



A “hipótese- h ” de Sommerfeld-Debye: uma teoria semiclássica dos raios X, raios γ e do efeito fotoelétrico

The “ h -hypothesis” of Sommerfeld-Debye: a semi-classical theory of X-rays, γ -rays, and the photoelectric effect

Ronivan Sousa da Silva Suttini^{*1}, João José Caluzi², Nádia Cristina Guimarães Errobidart³

¹Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, MS, Brasil.

²Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências, Bauru, SP, Brasil.

³Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Instituto de Física, Campo Grande, MS, Brasil.

Recebido em 24 de setembro de 2024. Revisado em 17 de janeiro de 2025. Aceito em 08 de fevereiro de 2025.

Este artigo examina a controvérsia científica em torno da teoria semiclássica desenvolvida por Arnold Sommerfeld e Peter Debye entre 1911 e 1913. Originalmente formulada durante as investigações sobre raios X, a teoria foi ampliada para abarcar diversos fenômenos atômicos, incluindo as emissões de raios X e raios gama (γ), o potenciais de ionização e, de modo mais destacado, as emissões fotoelétricas. A teoria semiclássica – atualmente chamada de “hipótese- h ” – baseava-se na aplicação do conceito de “ $quantum$ de ação”, introduzido por Max Planck em sua teoria da radiação do corpo negro, para calcular a energia absorvida pelos elétrons. Simultaneamente, mantinha compatibilidade com a teoria clássica do eletromagnetismo de James C. Maxwell, preservando uma concepção clássica da luz e da transferência ressonante de energia entre a luz e a matéria. A partir de elementos da historiografia moderna das ciências, o estudo analisa fontes primárias e secundárias sobre a construção inicial da teoria quântica da radiação, bem como leituras biográficas dos cientistas envolvidos. O texto oferece uma narrativa histórica que permite aos leitores compreenderem a gênese, o desenvolvimento e a refutação da “hipótese- h ” sob uma perspectiva colaborativa. Como “material suplementar”, apresenta-se a demonstração matemática da derivação da famosa “lei do efeito fotoelétrico” de Albert Einstein, (re)derivada por Sommerfeld e Debye com base no arcabouço teórico da “hipótese- h ”.

Palavras-chave: Ensino de Ciências, História da Ciência, Física Moderna, Teoria Quântica, Natureza da Luz.

This article examines the scientific controversy surrounding the semiclassical theory developed by Arnold Sommerfeld and Peter Debye between 1911 and 1913. Originally formulated during investigations into X-rays, the theory was expanded to address diverse atomic phenomena, including X-ray and gamma-ray (γ) emissions, ionization potentials, and, most notably, photoelectric emissions. The semiclassical theory – now referred to as the “ h -hypothesis” – relied on the application of the “quantum of action”, introduced by Max Planck in his theory of black-body radiation, to calculate the energy absorbed by electrons. Simultaneously, it maintained compatibility with James C. Maxwell’s classical electromagnetic theory, preserving a classical conception of light and the resonant transfer of energy between light and matter. Drawing on methodologies from modern historiography of science, the study analyses primary and secondary sources on the early construction of quantum radiation theory, alongside biographical analyses of the scientists involved. The text provides a historical narrative that enables readers to understand the genesis, development, and refutation of the “ h -hypothesis” through a collaborative perspective. As “supplementary material”, it presents the mathematical demonstration of the derivation of Albert Einstein’s renowned “photoelectric effect law”, (re)derived by Sommerfeld and Debye through the theoretical framework of the “ h -hypothesis”.

Keywords: Science Education, History of Science, Modern Physics, Quantum Theory, Nature of Light.

1. Introdução

“A ciência é um cemitério de ideias mortas, ainda que a vida possa surgir delas”¹.

O físico-matemático alemão Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951) (cf. Figura 1) é

frequentemente mencionado por suas contribuições ao desenvolvimento da física quântica, incluindo a “teoria quântica de Bohr-Sommerfeld”, o “modelo atômico de Bohr-Sommerfeld” e a “constante de estrutura fina de Sommerfeld”. Além disso, na década de 1910, ajudou a fundar a “Escola Sommerfeld” na Universidade de Munique, Alemanha, onde trabalhou com diversos cientistas cujas realizações foram fundamentais para o avanço da mecânica quântica. Entre eles estavam Hans Albrecht Bethe (1906–2005), Peter Josephus Wilhelmus Debye (1884–1966), Werner Karl Heisenberg (1901–1976) e

*Endereço de correspondência: ronivan.silva@ifms.edu.br

¹ Miguel de Unamuno, *Tragic Sense of Life* (New York: Dover Publications, 1954), p. 90.



Figura 1: Retrato assinado de Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951) de abril de 1929. Fonte: Coleção Emilio Segrè Visual Archives, American Institute of Physics.

Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958), todos orientados e laureados com o Prêmio Nobel. Embora não tenha recebido o disputadíssimo prêmio oferecido pela Academia Sueca de Ciências, ele foi indicado 84 vezes entre 1917 e 1950, mais do que qualquer outro físico [1–3].

No entanto, essas realizações no âmbito da física quântica foram alcançadas somente após o ano de 1913, com a aceitação geral do modelo atômico de Niels Henrik David Bohr (1885–1962). Antes disso, em colaboração com Peter Debye, Sommerfeld propôs e defendeu uma teoria semiclássica² para a interação entre luz e matéria, fundamentada na eletrodinâmica clássica e na formulação quântica de Planck para a radiação do corpo negro [7–9]. A ideia central baseava-se no conceito “*quantum de ação*”, postulado como a energia vibracional máxima que

² Os historiadores divergem quanto à caracterização da teoria proposta por Sommerfeld e Debye como uma interpretação “clássica” ou “semiclássica”. O historiador alemão Armin Hermann [4, p. 126], por exemplo, considera a “*hipótese- h* ” como uma “interpretação essencialmente clássica”, uma vez que a natureza da luz e o processo de absorção de energia radiante pelos elétrons são tratados de acordo com os fundamentos da teoria clássica do eletromagnetismo, ainda que propriedades quânticas possam ser atribuídas à estrutura atômica. Em contrapartida, o historiador japonês Sigeko Nisio [5] a denomina “teoria quântica de Sommerfeld de 1911”. Já o historiador norte-americano Roger H. Stuewer [6, p. 246], para evitar a confusão de termos, optou por descrevê-la como uma “interpretação não-einsteiniana”. Conforme será discutido ao longo do texto, essa divergência decorre do fato de que, por um lado, os cientistas adotam a formulação quântica de Planck para radiação de corpo negro no cálculo da energia radiante absorvida pelo elétron e, por outro lado, utilizam os princípios da teoria clássica do eletromagnetismo para explicar o mecanismo pelo qual o átomo acumula energia da luz incidente no movimento de seus elétrons. Em nossa opinião, o uso da expressão “teoria semiclássica” é mais apropriado para se referir ao modelo teórico proposto por Sommerfeld-Debye.

um átomo pode acumular gradualmente no movimento de seus elétrons antes de ocorrer uma emissão, cujo valor seria igual a “ $h/2\pi$ ”³, em que “ h ” é a constante de Planck [8].

A teoria semiclássica de Sommerfeld-Debye – designada mais recentemente como “*hipótese- h* ”⁴ – foi criada no contexto específico das pesquisas sobre a natureza dos raios X, mas, posteriormente foi expandida para ser aplicável a uma variedade de processos atômicos, incluindo a emissão de raios X, raios gama (γ), o potencial de ionização e o efeito fotoelétrico, contrapondo-se diretamente às ideias de uma possível natureza quântica da radiação [17, cap. 6 e 7].

Embora ambos os modelos teóricos concordassem que a energia total transferida fosse $E = h\nu$, a controvérsia científica se estabeleceu em relação ao processo ou mecanismo pelo qual os elétrons absorviam a energia da luz incidente. Enquanto Einstein [18] adotou a hipótese de que a energia radiante é convertida de maneira integral e instantânea em energia cinética dos elétrons, Debye e Sommerfeld [8] consideraram que essa conversão ocorre de maneira gradual, em um intervalo de tempo mensurável, estimado com base nas propriedades de ressonância ondulatória.

Este artigo caracteriza-se como um “Ensaio sobre História da Física Moderna”, cujo conteúdo foi obtido a partir da análise documental de fontes primárias e secundárias. Além da extensa consulta a fontes originais, a estrutura e a abordagem deste ensaio foram amplamente orientadas pelos trabalhos de Michael Eckert [2, 3, 9], Bruce R. Wheaton [17, cap. 6 e 7], Sigeko Nisio [5], Armin Hermann [4, cap. 6] e Roger H. Stuewer [6, cap. 5, 11 e 12]. Dentre essas contribuições, destacam-se os estudos de Michael Eckert, Bruce R. Wheaton e Sigeko Nisio, que forneceram uma base interpretativa significativa para contextualizar e analisar a “*hipótese- h* ” de

³ O termo “ $h/2\pi$ ” é comumente representado na mecânica quântica como $\hbar$ (h cortado).

