetor de onda.

Para que a solução para o campo  $\phi(x)$  seja expandida em um conjunto completo e ortogonal de soluções temos que fazer uso do produto interno do campo de Klein-Gordon, que é definido em [7, 18, 20, 36], para duas funções  $f$  e  $g$ , como

$$(f, g)_{KG} \equiv -i \int d^3x (f \partial_t g^* - g^* \partial_t f). \quad (25)$$

É o produto interno que define a normalização de  $f_{\mathbf{k}}$ , ver equação (24), e ainda é por meio dele que obtemos as relações

$$(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}'} ) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (26)$$

$$(f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}'}^* ) = 0, \quad (27)$$

$$(f_{\mathbf{k}}^*, f_{\mathbf{k}'}^* ) = -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (28)$$

sendo que a equação (26) implica que os modos  $f_{\mathbf{k}}$  são ortonormais entre si com norma positiva, a equação (27) diz que os modos  $f_{\mathbf{k}}$  e  $f_{\mathbf{k}}^*$  são ortogonais e a equação (28) mostra que os modos  $f_{\mathbf{k}}^*$  são ortonormais entre si com norma negativa. Nesse sentido, o conjunto  $\{f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}}^*\}$  é completo e ortogonal, possibilitando a expansão do campo  $\phi(x)$  como a combinação dos modos  $f_{\mathbf{k}}$  e  $f_{\mathbf{k}}^*$ .

O conjunto de modos  $\{f_{\mathbf{k}}\}$  representa os modos de frequência positiva, satisfazendo

$$\partial_t f_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} > 0 \quad (29)$$

e o conjunto de modos  $\{f_{\mathbf{k}}^*\}$  representa os modos de frequência negativa satisfazendo

$$\partial_t f_{\mathbf{k}}^* = i\omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^*, \quad \omega_{\mathbf{k}} > 0, \quad (30)$$

sendo assim definidos com relação ao tempo  $t$ , de um referencial inercial, do espaço-tempo de Minkowski<sup>7</sup>. Essa

<sup>7</sup>A nomenclatura: modos de frequência positiva e modos de frequência negativa para  $f_{\mathbf{k}}$  e  $f_{\mathbf{k}}^*$ , respectivamente, possui uma origem histórica [5]. Ela remete-se a interpretação do operador Hamiltoniano  $\hat{H} = i\partial_t$  fornecendo a autoenergiza  $E$  do campo e, então, de sua partícula em questão. Assim,  $f_{\mathbf{k}}$  descreve partículas com energia positiva  $E > 0$  e  $f_{\mathbf{k}}^*$  descreve partículas com energia negativa  $E < 0$ . Como definimos partículas com energia positiva em TQC, essa interpretação consolida-se apenas historicamente.

definição é importante para a padronização do conceito de partículas, que ficará mais claro na próxima seção.

Finalmente, podemos expandir o campo  $\phi(x)$  como uma combinação dos modos de frequência positiva  $f_k$  e negativa  $f_k^*$ . Portanto, expandindo-o continuamente no espaço dos momentos, temos

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a_k e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. + a_k^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int d^3k (a_k f_k + a_k^* f_k^*),\end{aligned}\quad (31)$$

sendo  $a_k$  e  $a_k^*$  coeficientes da expansão. Vamos agora quantizar o campo de Klein-Gordon.

### 3.3. Quantização do campo escalar no espaço-tempo plano

A construção de uma teoria quântica a partir de uma teoria clássica consiste na escolha de um espaço de Hilbert de estados  $\mathcal{H}$  e de operadores auto-adjuntos  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  que representem observáveis clássicos fundamentais [5–7, 18–20]. Na TQC fazemos a chamada *segunda quantização* onde promovemos o campo  $\phi(x)$  e seu campo canonicamente conjugado  $\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi$  a operadores  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{\pi}(x)$  [9].

Essa quantização é feita postulando as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\quad (32)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0,\quad (33)$$

que são tomadas em tempos iguais. Dessa forma, os coeficientes  $a_k$  e  $a_k^*$ , da equação (31), são promovidos a operadores  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  satisfazendo

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),\quad (34)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0.\quad (35)$$

Essas relações de comutação são similares às relações do oscilador harmônico quântico (OHQ). Similares porque a equação (34) conta com uma *delta de Dirac*  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  e não uma *delta de Kronecker*  $\delta_{k,k'}$  (como é o caso do OHQ) [6], de modo que há um infinito número de operadores indexados por  $k$  [18]. Assim, os operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$  não possuem interpretação física tão direta como no caso do OHQ, como operadores de criação e destruição, respectivamente. Uma análise detalhada das unidades desses operadores, como sua expansão discreta, retoma suas interpretações físicas de operadores de criação e destruição convencionais desde que lidemos com densidades associadas aos mesmos [6].

Portanto, os campos  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  quantizados ficam escritos como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k \right. \\ \left. + e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k^\dagger \right],\quad (36)$$

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[ e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k \right. \\ \left. - e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \hat{a}_k^\dagger \right].\quad (37)$$

Esses campos são expressos no espaço de Hilbert de estados de partículas  $\mathcal{F}_{KG}$ , conhecido como *espaço de Fock* [6, 7, 36]. O espaço de Fock  $\mathcal{F}_{KG}$  é acompanhado da *representação/base de Fock* que descreve estados de partículas descritos por kets  $|\rangle$  construídos a partir do *estado de vácuo*  $|0\rangle$ . Esse estado tem seu nome devido ao fato dele representar o estado sem partículas e possui a propriedade de ser aniquilado por cada operador densidade de destruição  $\hat{a}_k$  da forma

$$\hat{a}_k |0\rangle \equiv 0, \quad \forall \mathbf{k}.\quad (38)$$

As excitações da base de Fock são interpretadas como partículas e podem ser representadas por meio da atuação, repetidamente, do operador criação  $\hat{a}_k$  no estado de vácuo  $|0\rangle$ , ver equação (38).

Por fim, para explorarmos a interpretação física dos *estados de Fock*, é interessante definirmos mais um operador, o *operador número*

$$\hat{N}_k \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k.\quad (39)$$

Quando definido no caso do OHQ, seu valor esperado fornece exatamente o número de partículas de um determinado estado. Porém, sua interpretação física no contínuo não é tão direta como para o OHQ, dado que ele expressa o produto de  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$ , como comentamos após as equações (34) e (35). Assim, tal como para esses operadores, retomamos a interpretação física de número de partículas desde que lidemos com uma densidade associada ao valor esperado do operador número  $\hat{N}_k$  [6].

A interpretação física desses operadores ficará mais clara quando adentrarmos a seção 4, da radiação Hawking. Aqui mostramos a quantização do campo escalar no espaço-tempo plano. A quantização em espaços curvos segue o mesmo princípio.

### 3.4. Teoria quântica de campos em espaços curvos

A generalização da teoria clássica de campos em espaços-tempo planos para curvos [5, 7, 8, 18–20, 37] se dá com:

1. A substituição da métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pela métrica geral  $g_{\mu\nu}$ ;
2. A substituição das derivadas ordinárias  $\partial_\mu$  por derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ ;

3. A substituição do elemento de volume  $d^4x$  pelo elemento de volume covariante:  $d^4x\sqrt{-g}$ , sendo  $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$ .

Assim, para um espaço-tempo que seja globalmente hiperbólico, a propagação do campo escalar  $\phi(x)$  possui densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + m^2\phi^2), \quad (40)$$

obtida utilizando a equação (22). Para o campo escalar  $\nabla_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi$ .

Então, a equação (23) de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo fica

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\phi - m^2\phi \equiv (\square - m^2)\phi = 0, \quad (41)$$

onde  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$ . As soluções nem sempre serão representadas por meio de ondas planas da forma da equação (24), porém, a obtenção de um conjunto completo e ortogonal de soluções continua sendo feita por meio do *produto interno*, para duas funções  $f$  e  $g$ , agora definido como

$$(f, g)_{KG} \equiv -i \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma} n^\mu (f\nabla_\mu g^* - g^*\nabla_\mu f), \quad (42)$$

onde  $\Sigma_t$  é uma superfície de Cauchy de parâmetro  $t$  com vetor normal  $n^\mu$  e métrica induzida  $\gamma_{\mu\nu}$ <sup>8</sup>. Pode-se mostrar que esse produto interno independe da superfície de Cauchy  $\Sigma_t$  escolhida. Vale frisar que é nesse ponto que precisamos de um espaço-tempo que seja *globalmente hiperbólico*<sup>9</sup>.

