Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 43, e20210123 (2021)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0123

Artigos Gerais

Entropia de emaranhamento de duas partículas carregadas e sem spin em uma armadilha de Penning

Entanglement entropy of two spinless charged particles in a Penning trap

J. P. G. Nascimento*[1], V. Aguiar[1], I. Guedes[1]

[1]Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, Campus do PICI, Caixa Postal 6030, 60455-760, Fortaleza, CE, Brasil.

Recebido em 31 de março de 2021. Revisado em 2 de julho de 2021. Aceito em 6 de julho de 2021.

Investigamos o emaranhamento para o estado fundamental de duas partículas sem spin, carregadas e harmonicamente acopladas em uma armadilha de Penning. Encontramos uma expressão analítica para a entropia linear, L, e analisamos o grau de emaranhamento em função da variação da constante de acoplamento e dos parâmetros da armadilha de Penning. Os resultados mostram uma competição entre o acoplamento das partículas e os parâmetros da armadilha. Relacionamos os resultados com a incerteza na posição das partículas.
Palavras-chave: Emaranhamento, Entropia Linear, Armadilha de Penning.

We investigate the entanglement-related features of the ground state of two spinless charged particles harmonically coupled in a Penning trap. We find an analytical expression for the linear entropy, L, and analyze the entanglement properties of the ground state as the trap parameters and coupling constant changes. The results show a competition between the coupling constant and trap parameters and can also be related to the uncertainty in the position of the particles.
Keywords: Entanglement, Linear Entropy, Penning Trap.

1. Introdução

Recentemente, Pham, Bharadway e Ram-Mohan [1] estudaram o emaranhamento espacial em pontos quânticos interagentes. De acordo com os autores, existem certas semelhanças entre as propriedades eletrônicas de um único ponto quântico e um átomo hidrogenóide. Dessa forma, quando dois ou mais pontos quânticos estão muito próximos uns aos outros, o sistema formado pode ser entendido como uma molécula de pontos quânticos ligados por ligações covalentes. A possibilidade de modificar a interação entre os elétrons dos pontos quânticos, modificando a distância de separação e/ou mediante à aplicação de campos externos, faz com que suas propriedades eletrônicas possam ser bem controladas. Essas estruturas, onde os elétrons estão geometricamente confinados, são fortes candidatas a serem utilizadas como dispositivos em computação quântica. Para calcular o emaranhamento espacial de dois elétrons em pontos quânticos duplos em função de alguns parâmetros, os autores consideraram uma interação coulombiana entre os elétrons, utilizaram a formulação variacional para obter as funções de onda e utilizaram a expressão da entropia linear, que é reconhecida como um bom indicador para determinar o emaranhamento em sistemas de duas ou mais partículas.

Existem alguns trabalhos sobre a determinação do emaranhamento espacial de duas ou mais partículas em diferentes sistemas que são modelados pelo chamado átomo de Moshinsky [2]. Este modelo é formado basicamente por duas partículas que interagem harmonicamente e encontram-se mutuamente confinadas em um potencial externo harmônico isotrópico. Por exemplo, em 2009 Pipek e Nagy [3] calcularam a entropia de emaranhamento para dois elétrons interagentes no estado fundamental. Em 2010, Yañez, Plastino e Dehesa [4] calcularam o emaranhamento espacial também para o primeiro e segundo estados excitados do sistema de dois elétrons interagentes. Em 2012, Bouvrie et al. [5] calcularam o emaranhamento espacial para o átomo de Moshinky com três elétrons e para o de dois elétrons em um campo magnético uniforme. Em 2014, Bouvrie et al. [6] também calcularam o emaranhamento espacial para um sistema unidimensional de muitos corpos formado por átomos de Moshinsky. Em 2019, Christov [7] estudou o emaranhamento espacial em um átomo de Moshinsky interagindo com potencial dependente do tempo.