⁴ Faz-se a importante ressalva de que a denominação “*hipótese- h* ” não é exclusiva da proposta de Sommerfeld e Debye. Como observado por um dos pareceristas da RBEF, “[...] até o ano 2000, apenas o estudo de Roger H. Stuewer [6, p. 246–256] se referia à “*hipótese- h* ” como sendo de Sommerfeld, e a expressão “*hipótese- h* ” não era unicamente atribuída a Sommerfeld, nem ao efeito fotoelétrico”. Os estudos de Max Jammer [10, p. 54–56] e Sigeko Nisio [5], publicados na mesma época, utilizam a expressão “*hipótese de quantum de ação [elementar]*”. De fato, o nome “*hipótese- h* ” nunca foi empregado por Sommerfeld e Debye nos títulos ou nos conteúdos de suas publicações originais. Observa-se que essa designação começou a ser utilizada mais recentemente, a partir dos trabalhos de Michael Eckert [2, 3, 9], Franklin J. Lambert [11] e Roger H. Stuewer [6, 12]. Segundo Edward Neville da Costa Andrade [13], John L. Heilbron [14], El’Yashevich [15] e Helge Kragh [16, p. 105], a expressão “*hipótese- h* ” foi originalmente cunhada pelo físico britânico Henry Gwyn Jeffreys Moseley (1887–1915) para designar a emergente “teoria quântica”. Em uma carta para Ernest Rutherford (1871–1937), datada de 5 de janeiro de 1914, Moseley escreveu: “Estou convencido de que o que chamei de ‘*hipótese- h* ’ é verdadeiro, ou seja, será possível construir átomos a partir de ‘ e ’ [carga], ‘ m ’ [massa] e ‘ h ’ [constante de Planck], e nada mais além disso” [15].

Sommerfeld-Debye e sua relevância no desenvolvimento inicial da teoria quântica da radiação.

A escassez de estudos historiográficos brasileiros sobre o tema reforça a importância de trazer essa discussão para o público acadêmico. Assim, objetiva-se, neste ensaio, discutir a controvérsia científica em torno da “*hipótese-h*” desenvolvida por Sommerfeld e Debye entre 1911 e 1913, especificamente como uma tentativa semi-clássica de construir uma interpretação, sob o ponto de vista do conceito de “quantum de ação”, para a natureza dos raios X, raios γ e do efeito fotoelétrico. Tal discussão possibilita uma compreensão mais bem informada sobre a construção do conhecimento científico acerca da teoria quântica da radiação no início do século XX.

Ao final, disponibiliza-se, como “material suplementar”, a demonstração matemática da derivação da famosa “lei do efeito fotoelétrico” de Einstein ($\mathbf{K}_{máx} = h\nu - \phi$) a partir da aplicação da “*hipótese-h*” por Debye e Sommerfeld. Essa demonstração pode ser utilizada para exemplificar a resolução de um sistema oscilatório harmônico forçado sem amortecimento.

2. A Gênese da “*hipótese-h*”

Em 1906, aos 38 anos de idade, Arnold Sommerfeld foi nomeado para a cátedra de professor de física teórica na Universidade de Munique, assumindo uma posição de destaque como sucessor do físico austríaco Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906), que acabara de tirar a própria vida. A partir de então, tornou-se mais próximo de Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923) e intensificou seus esforços e recursos disponíveis para investigar a natureza dos raios X [2, cap. 2]. Alguns meses antes, em uma carta datada de 13 de maio de 1905, trocada com Wilhelm Wien (1864–1928), Sommerfeld expressou sua frustração pela falta de avanço nesse campo de pesquisa, afirmando ser “[...] uma vergonha que, depois de dez anos da descoberta dos raios Röntgen, ainda não se soubesse exatamente o que estava ocorrendo com os raios X” [3, p. 9, 19, p. 242].

De fato, havia motivos para a frustração. Sommerfeld havia realizado quatro trabalhos em física teórica sobre o fenômeno da difração dos raios X em fendas estreitas, buscando encontrar evidências conclusivas que apoiassem a hipótese amplamente difundida de que os raios X eram impulsos eletromagnéticos [20–23]. No entanto, os resultados obtidos por ele (e por outros cientistas) foram considerados inconclusivos⁵ [17, cap. 6].

De acordo com essa hipótese, proposta na virada do século XX por George Gabriel Stokes (1819–1903), Johann Emil Wiechert (1861–1928) e Joseph John

Thomson (1856–1940), os raios X seriam constituídos de sucessivos e irregulares impulsos eletromagnéticos, gerados no momento do impacto do feixe de partículas dos raios catódicos (ou seja, elétrons) no anticátodo do tubo de raios X. Essa hipótese está fundamentada na teoria clássica do eletromagnetismo – a teoria de onda eletromagnética de James C. Maxwell –, segundo a qual toda variação na velocidade de uma partícula eletricamente carregada (incluindo a desaceleração) resulta na emissão de ondas eletromagnéticas [17, cap. 2].

Em uma carta para Hendrik Lorentz, datada de 9 de janeiro de 1909, Sommerfeld expressou sua oposição aos avanços recentes de uma possível “teoria quântica da radiação” como solução para o problema, declarando: “Por outro lado, sou conservador o suficiente para resistir, por enquanto, aos ‘*quanta* de luz’ na concepção de Einstein. Os ‘*quanta* de luz’ de Stark, contra os quais falei recentemente, provavelmente também não são do seu gosto” [19, p. 375–376].

A última observação referia-se aos estudos de Johannes Stark (1874–1957) sobre a distribuição da intensidade espacial dos raios X [24, 25]. Stark havia observado que os raios X não eram emitidos com a mesma intensidade em todas as direções (ou seja, apresentavam uma “emissão anisotrópica”), apresentando intensidade máxima na direção frontal. Ele defendeu que essa assimetria não podia ser explicada com base na hipótese clássica de impulsos eletromagnéticos e sugeriu a existência de um fenômeno quântico para justificá-la [5, 9, 17, cap. 6].

Foi nesse contexto histórico-científico e tecnológico que Sommerfeld iniciou o desenvolvimento de sua teoria sobre a natureza dos raios X. Em um artigo publicado em 15 de dezembro de 1909, intitulado “Sobre a distribuição da intensidade durante a emissão de raios Röntgen [raios X]”, ele demonstrou que os resultados obtidos por Stark sobre a emissão anisotrópica dos raios X podiam ser compreendidos por meio da hipótese clássica de impulsos eletromagnéticos [26]. Essa teoria ficou conhecida como “teoria da frenagem dos raios X” de Sommerfeld (“*Bremstheorie*”, em alemão), representando um modelo clássico que se contrapunha às ideias de uma possível natureza quântica dos raios X.

Em correspondências enviadas a Stark nas semanas que antecederam a publicação do seu artigo, Sommerfeld escreveu:

Você se convencerá, como espero, de que a *Bremstheorie* dos raios X [teoria da frenagem] leva, por si só, a todas aquelas consequências para as quais você recorre à (muito hipotética e incerta) teoria dos quanta de luz [19, p. 365]. [...] Não estou interessado em envolvê-lo em uma disputa. No melhor dos casos, seria injusto; pois você se destaca em ideias experimentais, enquanto eu possuo maior entendimento teórico. [...] Mas se um cientista reconhecido como você comete um erro tão grave, ele deve corrigi-lo

⁵ Não poderia haver difração de raios X em fendas estreitas nos experimentos iniciais de Sommerfeld, uma vez que as dimensões das fendas são muito maiores do que o comprimento de onda dos raios X. Somente quando o físico alemão Max von Laue realizou experimentos com cristais é que o fenômeno de difração de raios X foi observado.

imediatamente, no interesse de seus leitores menos atentos [19, p. 366].

Stark, por sua vez, respondeu de forma desdenhosa à crítica: “Sua opinião sobre minha capacidade teórica de julgamento é tão pouco lisonjeira que me vejo inclinado a sorrir com isso” [19, p. 370]. Com o passar do tempo, a relação entre os dois cientistas tornou-se cada vez mais tensa, evoluindo para uma rivalidade permanente [4, p. 82–84].

Embora Sommerfeld tenha alcançado parcialmente seu objetivo de “[...] reforçar a confiança na validade da teoria clássica do eletromagnetismo, mesmo para processos elementares do campo elétrico, cuja solidez parecia, em certa medida, abalada pelas recentes especulações sobre os *quanta* de luz” [26], muitas questões sobre a natureza dos raios X ainda permaneciam sem respostas. Nessa época, as pesquisas do físico britânico Charles Glover Barkla (1877–1944) sobre a polarização dos raios X, ajudaram a formar a hipótese de que duas variedades ou componentes de raios X eram emitidas nos experimentos, cada uma com características e origens específicas.

A primeira componente da radiação X ficou conhecida como “*bremssstrahlung*” (em alemão), que significa “radiação de frenagem”. Como mencionado, de acordo com a hipótese clássica de impulsos eletromagnéticos de Stokes-Wiechert-Thomson e com a “*Bremstheorie*” de Sommerfeld, sua origem estava associada à perda de energia cinética durante a desaceleração do feixe de elétrons ao colidir com o ânodo (anticátodo). A “radiação de frenagem” possuía a propriedade de ser independente da natureza do material do anticátodo, era polarizada e apresentava uma distribuição angular de intensidade dependente da energia cinética e da direção de incidência do feixe de elétrons (ou seja, uma emissão anisotrópica). Em contraste, a segunda componente dos raios X não mostrava uma direção predominante de oscilação (ou seja, não era polarizada), e as observações indicavam que suas propriedades eram influenciadas pela natureza do material do anticátodo, recebendo, assim, o nome “*charakteristische Strahlung*” (em alemão), que significa “radiação característica”. Acreditava-se que essa segunda componente se originava no interior dos átomos do material do anticátodo, embora não houvesse um consenso estabelecido sobre o assunto. Além disso, as observações adicionais sugeriam que a “radiação característica” era emitida isotropicamente, ou seja, com o mesmo poder de penetração em todas as direções [9].

Sommerfeld considerava as propriedades dessa segunda componente dos raios X similares às da radiação gama (γ), ou “*Eigenstrahlung*” (em alemão): “Essa parte [a radiação de frenagem] é sobreposta por uma segunda componente que parece ter mais o caráter de uma ‘radiação de fluorescência’ [raios γ]” [26], chegando a denominá-la de “raios X fluorescentes”.