O produto interno, definido na equação (42), permite uma base ortonormal  $\{f_i, f_j^*\}$  satisfazendo

$$(f_i, f_j) = \delta_{i,j} \quad (44)$$

$$(f_i, f_j^*) = 0 \quad (45)$$

$$(f_i^*, f_j^*) = -\delta_{i,j}, \quad (46)$$

tal como nas equações (26-28). Os índices  $i$  e  $j$  podem representar que as funções  $f_i$  e  $f_j$  são discretas (utilizando a *delta de Kronecker*  $\delta_{i,j}$ ) ou contínuas (utilizando a *delta de Dirac*  $\delta^3(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ ). Por conveniência, para a dedução de algumas transformações, vamos trabalhar com a notação discreta. Entretanto, as expressões e discussões a seguir valem para ambos os casos.

<sup>8</sup>A métrica induzida  $\gamma_{\mu\nu}$  é a representação do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  definida sobre uma superfície  $\Sigma_t$  (de dimensão  $(n - 1)$ ) e parâmetro  $t$  mergulhada numa superfície  $M$  (de dimensão  $n$ ), onde o tensor métrico é definido. Dado o vetor normal  $n^\mu$  à superfície  $\Sigma_t$  escrevemos

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (43)$$

<sup>9</sup>Para mais detalhes ver subseção 2.2.

Para que possamos desenvolver o formalismo canônico de quantização definimos o momento  $\pi$  associado ao campo  $\phi$  como

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}. \quad (47)$$

Dessa forma, a quantização do campo escalar em espaços-tempo globalmente hiperbólicos segue exatamente como em espaços-tempo planos: escolhe-se um espaço de Hilbert de estados  $\mathcal{F}_{KG}$  com a promoção dos campos  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  a operadores  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{\pi}(x)$ . Então, impomos as relações canônicas de comutação

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)]_{\Sigma_t} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (48)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_{\Sigma_t} = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)]_{\Sigma_t} = 0, \quad (49)$$

tal como nas equações (32) e (33), mas agora tomadas sobre uma superfície de Cauchy  $\Sigma_t$  com parâmetro  $t$ , sendo a coordenada temporal, constante. Analogamente, temos os operadores de criação  $\hat{a}_i^\dagger$  e aniquilação  $\hat{a}_i$  seguindo as relações de comutação

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (50)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad (51)$$

como nas equações (34) e (35). Portanto, o campo escalar  $\phi$  fica quantizado no espaço-tempo curvo como

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*). \quad (52)$$

As definições do estado de vácuo e do operador número seguem respectivamente as equações (38) e (39).

O campo escalar quantizado  $\hat{\phi}$  possui uma expansão *não única*. Isso porque qualquer modo que satisfaça o produto interno, ver equação (42), formando uma base ortonormal, pode ser utilizado para representar o mesmo. Portanto, o campo  $\hat{\phi}$  pode ser expandido em qualquer sistema de coordenadas desejado que descreva o espaço-tempo em questão. Dessa forma, considerando um conjunto de modos alternativo  $g_j(x)$ , temos a expansão

$$\hat{\phi} = \sum_j (\hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*), \quad (53)$$

satisfazendo relações equivalentes as equações (44-46), (50), (51), (38) e (39). Podemos correlacionar os coeficientes ( $f_i$ 's e  $g_j$ 's) e os operadores ( $\hat{a}_i$ 's e  $\hat{b}_j$ 's) das expansões do campo escalar  $\hat{\phi}$ , das equações (52) e (53), a partir das chamadas *transformações de Bogoliubov*, que podem ser vistas no Apêndice A.

Qual seria a motivação física para a existência de mais de uma forma de expansão para o campo  $\hat{\phi}$ ? Desde RE imaginamos um sistema de coordenadas associado a um observador em questão. Assim, dados dois sistemas de coordenadas distintos, ligados por uma transformação,

podemos correlacionar medidas feitas pelos mesmos. Essa ideia se encaixa na expansão do campo  $\hat{\phi}$  ao pensarmos na existência de dois observadores distintos, por exemplo  $A$  e  $B$ , cada um com sua expansão de campo, ver equações (52) e (53), estados de vácuo  $|0_A\rangle$  e  $|0_B\rangle$ , tais que  $\hat{a}_i|0_A\rangle = 0, \forall i$  e  $\hat{b}_j|0_B\rangle = 0, \forall j$  e ligados pelas *transformações de Bogoliubov*. A noção da relação de medidas é o ponto chave da TQCEC, ponto que ficará mais claro na subseção 3.5.

Por fim, tal como fizemos no espaço-tempo plano, precisamos definir os modos de frequência positivas e negativas para a definição de partículas no espaço-tempo curvo [18]. Como acabamos de ver, podemos escrever o campo  $\hat{\phi}$  em bases distintas, pensando em observadores distintos, portanto nossa definição de partículas deve abranger essas distinções. Como cada observador possui seu tempo próprio  $\tau$ , definimos partículas como os modos de frequência positiva com base em  $\tau$  do observador em questão

$$\partial_\tau f_i = -i\omega f_i. \quad (54)$$

Para um espaço-tempo estático, como a métrica é independente do tempo  $t$  a equação de Klein-Gordon, ver equação (41), faz com que os modos  $f_i$  sejam soluções com variáveis separáveis  $f_i(x) = e^{-i\omega_i t} \tilde{f}_i(\mathbf{x})$  de modo que sempre  $\partial_t f_i = -i\omega_i f_i$ . Essa relação pode ser definida de forma independente do sistema de coordenadas utilizando os vetores de Killing  $K = K^\mu \partial_\mu$  associados a simetrias temporais. Portanto, definimos os *modos de frequência positiva* satisfazendo

$$K f_i = \partial_t f_i = -i\omega_i f_i, \quad \omega_i > 0. \quad (55)$$

E os *modos de frequência negativa* como

$$K f_i^* = \partial_t f_i^* = i\omega_i f_i^*, \quad \omega_i > 0. \quad (56)$$

Desde que a trajetória dos observadores siga ao longo do campo de Killing, o tempo próprio  $\tau$  será proporcional ao parâmetro temporal de Killing  $t$  e, portanto, os modos de frequência positiva dados com respeito ao vetor de Killing fornecerão a base ortonormal para descrever o espaço de Fock de cada observador. Vale notar que essa definição de partículas é válida desde que tenhamos um espaço-tempo com uma simetria temporal, de modo a possuímos um campo de Killing relacionado a mesma. Além disso, ela reforça a ideia da expansão não única do campo  $\hat{\phi}$  porque, como não há nenhuma coordenada temporal privilegiada no espaço-tempo curvo, ela vale para qualquer referencial.

No caso da radiação Hawking, para o colapso esfericamente simétrico, precisamos nos atentar ao fato de que não temos um vetor de Killing temporal global. Entretanto, esse espaço-tempo possui duas regiões estacionárias distintas (muito antes e muito depois do colapso), que nos permitem a definição de partículas para observadores estáticos nessas regiões. Assim, definimos os modos de frequência positiva nessas regiões com relação a coordenada temporal e ao seu respectivo vetor de Killing

no passado e no futuro. Essa ideia ficará mais clara no desenvolvimento a seguir.

Agora vamos ver como relacionar a TQCEC à temperatura, resultado primordial da radiação Hawking.

### 3.5. O operador número e a temperatura

O número de partículas no estado de vácuo do próprio campo é sempre nulo ( $\langle 0_i | \hat{N}_i | 0_i \rangle = 0$ ). Porém, podemos calcular o número de partículas esperado por um operador número de base diferente do vácuo considerado, utilizando as expansões vistas nas equações (52) e (53). Esse cálculo é equivalente a resposta para a pergunta: *quantas partículas um observador  $B$ , vê no vácuo  $A$ ?* Assim, precisamos calcular

$$N_j = \langle 0_A | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | 0_A \rangle, \quad (57)$$

sendo que os operadores  $\hat{b}_j^\dagger$  e  $\hat{b}_j$  se relacionam aos operadores  $\hat{a}_i^\dagger$  e  $\hat{a}_i$  através das *transformações de Bogoliubov*, vistas no Apêndice A. Dessa forma, utilizando as equações (A13) e (A14), temos

$$\begin{aligned} N_j &= \langle 0_A | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | 0_A \rangle \\ &= \langle 0_A | \sum_{p,q} B_{jp} B_{jq}^* \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger | 0_A \rangle = \sum_q |B_{jq}|^2, \end{aligned} \quad (58)$$

onde utilizamos que os operadores  $\hat{b}_j$  e  $\hat{b}_j^\dagger$  satisfazem a relação de comutação, ver equação (50)<sup>10</sup>. Não há nenhuma razão para que o número de partículas  $N_j$  seja nulo, desde que o coeficiente  $B_{jq}$  não seja nulo. Esse coeficiente basicamente descreve a mistura de operadores de criação e aniquilação de uma base para a outra, como podemos ver pelas equações (A11) e (A13). Portanto, o que seria vácuo na perspectiva de  $A$  está cheio de partículas na perspectiva de  $B$ . Além disso, como veremos a seguir, esse resultado nos leva a *distribuição de Planck*, no caso da radiação Hawking, firmando a ideia de termos uma temperatura  $T$ . Agora vamos ver como o formalismo apresentado aqui pode ser desenvolvido para a mesma.