Existem ainda outros trabalhos sobre o cálculo do emaranhamento espacial de duas ou mais partículas submetidas a diferentes tipos de potencial como os discutidos nas Refs. [8–13]. Nestes trabalhos, a Hamiltoniana é basicamente a utilizada no estudo do átomo de Hélio, com os elétrons interagindo entre si através de potenciais tipo Coulomb, Yukawa ou de contato (função delta).

* Endereço de correspondência: joaopedro@fisica.ufc.br

Outros trabalhos muito interessantes sobre o conceito de emaranhamento em um nível bastante acessível podem ser encontrados nas Refs. [14–16].

Neste trabalho calcularemos a entropia linear de emaranhamento de duas partículas carregadas, sem spin, interagindo harmonicamente e confinadas em uma armadilha de Penning. Esta armadilha [17, 18] foi projetada para confinar partículas carregadas e íons em um pequeno volume para fornecer uma maneira adequada de realizar medições de espectrometria de massa de alta resolução. A armadilha de Penning hiperbólica ideal consiste em uma partícula de massa m e carga q movendo-se em uma superposição de um campo magnético homogêneo e um campo eletrostático derivado de um potencial cujas superfícies equipotenciais são hiperbolóides de revolução.

Na próxima seção encontraremos as funções de onda para o problema e obteremos uma expressão analítica para a entropia linear de emaranhamento no estado fundamental. Devido ao formalismo utilizado, aos cálculos apresentados, e às análises referentes ao emaranhamento do sistema e suas correlações com o conceito de localização de partículas, este trabalho pode ser bastante útil para estudantes de graduação. Na Seção 3 apresentamos e discutimos os resultados obtidos, e, por fim, na Seção 4 apresentamos as conclusões deste trabalho.

2. Funções de Onda e Entropia Linear de Emaranhamento

Em Teoria de Informação Quântica, a medida do emaranhamento quântico de um sistema bipartite é usualmente feita através da entropia de von Neumann ou da entropia linear, que é obtida considerando apenas o primeiro termo da expansão da entropia de von Neumann [19].

Para um sistema composto por duas partículas, (1) e (2), a entropia linear é definida como

$$L = 1 - \int\int |\rho_{red}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1')|^2 d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_1', \tag{1}$$

onde

$$\rho_{red}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1') = \int \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\Psi^*(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2) d\boldsymbol{r}_2, \tag{2}$$

é o operador densidade reduzido da partícula (1), e $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo

$$H(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2)\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = E\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{3}$$

Note que os valores da entropia linear estão compreendidos no intervalo $0 \leq L \leq 1$, onde $L = 0$ indica que os estados são não-emaranhados e $L = 1$ que temos o máximo emaranhamento entre os estados.

A Hamiltoniana para duas partículas carregadas e sem spin em uma armadilha de Penning é dada por:

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{2M}(\boldsymbol{\pi}_1^2 + \boldsymbol{\pi}_2^2) + U_{int}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \\ + q\Phi_{quad}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2), \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\boldsymbol{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ é o autovalor do operador posição da j-ésima partícula, $\boldsymbol{\pi}_j = \boldsymbol{p}_j - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_j)$, $\boldsymbol{p}_j = -i\hbar\nabla_j$, q e M são a carga e massa das partículas respectivamente, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ é o potencial vetor magnético, $U_{int}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ é o potencial de interação entre as partículas e $\Phi_{quad}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ é o potencial elétrico quadrupolar. Na região de aprisionamento, $\Phi_{quad}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_{quad}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{V_0}{2d^2}\left[z_1^2 - \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2}\right] \\ + \frac{V_0}{2d^2}\left[z_2^2 - \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{2}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

onde V_0 é a voltagem aplicada e d é uma constante.