Embora fosse contrário às diferentes hipóteses dos “*quanta* de luz” propostas por Albert Einstein [18] e

Johannes Stark [25], Sommerfeld não rejeitava totalmente as ideias quânticas propostas por Planck [27] que foram introduzidas em sua teoria da radiação de corpo negro. Em correspondência com Stark, afirmou: “Não que eu tenha dúvidas sobre a importância do ‘*quantum* de ação [elementar]’. Mas a maneira como você o desenvolve parece, não só para mim, mas também para Planck, bastante ousada” [19, p. 366]. Para Sommerfeld, a solução para o enigma da natureza dos raios X exigia a formulação de uma teoria semiclássica para a luz que fosse compatível tanto com a teoria clássica do eletromagnetismo quanto com a lei de quantização da energia vibracional dos elétrons.

No artigo de 1909 mencionado, apesar de ser dedicado à formulação de uma teoria puramente clássica e exclusiva para a primeira componente dos raios X – a “radiação de frenagem” (“*bremssstrahlung*”) –, Sommerfeld indicou como imaginava que o enigma da natureza dos raios X pudesse ser resolvido por completo:

[...] nessa segunda parte, a ‘radiação X fluorescente’ [refere-se à ‘radiação característica’], a absorção e emissão de energia ocorrem no interior do átomo. É bem possível que o ‘*quantum* de ação’ de Planck desempenhe um papel importante aqui. Eu gostaria de ver o cálculo do comprimento de onda dos raios X, conforme proposto por J. Stark e W. Wien, limitado a essa parte da radiação (geralmente a mais significativa). No entanto, parece-me que o ‘*quantum* de ação’ não exerce qualquer influência sobre a primeira componente da radiação [a ‘radiação de frenagem’]. Nesse caso, seria mais apropriado falar em ‘largura de impulso’ em vez de ‘comprimento de onda’ dos raios X. Deve-se tentar explicar as propriedades dessa primeira componente inteiramente com base na teoria clássica do eletromagnetismo [26].

Foi no final da década de 1910 que a comunidade científica avançou na compreensão do enigma imposto pela natureza dos raios X. Isso ocorreu após o anúncio dos resultados obtidos em um teste experimental sugerido por Eugen von Schweidler [28] e executado por Edgar Meyer [29] com radiação gama (γ). Ao contrário do que alguns cientistas tinham concluído anteriormente, as novas observações sugeriam que os raios γ , emitidos espontaneamente por decaimento de núcleos radioativos, possuíam uma natureza ondulatória eletromagnética (e não corpuscular) e exibiam uma distribuição de energia espacial altamente anisotrópica, semelhante à primeira componente dos raios X, a “radiação de frenagem” (“*bremssstrahlung*”). Edgar Meyer, então assistente de Johannes Stark na Universidade de Aachen, questionou em suas considerações finais se a “teoria da radiação de frenagem” (“*Bremstheorie*”), proposta por Sommerfeld, também poderia explicar as evidências de uma emissão anisotrópica dos raios γ [17, p. 147–150].

Dessa forma, Sommerfeld percebeu nas “variações Schweidlerianas” uma oportunidade para expandir o alcance da aplicação de sua “teoria da radiação de frenagem” (“*Bremstheorie*”). Em 7 de janeiro de 1911, na Academia de Ciências de Munique, Sommerfeld apresentou um estudo intitulado “Sobre a Estrutura dos Raios γ ” [7]. Ele propôs a tese de que a radiação gama (γ), um subproduto do decaimento radioativo beta (β), era gerada pela aceleração das partículas β (elétrons) desde o repouso até a velocidade com que eram ejetadas do interior dos átomos. Em outras palavras, sugeriu que os raios γ se originavam por um processo intra-atômico semelhante, porém inverso, ao que ocorria durante a desaceleração do feixe de elétrons incidente no anticátodo de um tubo de raios X. Em ambos os casos, a teoria clássica do eletromagnetismo previa a emissão de ondas eletromagnéticas devido à aceleração ou desaceleração de uma partícula eletricamente carregada.

Sob essa perspectiva, as emissões espontâneas das partículas β e da radiação gama (γ) estariam mutuamente relacionadas. A aceleração determinava tanto a velocidade final do elétron ejetado (partícula β) quanto as características e propriedades específicas da radiação eletromagnética emitida (raios γ). Fundamentando sua análise em princípios relativísticos, Sommerfeld demonstrou que a razão entre as energias das partículas β e dos raios γ era dada pela seguinte equação:

$$\frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} = \frac{6\pi c^2 m_0 l}{e^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c}} \quad (1)$$

em que (l) é a distância percorrida durante a aceleração da partícula β , isto é, o alcance da força eletromagnética, (m_0) é a massa de repouso de um elétron, e (v/c) é a razão entre a velocidade da partícula (v) e a velocidade da luz no vácuo (c).

Todavia, a avaliação da correspondência empírica da equação (1) somente seria possível caso o valor da distância de frenagem (l) fosse determinado com precisão, um parâmetro que ainda era desconhecido na época. Para contornar essa dificuldade, Sommerfeld sugeriu “transferir a hipótese fundamental da teoria da radiação [de corpo negro] de Planck para as emissões radioativas, assumindo que, em cada uma dessas emissões, exatamente um ‘quantum de ação elementar’ é liberado” [7, grifo nosso].

A grandeza física “ação” é definida pelo produto da “energia” x “tempo”; logo, na sua forma mais simples, tem-se $E.t = h$, em que (t) é o tempo de duração da aceleração e (E) é a energia cinética relativística adquirida pelo movimento dos elétrons até sua emissão como partículas β [7, 9]. De outro modo, Sommerfeld assumia como pressuposto inicial que a quantidade de energia (E) transferida nas interações atômicas é determinada exclusivamente pela duração do intervalo (t) em que ocorre a absorção ou emissão.

Essa tentativa de transferir e aplicar a hipótese energética de “quantum de ação [elementar]” de Planck [27]

aos processos radioativos – um fenômeno não periódico e não estacionário –, cujo significado físico fora atribuído apenas a fenômenos periódicos, originalmente formulada no contexto dos estudos da termodinâmica estatística e da radiação de corpo negro, é considerada a gênese da “hipótese- h ” de Sommerfeld.

A “hipótese- h ” forneceu uma equação adicional que elimina o parâmetro (l) na equação (1) ao incorporar o tempo correspondente de aceleração (t), resultando em uma nova expressão que contém (h) em vez de (l), tornando-a mais adequada para comparação com dados experimentais:

$$\frac{E_{\beta}}{E_{\gamma}} = \frac{6\pi ch}{e^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (2)$$

Com base nos dados da recente publicação de Russell e Soddy [30] sobre os “raios γ do tório e do actínio” e nos antigos resultados experimentais de Wilhelm Wien [31] “sobre a energia dos raios catódicos em relação à energia dos raios X e dos raios secundários”, Sommerfeld realizou uma análise qualitativa e quantitativa das equações (1) e (2). Calculando o valor da distância de frenagem (l) na equação (1), obteve um valor estimado de aproximadamente $10^{-3} \sim 10^{-4}$ vezes menor do que as dimensões atômicas ($l < 10^{-8}$ cm), o que estava em concordância com os valores aceitos. Em seguida, determinou o valor da constante de Planck (h) a partir da equação (2), e o valor encontrado mostrou-se bastante próximo da ordem de grandeza teórica. Contudo, fez a ressalva de que tais números “(. . .) não devem ser considerados como uma verdadeira confirmação de nossas fórmulas teóricas [equações (1) e (2)], mas sim como um convite à pesquisa radioativa para verificar mais precisamente a relação entre a energia dos raios β e γ ” [7].

Sommerfeld concluiu que, embora houvesse abordagens diferentes para entender a natureza dos raios X, a teoria quântica da radiação de Johannes Stark não invalidava a abordagem clássica eletromagnética de Wilhelm Wien. Em vez disso, afirmou que ambas as teorias ofereciam perspectivas complementares para compreender o fenômeno. Em suas palavras:

Para mim, a diferença essencial parece ser a seguinte. Em [Wilhelm] Wien, não há relação entre seu cálculo eletromagnético de 1905 e sua teoria da radiação de 1907. Ambos fornecem valores bastante diferentes e parecem contraditórios entre si. [Johannes] Stark está até mesmo inclinado a abandonar a teoria clássica do eletromagnetismo usual nos processos elementares em geral, e nos raios X, em particular, em favor de uma teoria da radiação e, além disso, substituí-la por uma teoria quântica da radiação. Em contraste, vimos aqui que ambos os pontos de vista são perfeitamente compatíveis. Calculamos a emissão dos raios X, sua distribuição e

intensidade com base nas suposições mais simples, a partir da teoria puramente eletromagnética. [...] É somente por meio dessa incorporação da teoria da radiação que a teoria eletromagnética dos raios X se torna completamente determinada. Ambas as teorias não se excluem, mas se complementam [7].

Para o segundo semestre de 1911, dois eventos científicos importantes estavam agendados, e Sommerfeld fez questão de utilizar essas datas para divulgar e defender como sua “hipótese- h ” poderia ser aplicada para interpretar outros processos atômicos elementares e puros, ou seja, de interação apenas entre átomos e elétrons.