## 4. A radiação Hawking

Em seu trabalho [14] Hawking considerou a quantização do campo escalar não massivo para o colapso esfericamente simétrico de uma estrela formando um buraco negro de Schwarzschild, que pode ser visto na figura 2. Dessa forma, a ideia da radiação Hawking consiste em, supondo um estado de vácuo inicial muito antes da formação do buraco negro, saber como a formação deste e de seu horizonte de eventos leva a criação de partículas

<sup>10</sup>É interessante notar que, no caso do contínuo, temos uma divergência infinita nesse ponto porque  $\delta_{p,q} \rightarrow \delta(p-q)$ . É por conta dessa divergência que o *valor esperado do operador número* não representa diretamente o número de partículas, ganhando essa interpretação apenas no cálculo de densidades associadas ao mesmo. Veremos os detalhes dessa discussão na seção 4.



e seu espectro de radiação para longos tempos após a estabilização do mesmo. Na atual seção vamos apresentar essa quantização. Esta abordagem segue as ideias do artigo original do Hawking [14]. Vamos nos basear nas seguintes referências [5–7, 14, 18–20, 36–38].

O espaço-tempo de Schwarzschild estendido é um espaço-tempo estático, porém o espaço-tempo de uma estrela colapsando esfericamente não<sup>11</sup>. Entretanto, como discutimos na subseção 2.2, podemos descrever a métrica do exterior do colapso esfericamente simétrico com a métrica de Schwarzschild, ver equação (1). Além disso, o espaço-tempo de um colapso esfericamente simétrico é estacionário em duas regiões distintas: no *infinito passado nulo*  $\mathcal{I}^-$ , antes do colapso e no *infinito futuro nulo*  $\mathcal{I}^+$ , após o colapso gravitacional. Assim, podemos “ensanduichar” o espaço-tempo de modo que tenhamos três diferentes regiões: passado (antes do colapso), presente (colapso) e futuro (após o colapso). Essa divisão é primordial já que estamos interessados em observadores para a definição do campo escalar nessas regiões assintóticas. Com esse intuito, antes de mais nada, temos que resolver a equação de Klein-Gordon considerando a métrica de Schwarzschild.

#### 4.1. A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild e sua quantização

O espaço-tempo de Schwarzschild, cuja métrica vimos na equação (1), é um espaço-tempo com curvatura não nula<sup>12</sup>. Dessa forma, a equação de Klein-Gordon para o mesmo não é simples como na equação (23). Devemos usar a expressão geral para espaços curvos dada na equação (41) e, para  $m = 0$  e como  $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ , ficamos com

$$0 = \partial_t \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t \phi \right] + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[ r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \phi \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \phi] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \phi. \quad (59)$$

A solução da equação (59) pode ser encontrada por meio do “ansatz”

$$\phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{R(r_*, t)}{r} Y_m^l(\theta, \phi), \quad (60)$$

sendo  $R(r_*, t)$  escrito em função da coordenada tartaruga  $r_*$ , definida na equação (8) e  $Y_m^l(\theta, \phi)$  os *harmônicos*

*esféricos*<sup>13</sup>. A substituição da equação (60) na equação (59) nos leva, igualando as partes a  $l(l+1)$  e  $-l(l+1)$ , a

$$\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta Y_m^l) + \partial_\phi^2 Y_m^l + l(l+1) \sin^2 \theta Y_m^l = 0, \quad (62)$$

$$- \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t^2 R + \frac{2M}{r^2} \left( \partial_r R - \frac{1}{r} R \right) + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r^2 R - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0, \quad (63)$$

sendo que a equação (62) é exatamente a equação diferencial dos harmônicos esféricos<sup>14</sup>. Nesse ponto, podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas  $\partial_r \rightarrow \partial_{r_*}$ , tal que,

$$\partial_r = \frac{\partial r_*}{\partial r} \partial_{r_*} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_{r_*}, \quad (64)$$

$$\partial_r^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \partial_{r_*}^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{2M}{r^2} \partial_{r_*} \quad (65)$$

e, substituindo na equação (63), obtemos

$$\left\{ (-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2) - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} R = [-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2 - V(r)] R = 0, \quad (66)$$

sendo  $V(r)$  uma espécie de “barreira de potencial” da forma

$$V(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (67)$$

A equação (66) não possui solução formal fechada<sup>15</sup>. Entretanto, uma simples análise do potencial  $V(r)$  nos diz que

$$r \rightarrow 2M \Rightarrow r_* \simeq -\infty \Rightarrow V(r) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Próximo de } H^+ \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow r_* \simeq +\infty \Rightarrow V(r) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Próximo de } \mathcal{I}^\pm,$$

onde tomamos  $t \rightarrow \pm\infty$  na consideração da equação (67), respectivamente para  $\mathcal{I}^\pm$ . Logo, o potencial  $V(r)$  é “inexistente” nas regiões *futuro* e *passado infinitos nulos*  $\mathcal{I}^\pm$  (regiões de interesse para o nosso cálculo) e ainda no

<sup>13</sup>Veja que os índices  $l, m \in \mathbb{Z}$  são discretos tais que  $|l| \geq |m|$  e  $m \in [-l, l]$ . Além disso, os *harmônicos esféricos* formam um conjunto ortonormal completo de acordo com

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_m^l(\theta, \phi) Y_{m'}^{l'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (61)$$

ver equação (12.154) na referência [40]. Para mais detalhes ver também a referência [41].

<sup>14</sup>Para mais detalhes, ver referência [41], equação (8.810).

<sup>15</sup>Soluções para a equação (66) podem ser obtidas, por exemplo, por métodos analíticos e/ou numéricos de perturbações lineares. Para mais detalhes ver referência [42].

<sup>11</sup>Para uma visão geral da radiação Hawking, relacionada a buracos negros dinâmicos e utilizando o princípio da incerteza (vide nota de rodapé 20), ver referência [39]. Esta mesma referência fornece, em linhas gerais, uma discussão da abordagem feita no presente trabalho para a dedução da radiação Hawking.

<sup>12</sup>Isso porque seu *tensor de Riemann* é não nulo [18, 22, 23].

horizonte de eventos  $H^+$ . Nessas regiões a equação de Klein-Gordon fica escrita como

$$(-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2) R(r_*, t) = 0, \tag{68}$$

apresentando solução geral, tal como na equação (24), da forma

$$R(r_*, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - kr_*)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \begin{cases} e^{-i\omega u}, & k > 0 \\ e^{-i\omega v}, & k < 0 \end{cases}$$

onde utilizamos as coordenadas do cone de luz de Eddington-Finkelstein, ver equação (9). Vale notar que estaremos considerando os *modos de frequência positiva* em relação à coordenada temporal  $t$  de Schwarzschild e, consequentemente, em relação ao vetor de Killing  $K = \partial_t$ .

Definidos os modos com os quais iremos trabalhar temos que definir quais deles utilizaremos para o nosso cálculo. Para entender a radiação Hawking estamos interessados numa solução que sai do passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  e chega no futuro infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ . Portanto, vamos considerar os *modos do passado*, definidos sob a superfície  $\mathcal{I}^-$  e os *modos do futuro*, definidos sob a superfície  $\mathcal{I}^+$ , como

$$f_\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\omega v}, \text{ vindo de } \mathcal{I}^-, \tag{69}$$

$$g_\Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\Omega u}, \text{ indo para } \mathcal{I}^+. \tag{70}$$

Observe que temos duas bases ortonormais  $\{f_\omega, f_\omega^*\}$  e  $\{g_\Omega, g_\Omega^*\}$ , pois

$$\begin{aligned} (f_\omega, f_{\omega'}) &= \delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \delta(\omega - \omega') \\ (f_\omega, f_{\omega'}^*) &= 0 \\ (f_\omega^*, f_{\omega'}^*) &= -\delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} (g_\Omega, g_{\Omega'}) &= \delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \delta(\Omega - \Omega') \\ (g_\Omega, g_{\Omega'}^*) &= 0 \\ (g_\Omega^*, g_{\Omega'}^*) &= -\delta_{m,m'} \delta_{l,l'} \delta(\Omega - \Omega'). \end{aligned} \tag{72}$$

Agora, antes de definirmos os campos, temos que nos ater ao fato de quais superfícies de Cauchy estaremos considerando para a definição dos mesmos como um conjunto completo e ortogonal. Lembrando da discussão feita no final da subseção 2.2, dado o diagrama de Penrose da figura 2, sabemos que  $\mathcal{I}^-$  e  $H^+ \cup \mathcal{I}^+$  são superfícies de Cauchy, portanto, podemos definir o campo escalar nas mesmas. Assim, podemos definir três conjuntos de modos:

$$\begin{cases} f_\omega: \text{modos definidos sobre } \mathcal{I}^- \\ g_\Omega: \text{modos definidos sobre } \mathcal{I}^+ \text{ e nulos sobre } H^+ \\ h_\Omega: \text{modos definidos sobre } H^+ \text{ e nulos sobre } \mathcal{I}^+ \end{cases},$$

sendo que os modos  $h_\Omega$  formam um conjunto ortonormal  $\{h_\Omega, h_\Omega^*\}$  sobre a superfície  $H^+$ . Note que, como os modos