Escolhendo a transformação de gauge $\boldsymbol{A} = -(1/2)\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}$, onde $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{k}$, e considerando que a interação entre as partículas seja harmônica, $U_{int}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = -(1/2)k|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2$, onde k é a constante de acoplamento, a Eq. (4) toma a forma:

$$\begin{aligned} &H(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2) \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}\left(x_j^2 + y_j^2\right) + \frac{M\omega_z^2}{2}z_j^2 - \frac{\omega_c}{2}L_{z_j}\right] \\ &- \frac{k}{2}|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2, \end{aligned} \tag{6}$$

onde $\omega_z^2 = \frac{qV_0}{Md^2}$, $\omega_c = \frac{qB_0}{M}$ é a frequência de Larmor, $L_{z_j} = -i\hbar(x_j\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial}{\partial x_j})$ é a componente z do momento angular e ω é a frequência de modulação dada por $\omega^2 = \frac{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}{4}$. Note que para $k > 0$ ($k < 0$), $U_{int}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ descreve interações repulsivas (atrativas).

Podemos escrever a Eq. (6) como a soma de duas Hamiltonianas desacopladas se considerarmos as coordenadas relativa e do centro de massa, expressas por:

$$\boldsymbol{R} = (X, Y, Z) = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Assim, utilizando as Eqs. (7) e (8) podemos escrever

$$H(\boldsymbol{p}_R, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{r}) = H_R(\boldsymbol{p}_R, \boldsymbol{R}) + H_r(\boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{r}), \tag{9}$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0123

onde

$$H_R(\boldsymbol{p}_R,\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{p}_R^2}{2M} + \frac{M\omega_R^2}{2}(X^2+Y^2) + \frac{M\omega_{R,z}^2}{2}Z^2 - \frac{\omega_c}{2}L_{R,z}, \quad (10)$$

$$H_r(\boldsymbol{p}_r,\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}_r^2}{2M} + \frac{M\omega_r^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{M\omega_{r,z}^2}{2}z^2 - \frac{\omega_c}{2}L_{r,z}, \quad (11)$$

com $\boldsymbol{p}_R = (p_X, p_Y, p_Z) = -i\hbar(\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z)$, $\boldsymbol{p}_r = (p_x, p_y, p_z) = -i\hbar(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $L_{R,z} = -i\hbar(X\frac{\partial}{\partial Y} - Y\frac{\partial}{\partial X})$, $L_{r,z} = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$, e

$$\omega_R^2 = \frac{q^2B_0^2}{4M^2} - \frac{qV_0}{2Md^2}, \quad (12)$$

$$\omega_{R,z}^2 = \frac{qV_0}{Md^2}, \quad (13)$$

$$\omega_r^2 = \omega_R^2 - \frac{2k}{M}, \quad (14)$$

$$\omega_{r,z}^2 = \omega_{R,z}^2 - \frac{2k}{M}. \quad (15)$$

Para que o aprisionamento ocorra, todas as frequências ω_R^2, $\omega_{R,z}^2$, ω_r^2 and $\omega_{r,z}^2$ devem ser maiores que zero. Das Eqs. (10) e (11), vemos que $H_R(\boldsymbol{p}_R,\boldsymbol{R})$ and $H_r(\boldsymbol{p}_r,\boldsymbol{r})$ possuem a mesma estruttura matemática. Desta maneira, precisamos resolver a equação de Schrödinger independente do tempo somente para uma das Hamiltonianas.

Considere a equação de Schrödinger para a Hamiltoniana $H_R(\boldsymbol{p}_R,\boldsymbol{R})$,

$$H_R(\boldsymbol{p}_R,\boldsymbol{R})\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\boldsymbol{R}) = E^R_{n_Rm_Rl_R}\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\boldsymbol{R}). \quad (16)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, ou seja, $X = \rho\ cos\phi$, $Y = \rho\ sen\phi$ e $Z = Z$, podemos reescrever a Eq. (16) como