Na 83ª Reunião da Sociedade de Cientistas e Médicos Naturais Alemães, realizada em Karlsruhe, em 23 de setembro, Sommerfeld apresentou o artigo intitulado “O *Quantum* de Ação de Planck e sua Importância Geral para a Física Molecular” [32], no qual aborda as possíveis aplicações da lei de Planck à teoria do calor específico em sólidos e ao efeito fotoelétrico. No mês seguinte, no I Congresso de Solvay, realizado em Bruxelas (Bélgica), cuja temática principal do evento foi a “Teoria da Radiação e o Quanta”, Sommerfeld apresentou o trabalho intitulado “Aplicação da Teoria do *Quantum* de Ação em Fenômenos Moleculares Não-Periódicos” [33], que incluía a análise da emissão de raios X, raios γ e o efeito fotoelétrico. Em particular, os registros históricos desse último evento indicam que “hipótese- h ” de Sommerfeld foi objeto de discussão entre os cientistas que estavam presentes, destacando-se as objeções apontadas por Einstein.

3. O I Congresso de Solvay e as Discussões Sobre a “hipótese- h ”

O I Congresso de Solvay, realizado entre 30 de outubro e 3 de novembro de 1911, em Bruxelas, na Bélgica, foi um importante evento para a comunidade europeia de física e química. Embora tenham sido convidados 23 cientistas de seis países (Inglaterra, Alemanha, França, Áustria, Holanda e Dinamarca) com grande “fator de impacto” – para utilizar uma linguagem atual – nota-se a ausência do físico dinamarquês Niels Henrik David Bohr (1885–1962) e do físico alemão Johannes Stark (1874–1957), ambos, na época, diretamente envolvidos com pesquisas sobre a teoria quântica da radiação⁶ (cf. Figura 2) [36].

Durante o evento, os cientistas presentes tiveram a oportunidade de discutir as similaridades e diferenças entre os modelos teóricos de Einstein [18] e Sommerfeld [7]. Por um lado, ambos os modelos pressupõem a existência de um processo de transferência de energia da

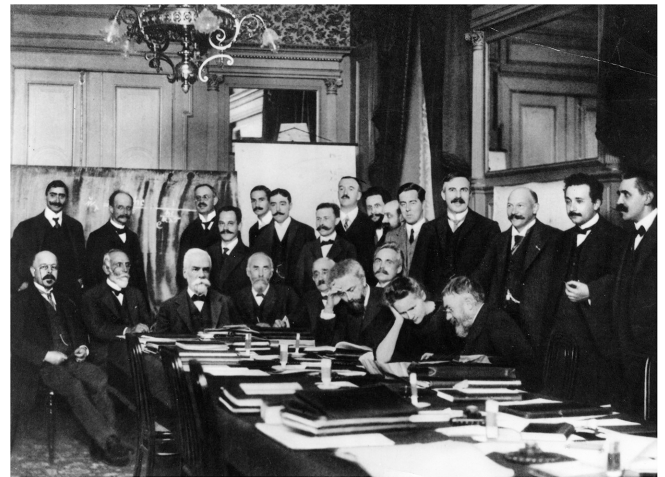


Figura 2: I Congresso de Solvay, Bruxelas, 1911, cujo tema foi a “Teoria da Radiação e os Quanta”. Da esquerda para a direita, sentados à mesa: Nernst; Brillouin; Solvay; Lorentz; Warburg; Perrin; Wien; Curie; Poincaré. Da esquerda para a direita, em pé: Goldschmidt; Planck; Rubens; Sommerfeld; Lindemann; De Broglie; Knudsen; Hasenöhrl; Hostelet; Herzen; Jeans; Rutherford; Kamerlingh-Onnes; Einstein; Langevin. Fonte: American Institute of Physics, Emilio Segrè Visual Archives.

radiação para um elétron ligado à estrutura atômica⁷ e concordam que a energia total absorvida ou emitida é igual a $E = h\nu$. Por outro lado, no entanto, diferem fundamentalmente em relação à natureza do processo ou mecanismo subjacente a essa transferência. O modelo semiclássico de Sommerfeld é baseado no fenômeno da ressonância ondulatória, que implica um aumento gradual e contínuo da energia cinética do elétron, num intervalo finito de tempo de acumulação (t), até que atinja um valor crítico – o “*quantum* de ação” – necessário para romper sua ligação atômica. Em contrapartida, o modelo quântico de Einstein, de maneira revolucionária, postula uma conversão instantânea de unidades inteiras e discretas de “*quantum* de energia luminosa” em energia cinética dos elétrons⁸.

Na apresentação de seu trabalho, Sommerfeld [33] argumentou que algumas observações preliminares já sugeriam que sua teoria do “*quantum* de ação” era mais consistente do que a teoria de “*quantum* de luz” de Einstein para explicar o efeito fotoelétrico. Ele mencionou resultados parciais de pesquisas conduzidas em seu laboratório na Universidade de Munique, em colaboração com Walter Friedrich (1883–1968), que apoiavam essa

⁶ Mais detalhes sobre a organização do I Congresso de Solvay podem ser consultados em Franklin J. Lambert [11], Jagdish Mehra [34] e Diana Kormos Barkan [35].

⁷ Isso difere, por exemplo, da tentativa clássica de interpretação do efeito fotoelétrico proposta por Philipp Lenard [37], denominada “hipótese de gatilho” [38–40].

⁸ Einstein, em 1905, escreveu: “De acordo com essa hipótese aqui considerada, na propagação de um raio de luz emitido por uma fonte puntiforme, a energia não é continuamente distribuída sobre volumes cada vez maiores de espaço, mas consiste em um número finito de “quanta de energia”, localizados em pontos do espaço que se movem sem se dividir e que podem ser absorvidos ou gerados somente como unidades inteiras” [18].

conclusão⁹. Ele também destacou que, no início daquele ano de 1911, o físico norte-americano James Remus Wright (1883?–1937), na Universidade de Chicago, Estados Unidos, sob orientação de Robert Andrews Millikan (1868–1953), conduziu um estudo em superfícies de alumínio no qual evidenciou que “[...] contrariamente aos resultados obtidos por Ladenburg [43] e Hull [44], o potencial positivo não aumenta como uma função linear da frequência da luz incidente, mas alcança um máximo para $\lambda = 216,6 \text{ nm}$ ” [45]¹⁰. Além disso, apontou que J. R. Wright sugeriu existirem evidências de que o efeito fotoelétrico dependia do plano de polarização da radiação incidente, e também indicou que a influência da vibração natural dos elétrons nas emissões fotoelétricas poderia ser explicada pela teoria de Lindemann [46], que, até aquele momento, estava em concordância com os resultados experimentais de Pohl e Pringsheim [47, 48] para os metais rubídio, potássio, sódio e bário.

As notas das discussões do relatório apresentado por Sommerfeld no I Congresso de Solvay, que ocupam 20 páginas, evidenciam que foram apontadas uma série de dificuldades relacionadas ao tratamento das partículas (elétrons) com base na “teoria do *quantum* de ação”. Henri Poincaré (1854–1912) questionou a validade da aplicação das ideias de Sommerfeld a sistemas com várias partículas, especialmente quanto à determinação da fração da energia potencial total atribuída a uma partícula nesse sistema. Hendrik Lorentz (1853–1928) e Marcel Brillouin (1854–1948) argumentaram que a determinação da energia cinética seria problemática, uma vez que dependeria do sistema de coordenadas utilizado. Paul Langevin (1872–1946) afirmou que havia diferenças significativas entre a ideia inicial de “*quantum* de ação [elementar]” de Planck [27], relacionada a um problema estatístico de extensão no espaço de fase em eventos periódicos, e a proposta teórica de Sommerfeld, apresentada como um princípio dinâmico [36, p. 372–392].

Além disso, Marie Curie (1867–1934) levantou dúvidas sobre a predição intra-atômica do valor da distância de frenagem dos elétrons na produção dos raios X. Ela, no entanto, lembrou que havia razões a favor da tese de que os elétrons possuíam certas velocidades no interior dos átomos antes de serem ejetados [36, p. 378]. Quando questionada por Henri Poincaré sobre o porquê esses elétrons não emitiam ondas eletromagnéticas continuamente, seguiu-se uma discussão com Ernest Rutherford (1871–1937) sobre as evidências

experimentais disponíveis que sugeriam a criação de raios γ no decaimento radioativo β [36, p. 385–390].

Albert Einstein (1879–1955) apontou que existia uma dificuldade na interpretação física apresentada por Sommerfeld, afirmando que a função hamiltoniana ($T - U$) não seria nula para uma partícula livre. Ele também argumentou que a fórmula da radiação de Planck, por si só, era capaz de explicar os resultados experimentais disponíveis para a produção de raios X, incluindo o “importante resultado do Sr. Sommerfeld, ou seja, o cálculo das quantidades de energia emitida sob a forma de raios Röntgen [raios X] quando um elétron encontra um obstáculo” [36, p. 381]. Einstein fez questão de destacar isso para argumentar que uma concordância satisfatória com os dados experimentais não poderia ser vista como uma confirmação direta e conclusiva da “*hipótese-h*” de Sommerfeld. Por fim, reconheceu que a “ideia de Sommerfeld tinha a grande vantagem de preservar as equações de Maxwell no cálculo do campo de emissão; no entanto, criava outras grandes dificuldades que não podiam ser ignoradas” [36, p. 383].