$h_\Omega$  são definidos sobre o horizonte de eventos  $H^+$  e o mesmo não possui um vetor de Killing temporal ( $K = \partial_t$  é nulo no horizonte), a definição dos modos de frequência positiva com relação a essa superfície torna-se ambígua. Como estamos interessados nas medidas realizadas por observadores distantes não vamos utilizar os modos  $h_\Omega$ . Isso porque esses modos eventualmente atravessam o horizonte de eventos  $H^+$  e nunca alcançam o futuro infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ . Além disso, como veremos a seguir, o resultado do espectro térmico esperado é alcançado sem a utilização dos mesmos. Mais ainda, satisfazemos  $(g_\Omega, h_\Omega) = 0$ ,  $(g_\Omega, h_\Omega^*) = 0$  e  $(g_\Omega^*, h_\Omega) = 0$ .

Finalmente, dados os modos  $f_\omega$ ,  $g_\Omega$  e  $h_\Omega$ , temos dois conjuntos completos e ortogonais de funções:  $\{f_\omega, f_\omega^*\}$  e  $\{g_\Omega, g_\Omega^*\} \cup \{h_\Omega, h_\Omega^*\}$  de forma que podemos expandir, já quantizando os campos nessas regiões, como

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m} \int d\omega (\hat{a}_\omega f_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger f_\omega^*), \text{ definido em } \mathcal{I}^- \tag{73}$$

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m} \int d\Omega (\hat{b}_\Omega g_\Omega + \hat{b}_\Omega^\dagger g_\Omega^* + \hat{c}_\Omega h_\Omega + \hat{c}_\Omega^\dagger h_\Omega^*), \text{ definido em } \mathcal{I}^+ \cup H^+. \tag{74}$$

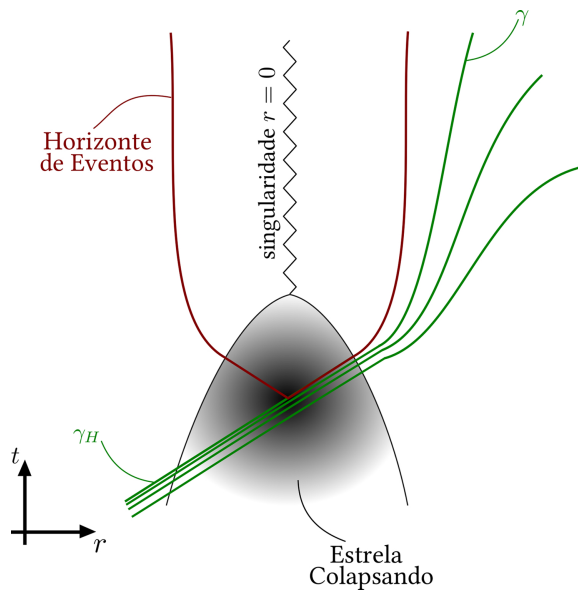
satisfazendo as relações de comutação  $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}] = [\hat{a}_\omega^\dagger, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 0$ ,  $[\hat{b}_\Omega, \hat{b}_{\Omega'}] = [\hat{b}_\Omega^\dagger, \hat{b}_{\Omega'}^\dagger] = [\hat{c}_\Omega, \hat{c}_{\Omega'}] = [\hat{c}_\Omega^\dagger, \hat{c}_{\Omega'}^\dagger] = 0$ ,  $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$  e  $[\hat{b}_\Omega, \hat{b}_{\Omega'}^\dagger] = [\hat{c}_\Omega, \hat{c}_{\Omega'}^\dagger] = \delta(\Omega - \Omega')$ . Juntamente os estados de vácuo ficam  $|0_{pass}\rangle$ , tal que  $\hat{a}_\omega |0_{pass}\rangle = 0, \forall \omega$  e  $|0_{fut}\rangle$ , bem como  $\hat{b}_\Omega |0_{fut}\rangle = \hat{c}_\Omega |0_{fut}\rangle = 0, \forall \Omega$ .

A pergunta a ser feita agora é: *quantas partículas um observador no futuro infinito nulo vê no vácuo do passado infinito nulo?* Para responder a essa pergunta vamos fazer uso das *transformações de Bogoliubov*. Porém, antes de respondê-la temos que responder a outra pergunta, que é intrinsecamente relacionada ao colapso esfericamente simétrico: *como podemos relacionar os modos futuro  $g_\Omega$  com os modos do passado  $f_\omega$ ?* Podemos simplesmente dizer que um modo  $g_\Omega$ , que chegou no infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ , viajou pelo espaço-tempo após abandonar o infinito passado nulo  $\mathcal{I}^-$  apenas passando pela estrela colapsando?

#### 4.2. De volta para o passado

Para descrever a radiação Hawking precisamos entender como a formação do buraco negro leva a criação de partículas no futuro assintótico, juntamente com seu espectro térmico. Traduzindo essa ideia para a formulação que fizemos precisamos expandir os *modos do futuro assintótico nulo  $g_\Omega$*  em termos dos *modos do passado assintótico nulo  $f_\omega$*  [6]. Vamos construir essa ideia agora.

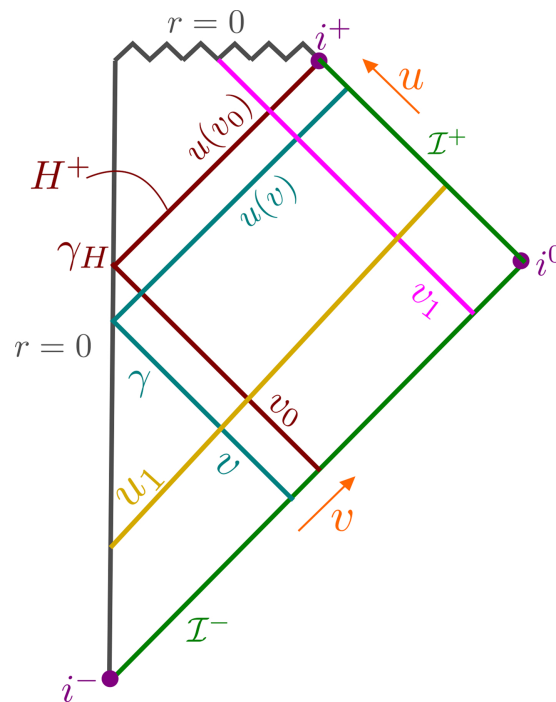
Qual seria a trajetória de um sinal luminoso que fosse emitido no infinito passado nulo  $\mathcal{I}^-$ , passasse pela estrela colapsando e chegasse no infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$ ? Podemos dizer que os modos  $f_\omega$  e  $g_\Omega$  seguiriam essa tra-



**Figura 3:** Representação do colapso esfericamente simétrico de um buraco negro no espaço-tempo  $t \times r$ . Estão representados raios de luz próximos da formação do buraco negro. O raio  $\gamma_H$  forma o horizonte de eventos e marca o limite entre os raios que ficam presos dentro do buraco negro e aqueles que alcançam o infinito.

jetória? Devido a existência do colapso gravitacional o tratamento da propagação de geodésicas nulas não é tão simples, principalmente para aquelas que passam pelo centro da estrela em tempos cada vez mais próximos da formação do horizonte de eventos. Essas geodésicas demoram cada vez mais para conseguir escapar para o infinito ( $t \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow \infty$ ), até o limite em que nunca escapam. Assim, algumas geodésicas adentram o buraco negro e ficam presas para sempre dentro do mesmo. Outras escapam para o infinito com um enorme desvio para o vermelho (representamos por  $\gamma$  a geodésica que alcança  $\mathcal{I}^+$  com  $t \rightarrow \infty$ ). E ainda há aquelas que ficam tão próximas da singularidade que acabam por “formar” o horizonte de eventos do buraco negro (representada por  $\gamma_H$ ). Essa ideia é expressa na figura 3.