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{M\omega_R^2}{2}\rho^2 - \frac{\omega_c}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\rho,\phi,Z) + \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{M\omega_{R,z}^2}{2}Z^2\right]\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\rho,\phi,Z) = E^R_{n_Rm_Rk_R}\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\rho,\phi,Z). \quad (17)$$

Considerando $\psi^R_{n_Rm_Rl_R}(\rho,\phi,Z) = \Phi(\rho,\phi)\Upsilon(Z)$, chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{M\omega_R^2}{2}\rho^2 - \frac{\omega_c}{2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\Phi = E^{R,\rho,\phi}_{n_Rm_R}\Phi(\rho,\phi), \quad (18)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{M\omega_{R,z}^2}{2}Z^2\right]\Upsilon(Z) = E^{R,Z}_{l_R}\Upsilon(Z), \quad (19)$$

onde

$$E^R_{n_Rm_Rl_R} = E^{R,\rho,\phi}_{n_Rm_R} + E^{R,Z}_{l_R}. \quad (20)$$

A Eq. (19) nos diz que o movimento ao longo da direção Z é descrito por um oscilador harmônico simples. Logo, as soluções para $\Upsilon_{l_R}(Z)$ são dadas por:

$$\Upsilon_{l_R}(Z) = \left(\frac{1}{2^{l_R}\ l_R!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M\omega_{R,z}}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \times \exp\left[-\frac{M\omega_{R,z}}{\hbar}\frac{Z^2}{2}\right]H_{l_R}\left(\sqrt{\frac{M\omega_{R,z}}{\hbar}}Z\right), \quad (21)$$

$$E^{R,Z}_{l_R} = \hbar\omega_{R,z}\left(l_R + \frac{1}{2}\right), \quad (22)$$

onde H_{l_R} são os polinômios de Hermite, com $l_R \in \mathbb{N}$.

Agora, considerando $\Phi(\rho,\phi) = v(\rho)e^{im_R\phi}$, com $m_R \in \mathbb{Z}$, reescrevemos a Eq. (18) na forma:

$$\left[\frac{d^2v(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dv(\rho)}{d\rho} - \frac{{m_R}^2}{\rho^2}v(\rho)\right] + [\beta^2 - \lambda^2{\rho}^2]v(\rho) = 0, \quad (23)$$

onde

$$\beta^2 = \frac{2M}{\hbar^2}\left(E^{R,\rho,\phi}_{n_Rm_R} + \frac{\omega_c}{2}\hbar m_R\right), \quad (24)$$

e

$$\lambda = \frac{M\omega_R}{\hbar}. \quad (25)$$

As soluções da Eq. (23) são expressas por:

$$v(\rho) = \rho^{|m_R|}e^{-\frac{\lambda\rho^2}{2}}L^{|m_R|}_{n_R}(\lambda\rho^2), \quad (26)$$

com

$$n_R = \frac{\beta^2}{4\lambda} - \frac{|m_R|}{2} - \frac{1}{2}, \quad (27)$$

onde $L^{|m_R|}_{n_R}$ são os polinômios associados de Laguerre, com $n_R \in \mathbb{N}$.

Assim das Eqs. (21), (22) e (24)–(27), temos que as funções de onda normalizadas e as energias da Hamiltoniana $H_R(\boldsymbol{p}_R, \boldsymbol{R})$ são dadas, respectivamente, por

$$\psi^R_{n_R m_R l_R}(\boldsymbol{R}) = \left(\frac{\sqrt{M\omega_{R,z}}}{\sqrt{\pi\hbar}\ l_R!2^{l_R}}\right)^{1/2} \times \left[\frac{\Gamma(n_R+1)}{\Gamma(n_R+|m_R|+1)}\frac{1}{\pi}\right]^{1/2} \times \left(\frac{M\omega_R}{\hbar}\right)^{\frac{|m_R|+1}{2}} (X^2+Y^2)^{\frac{|m_R|}{2}} \times exp\left[-\frac{M\omega_R}{2\hbar}(X^2+Y^2) - \frac{M\omega_{R,z}}{2\hbar}Z^2\right] \times e^{im_R\phi} L^{|m_R|}_{n_R}\left[\frac{M\omega_R}{\hbar}(X^2+Y^2)\right] \times H_{l_R}\left[\left(\frac{M\omega_{R,z}}{\hbar}\right)^{1/2} Z\right], \tag{28}$$