Nos dois meses anteriores ao I Congresso de Solvay, Einstein havia estudado as recentes publicações de Sommerfeld. Antes da 83ª Reunião da Sociedade de Cientistas e Médicos Naturais Alemães, em Karlsruhe, e em troca de cartas com seu amigo Michele Besso, datada de 11 de setembro, Einstein escreveu: “A ideia relacionada à história dos elétrons no metal de Sommerfeld [7], de que a força elétrica pode atuar durante um tempo finito de colisão, é muito interessante; de qualquer forma, não deve ser rejeitada de imediato e sem uma análise cuidadosa. Quando puder respirar novamente, irei refletir sobre isso” [49, p. 204–205]. Duas semanas antes do I Congresso de Solvay, em 21 de outubro, ele retomou o assunto escrevendo:

Sommerfeld formulou sua hipótese sobre o tempo de colisão [$E.t = h$] sem qualquer base teórica. No entanto, é possível apresentar razões realmente contundentes a favor dela diretamente a partir da fórmula de radiação [de Planck]. Essa hipótese não é compatível com nossa mecânica; sendo inútil quebrar a cabeça sobre essa questão. A fórmula de radiação mostra que estruturas elementares eletricamente carregadas [e.g. elétrons], que colidem com baixa velocidade (energia), não emitem radiação de ondas curtas. Se nos mantivermos, de alguma forma, coerentes com o mecanismo de emissão [de radiação] de Maxwell, então segue-se que os termos superiores devem estar ausentes na expansão de Fourier das acelerações de colisão, o que é equivalente à hipótese de Sommerfeld. Para baixas velocidades, a hipótese de Sommerfeld não pode ser válida – deve tratar-se de algum tipo de lei-limite ainda não compreendida [49, p. 214–215].

⁹ Walter Friedrich nunca finalizou as pesquisas planejadas por Sommerfeld. Persuadido por Max von Laue (1879–1960), também integrante da “Escola de Sommerfeld”, e em colaboração com Paul Knipping (1883–1935), Friedrich dedicou-se ao inédito estudo experimental da difração de raios X por cristais [41, 42]. Por esses estudos e pelo desenvolvimento da “espectroscopia de raios X”, Max von Laue foi laureado com o Prêmio Nobel de Física em 1914.

¹⁰ Foi somente alguns anos mais tarde que o máximo de ressonância encontrado por James R. Wright [45] foi atribuído a um efeito seletivo: a falta de um limiar para erros sistemáticos em sua técnica experimental.

Doze dias depois, Einstein utilizou o mesmo argumento para criticar diretamente as tentativas de relacionar a constante de Planck (h) com propriedades mecânicas. Na seção final (“§4. A rotação de moléculas gasosas: a hipótese de Sommerfeld”) da apresentação de seu trabalho “Sobre o estado atual do problema do calor específico” [50], ele discutiu como a radiação eletromagnética é emitida ou absorvida durante colisões em um sistema fechado e em equilíbrio térmico contendo moléculas de gás eletricamente carregadas. Einstein demonstrou que há uma relação entre a energia do movimento translacional de moléculas de gás carregadas e a emissão de radiação durante colisões ($h\nu \leq E$). Isso implica que as moléculas devem colidir de modo a não emitirem frequências que sejam inconsistentes com a lei de Kirchhoff e com a fórmula da radiação de corpo negro de Planck (ou de Wien). Como escrito em sua carta dias antes – “*A fórmula de radiação mostra que estruturas elementares eletricamente carregadas, que colidem com baixa velocidade (energia), não emitem radiação de ondas curtas*” –, argumentou que somente colisões abruptas resultariam em radiação de ondas curtas (alta frequência). A conclusão de Einstein foi que, nessa situação específica, as colisões não podem ser súbitas, mas devem ocorrer de forma gradual, por etapas, com certa duração mínima associada, de modo que frequências acima de um valor máximo ($\nu_{\text{máx}} = 1/t_{\text{mín}}$) não sejam geradas. Reescrevendo a equação na forma de $h = E.t$, observou:

Portanto, para derivar a hipótese de Sommerfeld da equação da radiação, basta essencialmente assumir que a energia dos elétrons determina estritamente a emissão de radiação. Se essa linha de raciocínio corresponder à realidade, um sistema elementar carregado, como um elétron, perde apenas uma fração muito pequena de sua energia cinética em uma colisão, no caso de velocidades de elétrons como as que ocorrem no efeito fotoelétrico (sem ressonância) ou em raios catódicos não muito rápidos. Se considerarmos a aceleração de elétrons por radiação como o reverso de tais processos de emissão, inclinamo-nos à ideia de que essas acelerações também devem ocorrer em muitas etapas. Como já foi observado, esperar-se-ia então que, sob condições idênticas, por exemplo, no efeito fotoelétrico, os elétrons emergiriam com velocidades menores de camadas finas irradiadas do que de camadas mais espessas [50, p. 214–215].

Ao contrário de Sommerfeld, que considerava o processo contínuo, Einstein o tratava como um evento singular, ocorrendo instantaneamente. No entanto, ao calcular a energia total irradiada, Einstein obteve uma expressão divergente, que ajustou eliminando as frequências mais altas da série de Fourier, mantendo apenas aquelas que

atendiam à condição quântica $h\nu \leq E$. Apesar de partir de uma base teórica diferente, os cálculos de Einstein resultaram em expressões semelhantes às de Sommerfeld, excetuando-se por fatores numéricos insignificantes [4, p. 120].

De uma maneira geral, observa-se que, entre todos os participantes da discussão no I Congresso de Solvay, somente Planck e Lorentz se mostraram mais favoráveis à interpretação semiclássica de Sommerfeld em comparação com a interpretação quântica de Einstein. Essas discussões deixaram claro para Sommerfeld que sua “teoria do quantum de ação” (ou “hipótese- h ”) ainda não era suficientemente robusta, convencendo-o da necessidade de modificá-la quando fosse necessário; o que de fato ocorreu nos dois anos seguintes, em colaboração com seu assistente de longa data, Peter Debye.

4. A Reformulação da “hipótese- h ” por Sommerfeld-Debye

Nos dois anos seguintes, a “hipótese- h ” continuou a ser desenvolvida e refinada. Em abril de 1913, com a colaboração do físico-químico neerlandês Peter Debye, foi publicado um trabalho de síntese detalhando, em 58 páginas, sua compreensão sobre “A Teoria do Efeito Fotoelétrico do Ponto de Vista do *Quantum* de Ação” [8]¹¹. Os autores mantiveram como condição inicial que a energia transferida nas interações atômicas depende unicamente do intervalo de tempo em que a absorção ou emissão ocorre. Esse ponto de partida englobava tanto eventos periódicos quanto não periódicos. Assim, novamente, a “ação”, calculada na forma mais simples pelo produto da energia (E) com o intervalo de tempo (t), estava diretamente associada à constante de Planck (h). Nas suas palavras:

Parece necessário admitir que o tempo dispendido para a matéria absorver ou ceder uma certa quantidade de energia é tanto menor quanto maior for a energia, de modo que o produto da energia pelo tempo – ou melhor, segundo a definição precisa que daremos, a integral da energia em relação ao tempo – está relacionada à magnitude da constante de Planck (h) [8].

Considerando nossas experiências cotidianas, a proposta de Sommerfeld-Debye parece absurda. Caso fosse aplicada ao movimento de um projétil atingindo uma parede, dever-se-ia inferir que um projétil de alta velocidade (ex: 300 m/s) seria desacelerado em menor tempo e, portanto, perfuraria muito menos a parede do que outro projétil de baixa velocidade (ex: 50 m/s). No entanto, em 1911, era exatamente isso que as análises das medidas

¹¹ Em virtude desse trabalho colaborativo, doravante, designaremos essa teoria semiclássica como “hipótese- h ” de Sommerfeld-Debye.

experimentais disponíveis sugeriam para o fenômeno de produção de raios X. As investigações apontavam que a distância de frenagem era menor para os elétrons de altas velocidades [9].

Sommerfeld-Debye propuseram uma visão que contradizia a ideia predominante da época sobre o significado físico da constante de Planck (h) para a estrutura atômica. Enquanto os dois cientistas consideravam que a própria existência do átomo era uma consequência do ‘*quantum* de ação [elementar]’ (“ h ”), o entendimento de muitos físicos era de que a constante de Planck (h) poderia ser derivada a partir de uma estrutura particular do átomo. Além disso, ambos consideravam desnecessário e improdutivo buscar alguma explicação eletromagnética ou dinâmica para a constante de Planck (h). Em síntese, estavam convencidos de que a formulação da lei de Planck correspondia a uma espécie de “*quantum* de ação” elementar e universal, destinado, mais cedo ou mais tarde, a eliminar as sérias dificuldades e contradições enfrentadas pela física teórica de sua época [33].

Com base nessas premissas e após algumas alterações sugeridas por Max Planck¹² [4, p. 114–117], Sommerfeld e Debye adotaram como hipótese fundamental em seu modelo teórico que, em todos os processos puros de interação entre átomo e elétron, sejam eles emissivos ou absorventes, um “*quantum* de ação [elementar]” definido e igual a “ $h/2\pi$ ” sempre é retirado ou fornecido ao sistema [8]. O modelo teórico desenvolvido pressupõe, portanto, que a lei de Planck ($E = h \cdot \nu$) está relacionada ao conceito de “ação” da função hamiltoniana ($\int_0^t H dt$) na forma de um postulado, definindo um “*quantum* de ação universal” para os processos atômicos elementares não periódicos e descontínuos¹³. Matematicamente, essa condição pode ser representada como uma integral da função hamiltoniana H :

$$W = \int_0^t H dt = \int_0^t (T - U) dt = \frac{h}{2\pi} \quad (3)$$

em que T é a energia cinética e U é a energia potencial elástica¹⁴ do sistema considerado, e t é o intervalo de tempo de transferência contínua de energia no processo de emissão ou absorção. Tal postulado algumas vezes também é denominado “Princípio de Ação” de Sommerfeld-Debye.

¹² Troca de cartas entre Planck e Sommerfeld em 06/04/1911 e 29/07/1911 (cf. ref. [2], ver notas n. 130 e n. 132).