Como estamos interessados nas geodésicas que alcançam  $\mathcal{I}^+$  com influência do colapso, estamos interessados naquelas com altíssimas frequências (aquelas capazes de enfrentar e sobreviver ao enorme desvio para o vermelho gravitacional<sup>16</sup>) e que se acumulam próximas ao hori-



**Figura 4:** Diagrama de Penrose representando o colapso esfericamente simétrico de uma estrela e as geodésicas nulas  $\gamma$  e  $\gamma_H$ .

zonte de eventos. Elas são representadas como superfícies de fase constante e nos permitem o uso da *aproximação de óptica geométrica*<sup>17</sup>. A utilização dessa aproximação nos permite visualizar os modos  $f_\omega \propto e^{-i\omega v}$  e  $g_\omega \propto e^{-i\omega u}$  percorrendo trajetórias retilíneas, ou equivalentemente geodésicas nulas, ao longo de  $v = \text{cte}$  e  $u = \text{cte}$ . Essas trajetórias podem ser vistas na figura 4. Note que, porque estamos trabalhando com frequências elevadas, os modos possuem altas energias, de modo que podemos negligenciar o potencial  $V(r)$  (vide equação (67)) na equação (66). Além disso, o fato de que o campo  $\hat{\phi}$  é livre, implica que o mesmo não interage com a matéria do interior da estrela em colapso.

Para lidarmos com essa questão, vamos analisar a figura 4. A mesma equivale ao diagrama de Penrose do colapso esfericamente simétrico (ver figura 2), apenas sem a representação da estrela colapsando de modo que possamos analisar as geodésicas nulas que percorrem o diagrama. Nessa figura vemos que o *passado infinito nulo*  $\mathcal{I}^-$  representa a superfície a partir da qual as geodésicas nulas se originam e é descrito pelo parâmetro  $v$ . O *futuro infinito nulo*  $\mathcal{I}^+$  representa a superfície onde as geodésicas nulas terminam e é descrito pelo parâmetro  $u$ . Temos uma geodésica nula entrando no buraco negro e descrita

modos *trans-Planckianos*. Veja uma discussão mais completa nas referências [6, 46, 47].

<sup>17</sup>A *aproximação de óptica geométrica* consiste no fato de que, dada uma solução de onda geral da forma  $\Psi = Ae^{iF}$ , com uma superfície de fase constante  $F(x)$ , temos  $A$  variando lentamente com relação a fase  $F$ . A equação de onda  $\square\Psi = 0$ , nos diz que  $(\nabla_\mu F)(\nabla^\mu F) = 0$ , ou seja, as superfícies  $F(x)$  são nulas [19, 20].

<sup>16</sup>O desvio para o vermelho gravitacional faz com que a frequência de uma onda recebida por um observador muito distante seja menor do que a frequência emitida. Para mais detalhes ver referência [23]. Vale comentar que, como as frequências recebidas pelo observador distante são menores do que as emitidas temos que ter, na região perto do horizonte de eventos, frequências muito altas (inclusive acima da escala de Planck e, por isso, chamadas de *trans-Planckianas*). Nesse limite a TQCEC perde a validade, comprometendo a dedução apresentada no presente trabalho. Porém, as referências [43–45] mostram que, mesmo quando as frequências *trans-Planckianas* são desconsideradas, ainda sim temos a produção da radiação Hawking, ou seja, suas propriedades, em especial sua característica térmica, continuam válidas e não dependem dos

pelo parâmetro  $v = v_1$  e outra saindo da matéria colapsando e descrita pelo parâmetro  $u = u_1$ . A superfície  $H^+$  representa o horizonte de eventos do buraco negro que se formou, ou seja, a geodésica nula que começa em  $r = 0$  e alcança  $\mathcal{I}^+$  terminando no *futuro infinito tipo tempo*  $i^+$ . E, por fim, temos as duas geodésicas nulas  $\gamma$  e  $\gamma_H$  (com a correspondência para a figura 3). A geodésica nula  $\gamma_H$  se origina em  $\mathcal{I}^-$  com parâmetro  $v_0$ , passa pelo centro da estrela colapsando e fica presa no horizonte de eventos (se tornando seu gerador) em direção a  $\mathcal{I}^+$  com parâmetro  $u = u(v_0)$ . Já a geodésica nula  $\gamma$  se origina em  $\mathcal{I}^-$  com parâmetro  $v$ , passa pelo centro da estrela colapsando e emerge em direção a  $\mathcal{I}^+$  com parâmetro  $u = u(v)$ . Note que geodésicas nulas que partem de  $\mathcal{I}^-$  com  $v > v_0$  entram no buraco negro e terminam na singularidade  $r = 0$  e vale repetir que estamos interessados nas geodésicas nulas tipo  $\gamma$  que passam muito próximas do horizonte de eventos alcançando  $\mathcal{I}^+$  para tempos muito longos.

Dito isso, vamos relacionar o parâmetro  $u$  com o parâmetro  $v$  encontrando  $u = u(v)$ . Faremos uma análise das geodésicas nulas, tal como apresentado na subseção 2.1.1, utilizando alguns de seus resultados. Atentando-nos a geodésica com  $v = v_1 = \text{cte}$  (ver figura 4) que cruza o horizonte de eventos, entrando no buraco negro, podemos encontrar  $u = u(\lambda)$ , sendo  $\lambda$  o parâmetro afim ao longo da mesma. Tomando a derivada de  $u$  com relação ao parâmetro afim  $\lambda$  obtemos

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{d(t - r_*)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dr_*}{dr} \frac{dr}{d\lambda}. \tag{75}$$

Utilizando a equação (6), com a escolha do sinal negativo e com  $E > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= -E \\ \frac{dt}{d\lambda} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E, \\ \frac{dr_*}{dr} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{76}$$

encontrando

$$\frac{du}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E. \tag{77}$$

Com o intuito de integrarmos a equação (77), em termos de  $u$  e  $\lambda$ , precisamos reescrever o termo de dependência em  $r$ . Então, utilizando novamente a equação (6), integramos a equação (76) de  $r = 2M$  até um  $r$  qualquer de modo que o parâmetro afim  $\lambda$  seja nulo para  $r = 2M$ . Assim,

$$r - 2M = -E\lambda, \tag{78}$$

onde  $\lambda < 0$  para  $r > 2M$ . Dessa forma, podemos reescrever a equação (77) como

$$\frac{du}{d\lambda} = 2E - \frac{4M}{\lambda}. \tag{79}$$

E, integrando a equação (79) obtemos

$$u(\lambda) = 2E\lambda - 4M \ln\left(\frac{\lambda}{C_1}\right), \tag{80}$$

sendo  $C_1$  uma constante de integração negativa. Os valores de  $u(\lambda)$  nas regiões de interesse são

$$u(\lambda) \simeq \begin{cases} -4M \ln\left(\frac{\lambda}{C_1}\right), & \text{próximo de } H^+(\lambda = 0) \\ 2E\lambda, & \text{distante de } H^+(\lambda < 0). \end{cases} \tag{81}$$

Vale notar que a coordenada nula  $u$  vale  $-\infty$  no passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  e  $\infty$  no horizonte de eventos  $H^+$ .

Mas como vamos obter  $u = u(v)$  a partir de  $u = u(\lambda)$ ? O parâmetro  $\lambda$  é o parâmetro de distância afim  $\delta$  entre as geodésicas que saem da estrela colapsando percorrendo  $u = u(v_0)$  e  $u = u(v)$  e é constante ao longo dessas geodésicas por todo o espaço-tempo em questão. Podemos entender isso pensando na geodésica nula  $v = v_1$  que entra no buraco negro. A geodésica  $v_1$  cruza a geodésica  $u(v)$  antes de cruzar o horizonte  $u = u(v_0)$ , logo existe um parâmetro afim  $\lambda = \lambda(v)$  tal que

$$u[\lambda(v)] = -4M \ln\left(\frac{\lambda(v)}{C_1}\right), \tag{82}$$

e  $\lambda(v_0) = 0$  já que  $u[\lambda(v_0)] \rightarrow \infty$  no horizonte. Portanto a separação afim  $\delta$  entre as geodésicas  $u(v)$  e  $u(v_0)$  é  $\delta = \lambda(v) - \lambda(v_0) = \lambda(v)$ .

Tal como fizemos para a geodésica nula entrando no buraco negro podemos definir uma geodésica com  $u = u_1 = \text{cte}$ , saindo da estrela colapsando, de modo que a coordenada  $v$  seja função de um novo parâmetro afim, ou seja, de forma que  $v = v(\lambda')$ , sendo  $\lambda'$  o parâmetro afim dessa geodésica. Seguindo os mesmos passos que tomamos para encontrar  $u = u(\lambda)$ , na região bem distante da estrela colapsando, ou seja, no passado infinito assintótico  $\mathcal{I}^-$  (que equivale ao limite  $r \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ ), a coordenada  $v$  pode ser escrita em função de  $\lambda'$  como

$$v(\lambda') \simeq 2E\lambda'. \tag{83}$$

Tomando  $\lambda' = \lambda'(v)$  e  $\lambda' = \lambda'(v_0)$  como os parâmetros afim quando a geodésica  $u = u_1$  cruza as geodésicas entrando na estrela colapsando  $v$  e  $v_0$  respectivamente, podemos definir sua separação da forma

$$\delta = \lambda'(v) - \lambda'(v_0) = \frac{v - v_0}{2E} = \frac{v_0 - v}{C_2}, \tag{84}$$

tal que  $C_2 = -2E < 0$ .