$$E^R_{n_R m_R l_R} = \hbar\omega_R(2n_R+|m_R|+1) - \frac{\hbar\omega_c}{2}m_R + \hbar\omega_{R,z}\left(l_R+\frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos obter as funções de onda ($\psi^r_{n_r m_r l_r}(\boldsymbol{r})$) e as energias ($E^r_{n_r m_r l_r}$) da Hamiltoniana $H_r(\boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{r})$. Assim, em termos das coordenadas originais $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, e das Eqs. (7), (8), (28) e (29), temos que as funções de onda normalizadas e as energias da Hamiltoniana (6) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m},\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \psi^R_{n_R,m_R,l_R}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\psi^r_{n_r,m_r,l_r}\ (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2,), \tag{30}$$

$$E_{\boldsymbol{nml}} = E^R_{n_R m_R l_R} + E^r_{n_r m_r l_r}, \tag{31}$$

com

$$\psi^j_{n_j,m_j,l_j}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \left(\frac{\sqrt{M\omega_{j,z}}}{\sqrt{\pi\hbar}l_j!2^{l_j}}\right)^{1/2}\left[\frac{\Gamma(n_j+1)}{\Gamma(n_j+|m_j|+1)}\frac{1}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{M\omega_j}{\hbar}\right)^{\frac{|m_j|+1}{2}} \times e^{im_j\phi_j}\left[\frac{(x_1\ s_j\ x_2)^2}{2} + \frac{(y_1\ s_j\ y_2)^2}{2}\right]^{\frac{|m_j|}{2}} \times exp\left\{-\frac{M\omega_j}{2\hbar}\left[\frac{(x_1\ s_j\ x_2)^2}{2} + \frac{(y_1\ s_j\ y_2)^2}{2}\right] - \frac{M\omega_{j,z}}{2\hbar}\left[\frac{(z_1\ s_j\ z_2)^2}{2}\right]\right\} \times L^{|m_j|}_{n_j}\left\{\frac{M\omega_j}{\hbar}\left[\frac{(x_1\ s_j\ x_2)^2}{2} + \frac{(y_1\ s_j\ y_2)^2}{2}\right]\right\} \times H_{l_j}\left[\left(\frac{M\omega_{j,z}}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{(z_1\ s_j\ z_2)}{\sqrt{2}}\right], \tag{32}$$

$$E^j_{n_j m_j l_j} = \hbar\omega_j(2n_j+|m_j|+1) - \frac{\hbar\omega_c}{2}m_j + \hbar\omega_{j,z}\left(l_j+\frac{1}{2}\right), \tag{33}$$

onde $j = R, r$, $s_R = +$, $s_r = -$, e $\phi_j = tan^{-1}((y_1\ s_j\ y_2)/(x_1\ s_j\ x_2))$.

Por fim, das Eqs. (1) e (32), temos que a entropia linear L para o estado fundamental, $n = m = l = 0$, pode ser escrita como:

$$L = 1 - \left\{1 + \frac{1}{4\omega_R\omega_r}(\omega_r - \omega_R)^2\right\}^{-1} \times \left\{1 + \frac{1}{4\omega_{R,z}\omega_{r,z}}(\omega_{r,z} - \omega_{R,z})^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Observe que para $k = 0$, temos $L = 0$ (não há emaranhamento) já que $\omega_r = \omega_R$ e $\omega_{r,z} = \omega_{R,z}$.