¹³ Max Planck aplicou a ideia de “*quantum* de ação” como “Princípio de Menor Ação” para sistemas periódicos elementares em 1906, a fim de desenvolver sua segunda teoria da radiação do corpo negro. Adicionalmente, ele também sugeriu que uma generalização seria possível quando afirmou que “(...) toda mudança na natureza corresponde a um número definido de elementos de ação” [5].

¹⁴ Sommerfeld assumiu que a dinâmica do movimento vibracional do elétron no interior da estrutura atômica obedecia a lei de Hooke para força elástica ($F = -k \cdot x$). No caso mais simples e ideal analisado por ele, o movimento vibracional se dava de forma isolada e sem nenhum tipo de amortecimento.

A ideia principal de Sommerfeld e Debye era estabelecer o “*quantum* de ação” e a “*hipótese-h*” como postulados, ou seja, como um princípio que possibilitasse deduzir suas consequências teóricas e experimentais, bem como relacionar vários fenômenos envolvendo absorção e produção de luz, como a produção de raios X e γ , o potencial de ionização e o efeito fotoelétrico.

5. Uma Interpretação Semiclássica do Efeito Fotoelétrico

Foi em uma troca de cartas entre Einstein e Sommerfeld, datada de 19 de janeiro de 1910, logo após a publicação do artigo de Sommerfeld sobre a distribuição da energia da radiação de raios X em função da direção, que o fenômeno do efeito fotoelétrico emergiu na discussão. Einstein propôs o seguinte experimento mental para explorar a natureza da interação entre a radiação eletromagnética e os elétrons dos átomos de uma superfície metálica (cf. Figura 3):

Suponha que o elétron E seja interrompido na parede W . (...) Considere o processo descrito acima e suponha, além disso, que o sistema esteja envolvido por uma casca esférica impermeável aos raios Röntgen [raios X], contendo apenas um pequeno orifício. Atrás desse orifício, encontra-se uma placa metálica P . Sabemos que, nesse caso, a placa metálica $[W]$ emite raios secundários [raios X] cuja energia cinética é da mesma ordem de grandeza que a dos elétrons incidentes E , e é independente da abertura do orifício na casca esférica [49, p. 146–147].

Einstein ainda perguntou:

A placa P possui a propriedade de armazenar de maneira tão parcimoniosa fragmentos das ondas esféricas de raios X até que seja capaz de equipar um de seus ‘filhotes eletrônicos’ [fotoelétrons] com uma quantidade respeitável de energia, permitindo que eles possam atravessar o espaço com intensidade e o vigor condizentes com seu nascimento roentgeniano [49, p. 147].

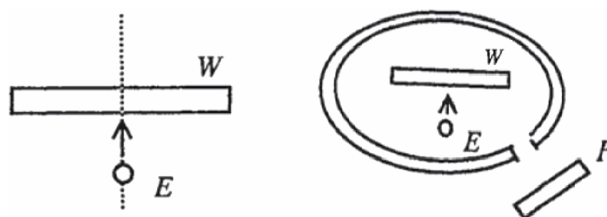


Figura 3: Ilustração do experimento mental de Albert Einstein. Fonte: Adaptado de [49, p. 146–147].

Nota-se que Einstein está questionando o mecanismo pelo qual a energia cinética do fotoelétron emitido é determinada exclusivamente pela energia do elétron incidente no anticátodo, sem depender da geometria ou do tamanho da abertura que permite a passagem dos raios X. Ele também examina se é razoável assumir que a placa metálica possa reunir e concentrar a energia dos raios X de maneira suficientemente precisa para transferir exatamente a quantidade necessária de energia a um único elétron. Com esse experimento mental, Einstein aponta algumas inconsistências na explicação de Sommerfeld acerca da interação entre a radiação eletromagnética e a emissão de elétrons, sugerindo que a teoria clássica do eletromagnetismo é incapaz de descrever com precisão a emissão de fotoelétrons sem considerar a introdução de conceitos quânticos.

Esses apontamentos de Einstein foram indiretamente abordados no extenso artigo de 1913 (“A Teoria do Efeito Fotoelétrico do Ponto de Vista do *Quantum* de Ação”). Como exposto anteriormente, a solução de Debye e Sommerfeld foi postular que, durante um intervalo de tempo finito (t) dispendido para o elétron ser liberado da ligação atômica com a energia cinética (T) recém alcançada, “o átomo teria acumulado energia vibracional no movimento de seus elétrons até que a magnitude de “*quantum* de ação” atingisse o valor $h/2\pi$ ” [8].

Nessa perspectiva semiclássica, o fenômeno do efeito fotoelétrico foi interpretado da seguinte forma: uma radiação eletromagnética incidente, de frequência (ν), seria capaz de fazer um elétron oscilar harmonicamente cada vez mais, por efeito de ressonância ondulatória gerada pela interação com o campo elétrico oscilante dessa radiação [$E = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$]. Após um intervalo de tempo (t), a quantidade de energia cinética do elétron se tornaria grande o suficiente para romper sua ligação atômica (“*quantum* de ação = $h/2\pi$ ”), permitindo sua ejeção abrupta do átomo [8].

Utilizando as equações clássicas (newtonianas) para o movimento harmônico forçado do elétron, Sommerfeld e Debye demonstraram que, ao resolver a equação (3), a energia cinética (T) do elétron, resultante das oscilações induzidas pela radiação, é diretamente proporcional à frequência natural ν_0 de vibração do elétron dentro da estrutura atômica, conforme descrito pela equação $T = h \cdot \nu_0$. Como a condição $\nu \approx \nu_0$ deve ser satisfeita para ocorrer um processo de transferência de energia por ressonância ondulatória, também se pode afirmar que $T = h \cdot \nu$, semelhante à expressão deduzida por Einstein em 1905, embora por meio de sua audaciosa e até então rejeitada “hipótese de *quantum* de luz” [8]^{15,16}.

Adicionalmente, no caso de ν ligeiramente diferente de ν_0 , Sommerfeld e Debye demonstraram que para $\nu > \nu_0$ o efeito fotoelétrico também ocorreria de acordo com a equação (3), mas desapareceria se $\nu < \nu_0$. Isso sinalizava uma total concordância com as observações experimentais obtidas desde as pesquisas de Philipp Lenard em 1902. O consenso experimental de que a energia cinética dos fotoelétrons ejetados dependia da frequência (ν) da radiação eletromagnética incidente, mas não de sua intensidade, foi considerado por Sommerfeld e Debye como uma consequência direta de seu “Princípio de Ação” ou, de outro modo, como uma evidência para considerar a validade desse princípio [8].

De acordo com alguns historiadores da ciência, o ponto que merece destaque neste momento é que, pela primeira vez, a equação fotoelétrica proposta por Einstein em 1905 foi derivada, de maneira satisfatória, isto é, sem o uso excessivo de hipóteses *ad hoc*, com base na teoria clássica do eletromagnetismo e em uma estrutura atômica particular. Ou seja, essa derivação sugeria que a “hipótese do *quantum* de luz” poderia ser desnecessária para explicar as diversas observações experimentais sobre o efeito fotoelétrico, fornecendo suporte teórico-experimental para que outros cientistas justificassem sua rejeição à teoria quântica da radiação [5, 6, 9].

Já mencionamos que, embora os modelos de Einstein [18] e Sommerfeld-Debye [8] concordem que há uma transferência de energia da radiação para um elétron ligado à estrutura atômica, e utilizem a relação $E = h\nu$ para descrever essa energia, a principal diferença está na natureza do processo. Einstein propõe que a transferência ocorre de forma instantânea e em unidades inteiras e discretas de “*quantum* de luz”, enquanto Sommerfeld-Debye fundamenta seu modelo nas propriedades de ressonância ondulatória, onde a energia cinética do elétron aumenta de forma contínua ao longo de um intervalo de tempo finito (cf. Seção 3).

Com efeito, pode-se fazer um paralelo entre as controvérsias científicas Einstein-Sommerfeld/Debye e Einstein-Millikan. Sommerfeld e Debye aceitavam a hipótese de “*quantum* de ação” de Planck no cálculo da energia absorvida ou emitida pelo elétron, mas não no processo. Por outro lado, Millikan rejeitava categoricamente a hipótese de “*quantum* de luz”, afirmando que “[...] a ousada, para não dizer imprudente, hipótese de um corpúsculo de luz eletromagnética de energia $h\nu$, em que essa energia é transferida para os elétrons por meio da absorção [...] contraria completamente os fatos estabelecidos sobre a interferência da luz” [51].

seu modelo teórico era aplicado somente à interação pura entre átomo e elétron, a função trabalho deveria estar relacionada, assim como Einstein também sugeriu, à dissipação de energia cinética no percurso do elétron (após ser ejetado do átomo) até ser emitido da superfície metálica. Logo, a energia necessária para superar a função trabalho não era considerada como parte da equação fotoelétrica propriamente dita, mas sim como um fator externo ao processo de interação inicial entre radiação e elétron (cf. Ref. [8, p. 881–884]).

¹⁵ A derivação matemática da equação fotoelétrica de Einstein a partir do modelo de “hipótese-*h*” de Sommerfeld-Debye está disponibilizada, como “material suplementar”, ao final do texto.