Portanto, se pensarmos que estamos percorrendo as geodésicas  $u$  e  $u_0$  **de volta para o passado**, passando pelo colapso gravitacional e chegando até as geodésicas  $v$  e  $v_0$  a separação afim entre as geodésicas deve permanecer constante ao longo de todo o percurso, de forma que

$$\delta = \lambda(v) = \frac{v_0 - v}{C_2}. \tag{85}$$

Finalmente, substituindo a equação (85) na equação (82) obtemos a tão esperada relação entre  $u$  e  $v$  como

$$u(v) = -4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{C} \right), \tag{86}$$

tal que  $C = C_1 C_2 > 0$ . Essa mesma relação é encontrada por Hawking, em seu artigo original [14], fazendo uma analogia com o espaço-tempo de Schwarzschild estendido, na qual ele realiza o transporte paralelo de vetores definidos próximos aos horizontes de eventos futuro  $H^+$  e passado  $H^-$  e os relaciona ao vetor de Killing  $K = \partial_t$ .

Dessa forma, chegamos a relação necessária para relacionar os modos  $g_\Omega \propto e^{-i\Omega u}$  com relação ao parâmetro afim  $v$  em  $\mathcal{I}^-$ , possibilitando que escrevamos

$$g_\Omega \propto \begin{cases} e^{i\frac{\Omega}{\kappa} \ln \left( \frac{v_0 - v}{C} \right)} & \text{para } v < v_0, \\ 0, & \text{para } v > v_0, \end{cases} \tag{87}$$

onde já substituímos o fator  $\frac{1}{4M}$  pela gravidade superficial  $\kappa$  que possui tal valor para o buraco negro de Schwarzschild<sup>18</sup>. Esse resultado confirma o que supomos desde o começo dessa análise, de que não há modos que alcancem  $\mathcal{I}^+$  oriundos de dentro do buraco negro.

### 4.3. Calculando o número de partículas

Após todos esses cálculos, voltamos a pergunta: *quantas partículas do vácuo do passado assintótico são esperadas no futuro assintótico?* Para tanto, vamos utilizar os modos  $f_\omega$ , ver equação (69), definidos sobre  $\mathcal{I}^-$  e expandir os modos  $g_\Omega$ , ver equação (70), na coordenada  $v$  e no espaço das frequências  $\omega$ . Assim, utilizando a equação (A1) no contínuo, expandimos

$$\begin{aligned} g_\Omega(v) &= \int_0^\infty d\omega (A_{\omega\Omega} f_\omega + B_{\omega\Omega} f_\omega^*) \\ &= \int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-i\omega v} \right. \\ &\quad \left. + B_{\omega\Omega} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\omega v} \right), \end{aligned} \tag{88}$$

Essa expansão tem total semelhança com a expansão de Fourier de  $g_\Omega(v)$  pois

$$g_\Omega(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega v} \tilde{g}_\Omega(\omega), \tag{89}$$

onde

$$\tilde{g}_\Omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{i\omega v} g_\Omega(v). \tag{90}$$

Assim podemos reescrever a equação (88) como

$$g_\Omega(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega [e^{-i\omega v} \tilde{g}_\Omega(\omega) + e^{i\omega v} \tilde{g}_\Omega(-\omega)], \tag{91}$$

onde trocamos o sinal de integração da variável  $\omega \rightarrow -\omega$  no segundo termo devido ao sinal da exponencial. Portanto, comparando as equações (88) e (91) podemos escrever os coeficientes de Bogoliubov da forma

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_\Omega(\omega) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{i\omega v} g_\Omega(v), \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} B_{\omega\Omega} &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \tilde{g}_\Omega(-\omega) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{-i\omega v} g_\Omega(v). \end{aligned} \tag{93}$$

Como discutimos na subseção 4.2,  $u$  está diretamente relacionado com  $v$  por meio da equação (87), então podemos escrever  $g_\Omega(u, v)$  com relação à coordenada  $v$  tal que

$$\begin{aligned} g_\Omega(v) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i\frac{\Omega}{\kappa} \ln \left( \frac{v_0 - v}{C} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left( \frac{v_0 - v}{C} \right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \quad v < v_0. \end{aligned} \tag{94}$$

Substituindo nos coeficientes de Bogoliubov, ver equações (92) e (93), temos

$$A_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\omega v} \left( \frac{v_0 - v}{C} \right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \tag{95}$$

$$B_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega v} \left( \frac{v_0 - v}{C} \right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}}, \tag{96}$$

sendo  $D = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}}$ . Vamos focar nos cálculos relacionados ao coeficiente  $A_{\omega\Omega}$ . Fazendo uma mudança de variáveis da forma  $V = v_0 - v$  para a equação (95), ficamos com

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= D \int_0^\infty dV e^{i\omega v_0} e^{-i\omega V} \left( \frac{V}{C} \right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}} \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \int_0^\infty dV \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) e^{-i\omega V} V^{\frac{i\Omega}{\kappa} - 1} \end{aligned} \tag{97}$$

sendo que integramos por partes após a segunda igualdade. Essa integral não é trivial e, para resolvê-la, faremos uso de uma série de passos.

Primeiramente, dada a definição da *função Gama*<sup>19</sup>

$$\Gamma(z) = x^z \int_0^\infty dt e^{-xt} t^{z-1}, \tag{98}$$

<sup>19</sup>Ver referência [41], equação 8.312.2.

<sup>18</sup>A *gravidade superficial*  $\kappa$  representa um escalar associado a um *horizonte de Killing*. Um *horizonte de Killing* é uma superfície  $\Sigma$  tipo nula para um dado vetor de Killing  $K^\mu$ . Assim, dado um vetor normal  $n^\mu$ , satisfazendo  $n^\mu \nabla_\mu n^\nu = 0$ , a um horizonte de Killing, de modo que seu vetor de Killing possa ser escrito como  $K^\mu = h(x)n^\mu$ , sendo  $h(x)$  uma função suave, definimos  $\kappa$  por meio da equação:  $K^\mu \nabla_\mu K^\nu \equiv \kappa K^\nu$ , de modo que  $\kappa = K^\mu \nabla_\mu [\log h(x)]$ . No caso de um buraco negro de Schwarzschild, o horizonte de Killing é o horizonte de eventos, o vetor de Killing é  $K = \partial_t$  e pode-se mostrar que  $\kappa = \frac{1}{4M}$  [18–20, 22, 23].

válida para  $\text{Re}[z] > 0$  e  $\text{Re}[x] > 0$ , podemos escrever

$$\int_0^\infty dt e^{-xt} t^{z-1} = x^{-z} \Gamma(z) = e^{-z \ln x} \Gamma(z). \quad (99)$$

Porque  $x, z \in \mathbb{C}$  temos que nos atentar que o logaritmo de um número complexo  $x = A + iB$  é indiferente por rotações de  $2\pi$ , ou seja,

$$\ln x = \ln \left[ |A + iB| e^{i \left[ \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + 2n\pi \right]} \right], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (100)$$

Assim, já pensando no uso da equação (99), definimos

$$\ln x \equiv \ln |A + iB| + i \text{sinal}(B) \arctan\left(\frac{|B|}{A}\right), \quad (101)$$

válido para  $A > 0$ .

Para resolvermos a equação (97) vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$x \equiv \epsilon + i\omega, \quad (102)$$

$$z \equiv \epsilon + i\frac{\Omega}{\kappa}, \quad (103)$$

sendo  $\epsilon \ll 1$  e  $\epsilon > 0$ , de forma a utilizarmos a função Gama, ver equação (99), no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Assim, utilizando tal equação (99) e as variáveis definidas nas equações (102) e (103) podemos reescrever a equação (97) da forma

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \int_0^\infty dV e^{-i\omega V} V^{\frac{i\Omega}{\kappa}-1} \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [e^{-z \ln x} \Gamma(z)] \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ e^{-(\epsilon + i\frac{\Omega}{\kappa}) \left[ \ln \sqrt{\epsilon^2 + \omega^2} + i \text{sinal}(\omega) \arctan\left(\frac{|\omega|}{\epsilon}\right) \right]} \right. \\ &\left. \Gamma\left(\epsilon + i\frac{\Omega}{\kappa}\right) \right] \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \left[ \ln |\omega| + i \text{sinal}(\omega) \frac{\pi}{2} \right]} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right) \\ &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{|\omega|}\right) \text{sinal}(\omega) \\ &e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \ln |\omega|} e^{\frac{\Omega}{\kappa} \text{sinal}(\omega) \frac{\pi}{2}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right). \end{aligned} \quad (104)$$