3. Resultados e Discussão

Na Fig. 1 mostramos a variação de $L(k)$ dado pela Eq. (34) para alguns valores de B_0. Para um dado valor de B_0, $L(k)$ aumenta à medida que k aumenta, evidenciando o fato de que quanto maior for a interação, maior será o emaranhamento. Por outro lado, $L(k)$, para um dado valor de k, diminui ao aumentarmos o valor de B_0 , observação semelhante à encontrada para o átomo de Moshinsky [5]. Entenderemos melhor este comportamento a seguir.

Nas Figs. 2(a) e (b) mostramos o comportamento de $L(B_0)$ para alguns valores de k e V_0, respectivamente. Em ambos os casos, $L(B_0)$ apresenta um comportamento assintótico que surge devido ao fato que $\omega_r \to 0$ no

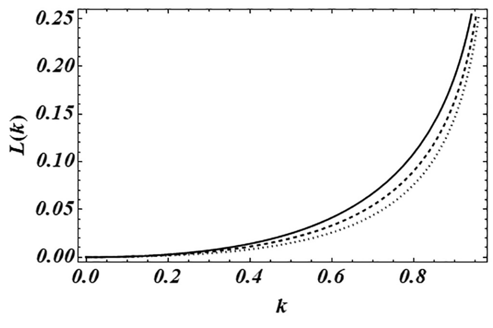

Figura 1: Comportamento de $L(k)$ para $B_0 = 4$ (linha sólida), $B_0 = 4.5$ (linha tracejada) e $B_0 = 15$ (linha pontilhada). Utilizamos um sistema de unidades no qual $q = d = M = \hbar = 1$ e $V_0 = 4$.

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0123

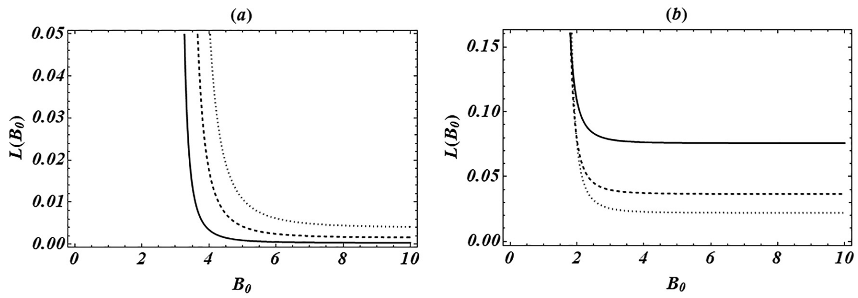

Figura 2: Comportamento de $L(B_0)$ para (a) $k = 0.2$ (linha sólida), $k = 0.4$ (linha tracejada) e $k = 0.6$ (linha pontilhada), com $V_0 = 4$, e para (b) $V_0 = 0.5$ (linha sólida), $V_0 = 0.6$ (linha tracejada) e $V_0 = 0.7$ (linha pontilhada), com $k = 0.2$. Nestas figuras utilizamos o sistema de unidades no qual $q = d = M = \hbar = 1$.

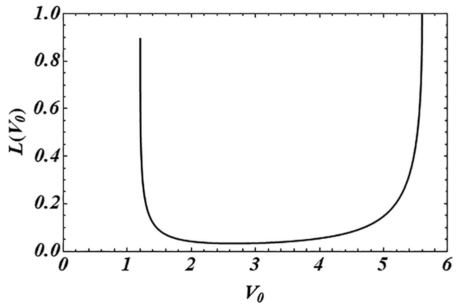

Figura 3: Comportamento de $L(V_0)$. Utilizamos os valores $q = d = M = \hbar = 1$, $k = 0.6$ e $B_0 = 4$.