¹⁶ Sommerfeld e Debye explicaram por que sua equação fotoelétrica não continha o termo negativo relacionado à função trabalho do material como na equação de Einstein. Segundo eles, como

Apesar de todas as suas discordâncias, Millikan reconheceu o valor preditivo da equação fotoelétrica de Einstein diante das observações experimentais. Logo no início de seu artigo de 1916, afirmou: “No entanto, somos confrontados por uma situação surpreendente em que esses fatos foram corretamente e precisamente previstos há nove anos por uma forma de teoria quântica que agora foi amplamente abandonada” [51]. E, em suas considerações finais, acrescentou:

Talvez ainda seja muito cedo para afirmar com absoluta confiança a validade geral e exata da equação fotoelétrica de Einstein. No entanto, é preciso reconhecer que os experimentos atuais fornecem uma justificativa muito melhor para tal afirmação do que foi encontrado anteriormente. Se essa equação se mostrar de validade geral, então, deve indubitavelmente ser considerada uma das equações mais fundamentais e abrangentes na física, ‘[...] e uma que é destinada a ter, no futuro, um papel quase tão importante quanto o desempenhado pelas equações de Maxwell no passado’ (Ref. [52, p. 227]), governando a transformação de toda a energia eletromagnética de comprimento de onda curto em energia térmica. No entanto, a teoria semicorpuscular pela qual Einstein chegou à sua equação parece ser totalmente insustentável no momento [51].

Em outras palavras, Millikan sustenta que os testes experimentais são capazes apenas de corroborar ou refutar uma “lei científica”, mas não uma “teoria científica”. Do ponto de vista da epistemologia contemporânea da ciência, não há contradição nesse tipo de pensamento. Sabe-se que, entre 1902 e 1914, houve pelo menos seis tentativas clássicas e/ou semiclássicas de interpretação do efeito fotoelétrico fundamentadas na teoria ondulatória eletromagnética e em modelos específicos para a estrutura atômica (cf. Ref. [6, p. 246–263]), sendo que algumas foram exitosas em derivar equações idênticas à “lei do efeito fotoelétrico”, como no caso específico da proposta da “*hipótese-h*” de Sommerfeld-Debye.

Portanto, a resistência de Millikan e Sommerfeld-Debye em relação aos fundamentos da “teoria quântica da radiação”, mas não em relação a algumas de suas “leis quânticas” derivadas, não é epistemologicamente problemática ou inconsistente. Se, por um lado, a refutação empírica de uma “lei” necessariamente representa uma séria dificuldade para a validação e aceitação geral da “teoria” subjacente; por outro lado, a sólida corroboração empírica de uma “lei” não implica necessariamente a validação da “teoria” subjacente da qual essa lei foi derivada.

Retomando a discussão sobre consequências preditivas do modelo semiclássico de Sommerfeld-Debye [8], outro ponto importante é que, em contraste com o modelo quântico de Einstein [18], o modelo semiclássico prediz

que a energia cinética do elétron ejetado é dependente do movimento vibracional natural do elétron no interior do átomo. De acordo com essa condição inicial, cada átomo possui uma frequência natural máxima de oscilação na qual os elétrons estão na iminência de serem ejetados. Isso implica que, para cada elemento químico, a energia cinética dos elétrons ejetados deve atingir um valor máximo, o qual pode ser observado indiretamente por meio de um potencial de corte limite, independente da frequência da luz incidente.

De outro modo, nota-se que a observação experimental requer uma dependência linear e contínua da energia cinética máxima ($T_{máx}$) do elétron ejetado em relação à frequência da luz incidente (ν) – evidência a favor da “hipótese de *quantum* de luz” de Einstein [18] – representaria uma séria dificuldade para Sommerfeld e Debye [8]. Isso se deve ao fato de que, nesse caso, para concordar com as observações, o modelo semiclássico exigiria um número essencialmente infinito de diferentes movimentos vibracionais dos elétrons dentro dos átomos; algo bastante improvável e em conflito com as evidências espectroscópicas de homogeneidade atômica da época.

Entretanto, em meados de 1913, as observações experimentais disponíveis a respeito da dependência da energia cinética dos fotoelétrons emitidos em relação à frequência da radiação incidente ainda não eram totalmente conclusivas. De fato, a controvérsia científica sobre a validade da equação fotoelétrica de Einstein somente seria dissipada em meados de 1916, com os resultados das pesquisas de Robert Millikan e seus colaboradores – por exemplo, James R. Wright [45] e William H. Kadesch [53] – no Laboratório de Física Ryerson, na Universidade de Chicago, Estados Unidos¹⁷. Esses resultados exerceriam uma influência determinante para o desenrolar dos acontecimentos; além disso, Sommerfeld e Debye estavam conscientes de que sua “*hipótese-h*” não seria aceita enquanto todas as suas consequências não fossem confirmadas empiricamente.

6. A Refutação da “*hipótese-h*” de Sommerfeld-Debye

No início de novembro de 1911, ao final dos debates e discussões no I Congresso de Solvay, Sommerfeld reconheceu que sua teoria necessitava de refinamentos, “[...] especialmente no que diz respeito à previsão de um tempo de acumulação t (ou tempo de atraso) muito maior do que o observado nos resultados experimentais” [34, p. 58]. De fato, essa previsão tornava-se ainda mais inconsistente quando o inevitável amortecimento da radiação era considerado e a luz incidente era tratada

¹⁷ Foi William H. Kadesch quem montou o equipamento decisivo para a obtenção dos resultados publicados por Millikan em 1916. Há uma extensa discussão na literatura sobre as tentativas de Millikan e seus colaboradores até chegar aos resultados de 1916 (cf. Ref. [54]).

de maneira mais realista, levando-se em conta uma faixa de frequências.

Segundo o historiador Bruce R. Wheaton [17, p. 184], “(...) em 1911, sabia-se muito pouco sobre o tempo de acumulação do efeito fotoelétrico. Somente alguns estavam cientes de que o físico russo Aleksandr [Grigor’evich] Stoletow [1839–1896] havia observado, em 1889, que o tempo de atraso não era superior a um milissegundo”. Quinze anos depois, Wilhelm Wien [31] estimou que, se fossem empregado pulsos de raios X nos experimentos, o tempo de acumulação seria da ordem de 0,01 segundos. Ele considerou esse resultado excessivamente longo, o que o levou a aceitar a “hipótese de gatilho” de Philipp Lenard [37]. Cinco anos mais tarde, Hendrik Lorentz [55] propôs uma solução analítica na qual o intervalo de tempo de acumulação, estimado classicamente para a luz monocromática de cor amarela de baixa intensidade, bastante conhecida por produzir o efeito fotoelétrico, poderia ser da ordem de 10 microssegundos¹⁸.

Na 83ª Reunião da Sociedade de Cientistas e Médicos Naturais Alemães, em 1911, Johannes Stark questionou Sommerfeld sobre o assunto. Ele respondeu que a inconsistência entre os dados teóricos e experimentais relacionados ao intervalo de acumulação poderia ser mitigada ao estender sua “hipótese-h” para a luz não monocromática. No entanto, Stark persistiu, argumentando que muitas das medições mais precisas do efeito fotoelétrico haviam sido realizadas com linhas espectrais nitidamente definidas. Einstein, que também estava presente no encontro, por sua vez, reconheceu que um ponto crítico havia sido levantado no debate e defendeu que futuras investigações experimentais, focadas especificamente no tempo de acumulação do efeito fotoelétrico, seriam de grande interesse¹⁹ [17, p. 184, 32, p. 1068–1069].

¹⁸ Essas informações sugerem que é um elemento de pseudo-história o cálculo simplista do tempo de atraso, tipicamente exemplificado nos livros didáticos. Nele, em geral, assume-se que toda a energia incidente na seção transversal do átomo se acumula em um elétron, produzindo o resultado $t \approx 2$ minutos. Ver Capítulo 2, exemplo 2.1, R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics: of atoms, molecules, solids, nuclei and particles* 2ª ed, (1985).

¹⁹ Essas informações sobre as medições do tempo de atraso permitem identificar outro elemento típico na estrutura textual das narrativas pseudo-histórias sobre o efeito fotoelétrico. Comumente, afirma-se erroneamente que, antes da publicação do famoso artigo de Einstein de 1905, a comunidade científica já estava ciente de que os resultados experimentais sugeriam uma grave falha nas previsões da teoria clássica do eletromagnetismo. Young & Freedman [56, cap. 38], por exemplo, descrevem inicialmente um conjunto de três previsões experimentais sobre o efeito fotoelétrico, baseadas na visão de James C. Maxwell a respeito da luz como uma onda eletromagnética. Entre essas previsões está a “Previsão n.º. 2”, segundo a qual seria esperado um tempo de atraso considerável no caso de uma iluminação muito fraca sobre uma superfície metálica. Em seguida, os autores afirmam: “O resultado experimental mostra-se muito diferente dessas previsões. A seguir, são apresentados os resultados obtidos entre os anos de 1877 e 1905: [...] **Resultado experimental 2:** não existe um intervalo de tempo mensurável entre o instante em que a luz é ligada e aquele em que o catodo emite fotoelétrons (supondo que a frequência da

A previsão do valor limite para o intervalo de tempo de acumulação é uma parte essencial da teoria semiclássica de Sommerfeld-Debye. A integral na equação (3) deve sempre ser calculada ao longo do intervalo de acumulação (t), uma vez que a energia cinética do elétron ejetado provém da luz incidente. No extenso artigo publicado em 1913, Sommerfeld e Debye deduziram uma expressão matemática específica para o tempo de atraso esperado para a luz monocromática. Para a linha verde, com comprimento de onda igual a $\lambda = 546$ nm no espectro de mercúrio, o tempo de acumulação estimado foi aproximadamente 87 microssegundos [8].