Note que deixamos explícito o termo “ $\text{sinal}(\omega)$ ” na expressão acima para clarificar a obtenção de  $B_{\omega\Omega}$ , veja equação (106). Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} A_{\omega\Omega} &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \ln |\omega|} e^{\frac{\Omega}{\kappa} \frac{\pi}{2}} \\ &\Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right) \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} B_{\omega\Omega} &= \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{-i\omega v_0} \left(-\frac{\Omega}{|\omega|}\right) e^{-i\frac{\Omega}{\kappa} \ln |\omega|} e^{-\frac{\Omega}{\kappa} \frac{\pi}{2}} \\ &\Gamma\left(i\frac{\Omega}{\kappa}\right). \end{aligned} \quad (106)$$

Assim, escrevemos o coeficiente de Bogoliubov  $A_{\omega\Omega}$  em função de  $B_{\omega\Omega}$  como

$$|A_{\omega\Omega}|^2 = e^{2\Omega\pi/\kappa} |B_{\omega\Omega}|^2. \quad (107)$$

Portanto, usando a equação (A3) na forma contínua temos

$$\int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega} A_{\omega\Omega'}^\dagger - B_{\omega\Omega} B_{\omega\Omega'}^\dagger \right) = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (108)$$

Se  $\delta(\Omega - \Omega')$  for escrita como

$$\delta(\Omega - \Omega') = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{i(\Omega - \Omega')t}, \quad (109)$$

podemos reescrever formalmente a equação (108) para  $\Omega = \Omega'$  tal que

$$\int_0^\infty d\omega \left( |A_{\omega\Omega}|^2 - |B_{\omega\Omega}|^2 \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}. \quad (110)$$

O resultado obtido na equação (110) é suficiente para respondermos nossa questão inicial: *quantas partículas do vácuo do passado assintótico são esperadas no futuro assintótico?* Portanto, basta substituírmos o mesmo na equação (58), obtendo finalmente o valor esperado do operador  $\hat{N}_\Omega$  da forma

$$N_\Omega = \int_0^\infty d\omega |B_{\omega\Omega}|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}. \quad (111)$$

Este resultado destaca o ponto que levantamos com a discussão da interpretação física do operador número definido no contínuo: o mesmo retoma sua interpretação física, como quando definido no discreto, como “número de partículas”, quando tomamos sua *densidade*. Por isso reescrevemos o fator divergente  $\delta(0)$  (ver equação (110) e comentário feito na nota de rodapé 10 da subseção 3.5), de forma que podemos escrever a densidade média de partículas

$$n_\Omega = \frac{N_\Omega}{T/2\pi} = \frac{1}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}, \quad (112)$$

representando exatamente a densidade de partículas por unidade de tempo e de frequência. Esse é o espectro de Planck, de partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein, com *temperatura Hawking*

$$T_H \equiv \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (113)$$

Portanto um buraco negro é visto como um corpo que emite partículas e, então, radiação no futuro assintótico com temperatura  $T_H$  proporcional ao inverso de sua massa  $M$ . Vale dizer que esse resultado não possui nenhum detalhe remanescente do colapso esfericamente simétrico.

### 5. Considerações finais

Não podemos deixar de comentar sobre a *descrição pictórica da radiação Hawking*. Segundo a mesma, a radiação Hawking é produzida *no horizonte de eventos* de um buraco negro. Podemos enxergar um “mar de partículas virtuais”<sup>20</sup> ao redor de um buraco negro: quando um par de partícula e antipartícula é produzido nos arredores do horizonte de eventos diz-se, por exemplo, que a antipartícula pode cair no buraco negro, sendo absorvida pelo mesmo, enquanto que a partícula pode, então, escapar para o infinito, sendo medida por observadores muito distantes, que veem-na como radiação Hawking. Embora esta descrição seja amplamente divulgada, até mesmo pelo próprio Hawking em seus livros de divulgação científica [48, 49], podemos dizer que a mesma é muito mais complexa do que como é tomada. Isso porque, tal como mostramos no decorrer do presente artigo, a emissão de partículas se dá devido a diferente noção de partículas para observadores distintos (muito antes da formação do buraco negro e muito após a formação do mesmo). Além disso, artigos como o de Steven Giddings [50], mostram, por meio de cálculos da taxa de emissão total de radiação e do tensor de energia momentum, que a radiação Hawking provém dos arredores do horizonte de eventos dos buracos negros e não diretamente do mesmo.

O resultado do espectro de Planck que obtivemos na equação (112) representa o espectro de um corpo negro perfeito. Isso porque utilizamos uma série de aproximações para alcançarmos tal resultado, como a desconsideração do retroespalhamento pelo potencial  $V(r)$  (veja equação (67)). Caso quiséssemos considerar o mesmo, ao imaginarmos a *propagação de volta para o passado* de um modo  $g_\Omega$  teríamos que considerar que uma parte do mesmo é espalhada  $g_\Omega^R$  (correspondente a uma fração  $1 - \Gamma_{\Omega,l}$  de  $g_\Omega$ ) pelo potencial  $V(r)$  para fora da estrela colapsando e alcança o passado infinito nulo  $\mathcal{I}^-$  com praticamente a mesma frequência  $\Omega$ ; e outra parte entra na estrela colapsando  $g_\Omega^T$  (correspondente a uma fração  $\Gamma_{\Omega,l}$  de  $g_\Omega$ ), passa pelo centro  $r = 0$  e se propaga de volta para o passado até alcançar  $\mathcal{I}^-$  [6, 7]. Assim, a equação A3 na forma contínua<sup>21</sup>, seria interpretada como uma conservação de probabilidade de modo que ficasse escrita como

$$\int_0^\infty d\omega \left( A_{\omega\Omega,l} A_{\omega\Omega',l} - B_{\omega\Omega,l} B_{\omega\Omega',l}^\dagger \right) = \delta(\Omega - \Omega') \Gamma_{\Omega,l}. \quad (114)$$

**Tabela 1:** Cálculo das temperaturas para buracos negros com determinadas massas.

	M (kg)	T (K)
Massa de Planck	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$5.6 \cdot 10^{30}$
Sol	$2.0 \cdot 10^{30}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$
Buraco Negro do centro da Via Láctea	$4.5 \cdot 10^6 M_\odot$	$1.4 \cdot 10^{-14}$
	$9.0 \cdot 10^{36}$	

O fator  $\Gamma_{\Omega,l}$  faz com que o espectro da equação (112) fique

$$n_\Omega = \frac{\Gamma_{\Omega,l}}{(e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1)}, \quad (115)$$

de forma que se torne um *espectro de corpo cinza*. Expressões analíticas desse fator são difíceis de se obter (para mais detalhes ver discussões nas referências [7, 18]). Entretanto, para o tratamento de “caráter didático” que propusemos neste artigo, o resultado aproximado da equação (112) já é suficiente.

Recuperando as unidades da temperatura expressa na equação (113), obtemos

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{G k_B} \frac{1}{8\pi M}. \quad (116)$$

Calculando a temperatura para buracos negros com determinadas massas, como a massa de Planck ( $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ ) [51], a massa do Sol [51] ou mesmo a massa do buraco negro do centro da Via Láctea [52], obtemos a tabela 1. Vemos que buracos negros com massas realistas ou de objetos conhecidos possuem temperaturas de radiação Hawking baixíssimas, temperaturas tais que  $T \ll T_{RCF} \sim 2.7255K$  [51] (sendo  $T_{RCF}$  a temperatura da *radiação cósmica de fundo*). Como a radiação cósmica de fundo permeia o espaço-tempo, qualquer valor de temperatura muito menor que a mesma é dificilmente mensurável. Já buracos negros com massas extremamente pequenas possuem temperaturas altíssimas, tais que  $T \sim T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} \simeq 1.4 \cdot 10^{32}K$  (sendo  $T_P$  a temperatura de Planck).

Outro ponto importante a ser notado é que, dado um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M$  e temperatura  $T$ , de acordo com a equação (116) no espaço vazio, i.e, sem a radiação cósmica de fundo, podemos considerar a *lei de Stefan-Boltzmann*<sup>22</sup> e calcular sua massa em

<sup>22</sup>A *lei de Stefan-Boltzmann* descreve a potência emitida por um corpo negro em termos de sua temperatura. Considerando um buraco negro de Schwarzschild como um corpo negro perfeito, ela pode ser escrita como

$$L = \sigma A T^4 = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2}, \quad (117)$$

onde  $\sigma = \frac{pik_B^4}{60\hbar^3 c^2}$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $A = 4\pi r_S^2$  é a área do buraco negro de Schwarzschild de raio  $r_S = \frac{2GM}{c^2}$  e temperatura  $T$  dada pela equação (116).

<sup>20</sup> Devido ao *princípio de incerteza de Heisenberg* no vácuo quântico é permitido violarmos momentaneamente o *princípio de conservação de energia*, contanto que essa variação de energia aconteça por um intervalo de tempo suficientemente curto. À essas flutuações quânticas da energia do vácuo são dadas o nome de *partículas virtuais*.