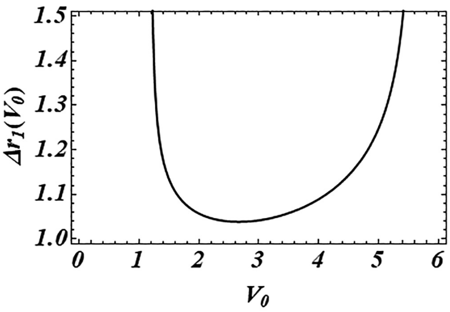

Figura 4: Comportamento de $\triangle \boldsymbol{r}_1(V_0)$. Utilizamos os valores $q = d = M = \hbar = 1$, $k = 0.6$ e $B_0 = 4$.

limite em que $B_0 \to \frac{qV_0}{2Md^2} + \frac{2k}{M}$, onde o valor de $L(B_0)$ é máximo.

Considere a Fig. 2(a). Para $B_0 > \frac{qV_0}{2Md^2} + \frac{2k}{M}$, $L(B_0)$ diminui à medida que B_0 aumenta, tornando-se constante para valores de $B_0 > 5$. Esta saturação no valor de $L(B_0)$ ocorre devido ao fato que há uma competição entre o confinamento das partículas pelos campos magnético (B_0) e elétrico (V_0) da armadilha e o potencial de interação expresso através da constante de acoplamento (k). Para um certo par de valores de V_0 e k, observamos que mesmo aumentando o valor de B_0 ainda haverá um emaranhamento residual devido ao acoplamento entre as partículas. Note que para grandes valores de B_0, a entropia linear depende apenas dos valores das frequências $\omega_{R,z}(V_0)$ e $\omega_{r,z}(V_0, k)$. Este emaranhamento residual aumenta ao aumentarmos k. Na Fig. 2(b) mostramos a variação de $L(B_0)$ para vários valores de V_0 mantendo o valor de k fixo. Observamos que ao aumentarmos V_0, aumentamos o confinamento e diminuímos o emaranhamento.

Na Fig. 3 mostramos o comportamento de L em função do aumento de V_0. Observe que $L(V_0) \sim 0.9$ quando $V_0 = 1.4$. Neste limite temos $\omega_{r,z} \to 0$. À medida em que V_0 aumenta, $L(V_0)$ diminui até o ponto $V_0 = V_{0c} = 2.5$. Para $V_0 > V_{0c}$, $L(V_0)$ aumenta assintoticamente até atingir seu valor máximo em $V_0 = 5.4$. Neste limite temos $\omega_r \to 0$. Mais uma vez este comportamento pode ser explicado pela competição entre o confinamento e o acoplamento das partículas.

Na Fig. 4 mostramos a incerteza na posição ($\triangle \boldsymbol{r}_1$) para a partícula 1. Observamos que ao aumentarmos V_0, $\triangle \boldsymbol{r}_1$ diminui, o que significa que estamos confinando mais a partícula. Sendo o confinamento maior que o acoplamento, o emaranhamento diminui. A partir de $V_0 > V_{0c}$, $\triangle \boldsymbol{r}_1$ aumenta, indicando que a partícula se torna menos confinada. Neste caso, o acoplamento se torna mais efetivo levando a um aumento do emaranhamento.

4. Conclusão

Estudamos o emaranhamento de duas partículas sem spin, carregadas e harmonicamente acopladas em uma armadilha de Penning através da entropia linear, L, dada pela Eq. (1). As funções de onda para este problema são expressas pela Eq. (32). Para o estado fundamental encontramos uma expressão analítica para L, dada pela Eq. (34), expressa em termos dos parâmetros B_0 e V_0 da armadilha de Penning e da constante de acoplamento k, como mostrado nas Eqs. (12)–(15).

Para um dado valor de B_0 e V_0, $L(k)$ aumenta à medida que k aumenta, evidenciando o fato de que quanto maior for a interação, maior será o emaranhamento. Por outro lado, $L(B_0)$, para um dado valor de k e V_0, diminui ao aumentarmos o valor de B_0. O comportamento de $L(V_0)$, para k e B_0 fixos, é mostrado na Fig. 3, onde vemos que $L(V_0)$ diminui até o ponto $V_0 = V_{0c} = 2.5$ e depois aumenta assintoticamente até atingir seu valor máximo em $V_0 = 5.4$.