<sup>21</sup> Note que representamos o índice  $l$ , relacionado ao potencial  $V(r)$  (ver equação (67)), nos coeficientes de Bogoliubov  $A_{\omega\Omega,l}$  e  $B_{\omega\Omega,l}$  da equação (114).

função do tempo de acordo com [5, 53]

$$\frac{dM}{dt} = -L = -\frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2}. \quad (118)$$

A solução para a equação (118) pode ser escrita da forma

$$M(t) = M_0 \left(1 - \frac{t}{t_V}\right)^{1/3}, \quad t \in [0, t_V], \quad (119)$$

sendo  $t_V = 5120\pi \frac{G^2}{\hbar c^4} M_0^3$  o *tempo de vida* do buraco negro, ou seja, o tempo necessário até que sua massa inicial  $M_0$  “se anule”<sup>23</sup>. Assim, podemos dizer que o buraco negro emite radiação e diminui sua temperatura até uma possível “evaporação completa”. É claro que o fato do buraco negro evaporar completamente ainda é uma questão em aberto<sup>24</sup>. Até porque a mesma leva a paradoxos como o da *perda de informação*<sup>25</sup>.

Embora não tenhamos nenhum tipo de medida direta da radiação Hawking, análogos teóricos e experimentais ao efeito não faltam. Já em 1981 William George Unruh se propôs a modelar, teoricamente, o movimento de ondas sonoras em um fluxo convergente de ondas [55]. Nesse modelo haveria a observação de um espectro térmico de ondas sonoras, tal como o espectro térmico de partículas da radiação Hawking, saindo de um horizonte sônico, representando o horizonte de eventos de um buraco negro, criado em um fluido. Em 2010, um grupo de pesquisadores, incluindo o próprio Unruh, fez a primeira observação experimental da radiação Hawking na água [56]. Mais recentemente, em 2016, Jeff Steinhauer observou experimentalmente a emissão de radiação Hawking emanando de um condensado de Bose-Einstein atômico [57]. Em todos esses análogos, teóricos e/ou experimentais, o principal ponto é a existência de uma métrica efetiva que proporcione o surgimento de um horizonte. Portanto, além dos inúmeros modos de dedução da radiação Hawking, temos motivos mais do suficientes para firmarmos a mesma como um fenômeno chave para a TQCEC, para a termodinâmica de buracos negros e como fenômeno teste para o que esperamos de uma teoria quântica da gravitação.

Por fim, acreditamos que este artigo condensou os principais pontos para estudos introdutórios em TQCEC e fornece, de modo simples, a dedução da temperatura de buracos negros de Schwarzschild. Vale comentar que ele sintetiza a dissertação de mestrado da autora, que pode ser consultada para mais detalhes [58].

<sup>23</sup>O tempo de vida de buracos negros em geral é muito longo. Veja que, para um buraco negro com a massa do Sol  $M_{\odot} \simeq 2.0 \cdot 10^{30} \text{Kg}$ ,

$t_V^{\odot} \simeq 6.6 \cdot 10^{74} \text{s}$ , o que é muito maior que o tempo de vida do próprio universo  $t_{uni} \simeq 4.4 \cdot 10^{17} \text{s}$  [51].

<sup>24</sup>Uma possível alternativa seria que os mesmos evaporariam até a escala de Planck [54].

<sup>25</sup>Ao evaporar, um buraco negro perde seu *horizonte de eventos*, a entidade que “esconde” seus estados internos. Assim, toda a informação que entrou no mesmo “desaparece” com a evaporação do mesmo [54].

## Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa por seus comentários e críticas, assim como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro para a realização do mestrado da presente autora.

## Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:

Apêndice A: Transformações de Bogoliubov

## Referências

- [1] G.E.A. Matsas, Rev. Bras. Ens. Fis. **27**, 137 (2005).
- [2] [https://www.ift.unesp.br/br/Home/extensao/extensao\\_2009.pdf](https://www.ift.unesp.br/br/Home/extensao/extensao_2009.pdf), acessado em 04/02/2019.
- [3] I. Klebanov e J. Maldacena, Phys. Today **62**, 28 (2009).
- [4] L.H. Ford, arXiv: 9707062 (1997).
- [5] V. Mukhanov e S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [6] L.E. Parker e D.J. Toms, *Quantum field theory in curved spacetime* (Cambridge University Press, United Kingdom, 2009).
- [7] N.D. Birrell e P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, New York, 1982).
- [8] S.A. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved spacetime* (Cambridge University Press, New York, 1982).
- [9] R.M. Wald, *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [10] V. Faraoni, Am. J. Phys. **85**, 865 (2017).
- [11] W.G. Unruh, Phys. Rev. D. **4**, 870 (1976).
- [12] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
- [13] S.A. Fulling e P.C.W. Davies, Proc. R. Soc. Lond. A **348**, 393 (1976).
- [14] S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [15] J.M. Bardeen, B. Carter e S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [16] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D. **7**, 2333 (1973).
- [17] D.N. Page, New J. Phys. **7**, 203 (2005).
- [18] S.M. Carroll, *Spacetime and geometry* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [19] [https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/current/black-holes/bh-notes-2014\\_15.pdf](https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/current/black-holes/bh-notes-2014_15.pdf), acessado em 04/02/2019.
- [20] P.H. Lambert, arXiv: 1310.8312 (2013).
- [21] P.M. Alsing e P.W. Milonni, Am. J. Phys. **72**, 1524 (2004).
- [22] R.M. Wald, *General relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [23] J.B. Hartle, *Gravity: an introduction to general relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).
- [24] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, New York, 2009).



- [25] J.A. Foster e J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity* (Springer, New York, 2006).
- [26] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Clarendon Press, Oxford, New York, 1998).
- [27] K. Schwarzschild, *Sitzungsber Preuss Akad Wiss Berlin (Math Phys)* **3**, 189 (1916).
- [28] A.V. Saa, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **38**, 1 (2016).
- [29] J.M. Espinosa, *Am. J. Phys.* **50**, 508 (1982).
- [30] J.K. Martin, A.J. Kox e R. Schulman, *The collected papers of Albert Einstein* (Princeton University Press, New Jersey, 1996), v. 6.
- [31] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum field theory* (John Wiley & Sons, Chichester, 1986).
- [32] M.E. Peskin e D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1995).
- [33] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [34] G. Barton, *Introduction to Advanced Field Theory* (John Wiley & Sons, Hoboken, 1963).
- [35] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (Wiley-VCH, Weinheim, 2011), 2<sup>a</sup> ed.
- [36] A. Fabbri e J. Navarro-Salas, *Modeling black hole evaporation* (Imperial College Press, London, 2005).
- [37] J. Traschen, arXiv: 0010055 (2000).
- [38] P.K. Townsend, arXiv: 9707012 (1997).
- [39] J.T. Firouzjaee e G.F.R. Ellis, *Eur. Phys. J. C* **76**, 620 (2016).
- [40] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier Academic Press, Boston, 2005), 6<sup>a</sup> ed.
- [41] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, Cambridge, 2007) 7<sup>a</sup> ed.
- [42] C. Gundlach, R.H. Price e J. Pullin, *Phys. Rev. D* **49**, 883 (1994).
- [43] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **51**, 2827 (1995).
- [44] T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **48**, 728 (1993).
- [45] R. Brout, S. Massar, R. Parentani e P. Spindel, *Phys. Rev. D* **52**, 4559 (1995).
- [46] T. Jacobson, arXiv: 0308048 (2004).
- [47] S. Hollands e R.M. Wald, arXiv: 1401.2026 (2014).
- [48] S. Hawking, *A brief history of time* (Bantam Books, New York, 1998).
- [49] S. Hawking, *The universe in a nutshell* (Bantam Books, London, 2001).
- [50] S.B. Giddings, *Phys. Lett. B* **754**, 39 (2016).
- [51] K.A. Olive, K. Agashe, C. Amsler, M. Antonelli, J.F. Arguin, D.M. Asner, H. Baer, H.R. Band, R.M. Barnett, T. Basaglia et al., *Review of Particle Physics*. *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).
- [52] A.M. Ghez, S. Salim, N.N. Weinberg, J.R. Lu, T. Do, J.K. Dunn, K. Matthews, M. Morris, S. Yelda, E.E. Becklin et al., *Astrophys. J* **689**, 1044 (2008).
- [53] M.C. Lopresto, *Phys. Teach.* **41**, 299 (2003).
- [54] W.G. Unruh e R.M. Wald, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 092002 (2017).
- [55] W.G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [56] S. Weinfurtner, E.W. Tedford, M.C.J. Penrice, W.G. Unruh e G.A. Lawrence, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011).
- [57] J. Steinhauer, *Nature Physics* **12**, 9595 (2016).
- [58] N.S.M. de Santi, *Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos (2018).