Esses resultados indicam que a medida de L corresponde ao resultado do balanço entre o acoplamento das partículas expresso pela constante k e o confinamento delas devido aos campos B_0 e V_0. Quanto maior for o confinamento das partículas em relação ao acoplamento, mais localizadas elas estarão, e dessa forma menor será o emaranhamento expresso por L. Quando o acoplamento é maior do que o confinamento, significa que as partículas estão menos localizadas e, por conseguinte, a superposição das funções de onda aumenta, aumentando L. Essa análise é corroborada pela Fig. 4, onde mostramos a variação da incerteza na posição da partícula 1 para os mesmos parâmetros utilizados na Fig. 3. Em suma, L mede o grau de superposição das funções de onda das partículas em termos da variação dos parâmetros k, B_0 e V_0.

Vale ressaltar que, apesar de termos considerado uma interação entre as partículas que não é realista (por simplicidade, tomamos uma interação harmônica ao invés de coulombiana), observamos que estudar tal sistema é útil, já que trabalhos presentes na literatura mostram que o emaranhamento desse sistema exibe características que independem dos detalhes da interação. Como pudemos observar, fixando a (o) interação (potencial de confinamento), temos que o emaranhamento tende a diminuir (aumentar) quando a intensidade do (da) potencial de confinamento (interação) aumenta.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPQ pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] D.N. Pham, S. Bharadwaj e L.R. Ram-Mohan, Phys. Rev. B **101**, 045306 (2020).

[2] M. Moshinsky, Am. J. Phys. **36**, 52 (1968); Erratum: M. Moshinsky, Am. J. Phys. **36**, 763 (1968).

[3] J. Pipek e I. Nagy, Phys. Rev. A **79**, 052501 (2009).

[4] R.J. Yañez, A.R. Plastino e J.S. Dehesa, Eur. Phys. J. D **56**, 141 (2010).

[5] P.A. Bouvrie, A.P. Majtey, A.R. Plastino, P. Sanchez-Moreno e J.S. Dehesa Eur. Phys. J. D **66**, 15 (2012).

[6] P.A. Bouvrie, Ana P. Majtey, M.C. Tichy, J.S. Dehesa e A.R. Plastino, Eur. Phys. J. D **68**, 346 (2014).

[7] I.P. Christov, Phys. Scr. **94**, 045401 (2019).

[8] Y.C. Lin, T.K. Fang e Y. Kam Ho, Phys. Plasmas **22**, 032113 (2015).

[9] A. Kuroś e A. Okopińska, Few-Body Syst. **56**, 853 (2015).

[10] S. López-Rosa, R.O. Esquivel, A.R. Plastino e J.S. Dehesa, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **48**, 175002 (2015).

[11] C.H. Lin, Y.C. Lin e Y. Kam Ho, Few-Body Syst **54**, 2147 (2013).

[12] T.S. Hofer, Front. Chem.: Theor. Comput. Chem. **1**, 24 (2013).

[13] C.H. Lin e Y. Kam Ho, Atoms, **3**, 422 (2015).

[14] A. Valdes-Hernandez, C.G. Maglione, A.P. Majtey e A.R. Plastino, Ensino Fis. **42**, e20190313 (2020).

[15] D.V. Schroeder, Am. J. Phys. **85**, 812 (2017).

[16] A. Gomez-Rodriguez e J.L. Aragon, Rev. Mex. de Fisica E **58**, 61 (2012).

[17] F.M. Penning, Physica (Amsterdam) **3**, 873 (1936).

[18] L.S. Brown e G. Gabrielse, Rev. Mod. Phys. **58**, 233 (1986).

[19] R. Paškauska e L. You, Phys. Rev. A **64**, 042310 (2001).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0123