No entanto, apenas duas semanas antes de submeterem sua versão final da “Teoria do efeito fotoelétrico do ponto de vista do *quantum* de ação” para avaliação dos pareceristas da revista *Annalen der Physik*, os físicos Erich Anselm Marx (1874–1956) e Karl Lichtenecker (1882–1947), da Universidade de Leipzig (Alemanha), já haviam submetido à mesma revista um artigo com resultados experimentais bastante desfavoráveis à “hipótese-h”²⁰. Utilizando uma nova técnica experimental, que permitia maior precisão em comparação com tentativas anteriores²¹, Marx e Lichtenecker [57] concluíram que não foi observado nenhum tempo de atraso no início da fotoemissão até o limite da resolução temporal de seus equipamentos (0,15 microssegundos). Esse valor corresponde a menos de 1% do valor previsto por Sommerfeld e Debye [8] ou por Lorentz [55] para o acúmulo das ondas.

Gradualmente, surgiram cada vez mais evidências experimentais desfavoráveis à “hipótese-h” de Sommerfeld-Debye. As investigações de Arthur Llewelyn Hughes [59–61], Owen Richardson e Karl Compton [62], que atentaram para possíveis fontes de erro relacionadas às impurezas e à oxidação das superfícies metálicas em medições anteriores, levaram a novas observações de que a velocidade máxima dos elétrons ejetados aumentava ininterruptamente e linearmente com a frequência da radiação incidente, o que representava um importante suporte empírico à “hipótese do *quantum* de luz” de

luz supere a frequência de corte). Essa é uma verdade, independentemente do quanto a luz é fraca” [56, p. 204–205]. Uma vez que os resultados experimentais contradizem diretamente a descrição da luz feita por Maxwell como uma onda eletromagnética, os autores concluem essa etapa da narrativa pseudo-histórica com uma afirmação que prepara o leitor para subsequente apresentação da “teoria do fóton proposta por Einstein” como uma inevitável hipótese solucionadora. Na sequência, todas as observações experimentais inicialmente mencionadas, descritas como contraditórias e incompatíveis com a teoria clássica do eletromagnetismo, são agora explicadas na perspectiva da “teoria do fóton”. Nesse momento, não há qualquer menção a conflitos, incertezas ou controvérsias científicas emergentes. No entanto, como apontado em nosso texto, ao final de 1911, não havia na comunidade científica um consenso experimental sobre as medições do tempo de atraso no efeito fotoelétrico.

²⁰ O artigo de Marx e Lichtenecker foi recebido em 24 de março de 1913 (publicado no v. 346, n.º. 6), enquanto o de Debye e Sommerfeld foi recebido em 7 de abril de 1913 (publicado no v. 346, n.º. 10).

²¹ Houve várias tentativas. Marx e Lichtenecker [57] destacam a pesquisa realizada por Elster e Geitel [58].

Einstein. Embora esses resultados fossem contrários às expectativas de muitos físicos da época, foram recebidos com credibilidade e confiança [17, p. 188]. Três anos mais tarde, em 1916, Robert A. Millikan, em seu artigo intitulado “Uma determinação fotoelétrica direta do ‘h’ de Planck”, comentou, em sua descrição do estado da arte sobre as pesquisas até então realizadas sobre o efeito fotoelétrico, que “[...] inquestionavelmente, os trabalhos mais confiáveis nesse campo são aqueles realizados por Richardson e Compton, e por Hughes” [51].

De uma forma não planejada, um fator anterior às pesquisas experimentais de Richardson e Compton [62] e Marx e Lichtenecker [57] contribuiu de maneira decisiva para a refutação da “*hipótese-h*” de Sommerfeld-Debye. Os estudos sobre a natureza dos raios X na “Escola Sommerfeld” mudaram radicalmente de enfoque após Walter Friedrich, Max von Laue e Paul Knipping observarem com sucesso a existência de um padrão de interferência quando cristais foram bombardeados por raios X e γ [63, 64]. Em vez de fornecerem evidências em apoio à “*hipótese-h*”, esses resultados tornaram-na completamente desnecessária para validar a natureza ondulatória-eletromagnética dos raios X [9, 41, 42]. Além disso, as consequências da “*hipótese-h*” para a produção de raios X tornaram-se cada vez mais insustentáveis empiricamente. Por exemplo, o tempo necessário para a frenagem dos elétrons e emissão de raios X foi estimado em várias horas [17, p. 184].

Indiretamente, as pesquisas experimentais sobre a “*hipótese-h*” impulsionaram o surgimento e o desenvolvimento da espectroscopia e da difração de raios X por cristais na “Escola de Sommerfeld”. Essa nova área de pesquisas foi imediatamente reconhecida como promissora para investigar a estrutura atômica, elevando o prestígio internacional da “Escola de Sommerfeld” como um instituto de ponta nas pesquisas em física atômica [3]. Em pouco tempo, o fenômeno da difração de raios X por cristais tornou-se um dos principais assuntos debatidos pela comunidade de físicos e químicos, sendo o tema central das discussões do II Congresso de Solvay em 1913, que foi dedicado às pesquisas sobre a “Estrutura da Matéria”.

Ainda em 1913, especialmente após a publicação e aceitação do modelo atômico de Niels Bohr pela comunidade científica – cuja estrutura interna era incompatível com as premissas da “*hipótese-h*” – Sommerfeld e Debye perceberam que o efeito fotoelétrico também se tornara uma dificuldade real e intransponível para a “teoria do *quantum* de ação”. Assim, de maneira silenciosa, ambos abandonaram a “*hipótese-h*” e a “teoria do *quantum* de ação”.

7. Considerações Finais

Ao longo de sua carreira como físico teórico, Arnold Sommerfeld valorizou a importância da integração mais próxima entre resultados empíricos e conceitos teóricos.

Sua interpretação semiclássica para processos atômicos elementares, tais como a emissão de raios X, raios γ , potencial de ionização e o efeito fotoelétrico, conhecida como “*hipótese-h*”, surgiu, evoluiu e foi refutada à medida que novas evidências experimentais se tornavam disponíveis.

O “Princípio de Ação” de Sommerfeld-Debye, embora rapidamente descartado com o avanço subsequente da teoria quântica da radiação, tem sido abordado por historiadores da ciência devido à sua relevância como uma proposta embrionária e inovadora na interpretação do significado físico da constante de Planck (h). Esses historiadores consideram a proposta de Sommerfeld e Debye como um dos primeiros passos em direção a uma “nova mecânica”, que culminaria em avanços conceituais com a “teoria quântica de Bohr-Sommerfeld” de 1916 [4, cap. 6, 5, 9, 17, cap. 6].

Em consonância com nossas publicações anteriores [38, 65], este “Ensaio sobre História da Física Moderna” renova o esforço de chamar a atenção para as narrativas pseudo-históricas sobre o efeito fotoelétrico, em particular, no que tange às omissões seletivas e ao apagamento histórico das tentativas clássicas e semiclássicas de interpretação desse fenômeno.

O efeito fotoelétrico constitui um tema fértil para reflexões epistemológicas e sociológicas. Sob o prisma epistemológico, a análise desse episódio possibilita uma compreensão mais aprofundada da controvérsia científica em torno da rejeição da teoria quântica da radiação por uma parcela significativa da comunidade científica entre 1905 e 1925, especialmente no que diz respeito à influência de ideias preconcebidas sobre a teoria clássica do eletromagnetismo e à forma como essas ideias dificultaram a aceitação de uma interpretação quântica dos resultados experimentais. Já sob a perspectiva sociológica, ao se analisar as razões pelas quais muitos cientistas resistiram ao modelo quântico proposto por Albert Einstein, é possível reconhecer com maior clareza as complexidades do processo não linear de construção do conhecimento científico.

Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online: Derivação Matemática da “Lei do Efeito Fotoelétrico”, por Debye-Sommerfeld (1913).

Referências

- [1] J.P. Braga, Rev. Bras. Ensino Física **38**, e4306 (2016).
- [2] M. Eckert, *Arnold Sommerfeld: Science, Life and Turbulent Times 1868–1951* (Springer, New York, 2013).
- [3] M. Eckert, *Establishing Quantum Physics in Munich: Emergence of Arnold Sommerfeld’s Quantum School* (Springer International Publishing, Cham, 2020).
- [4] A. Hermann, *The Genesis of Quantum Theory (1899–1913)* (MIT Press, Cambridge, 1971).
- [5] S. Nisio, Jpn. Stud. Hist. Sci. **12**, 39 (1973).

- [6] R.H. Stuewer, *Historical and Philosophical Perspectives of Science* (University of Minnesota Press, Chicago, 1970).
- [7] A.J.W. Sommerfeld, *Sitzungsberichte Math.-Phys. Kl. Bayer. Akad. Wiss. Münch.* **1**, 1 (1911a).
- [8] P. Debye e A.J.W. Sommerfeld, *Ann. Phys.* **346**, 873 (1913).
- [9] M. Eckert, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **224**, 2057 (2015).
- [10] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [11] F.J. Lambert, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **224**, 2023 (2015).
- [12] R.H. Stuewer, em: *Camb. Companion Einstein*, editado por M. Janssen e C. Lehner (Cambridge University Press, Cambridge, 2014).
- [13] E.N.D.C. Andrade, *Sci. Am.* **195**, 93 (1956).
- [14] J.L. Heilbron, *Isis* **57**, 336 (1966).
- [15] M.A. El'yashevich, *Sov. Phys. Uspekhi* **13**, 1 (1970).
- [16] H. Kragh, *Niels Bohr and the Quantum Atom: The Bohr Model of Atomic Structure 1913–1925* (Oxford University Press, Oxford, 2012).
- [17] B.R. Wheaton, *The Tiger and the Shark: Empirical Roots of Wave-Particle Dualism* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
- [18] A. Einstein, *Ann. Phys.* **322**, 132 (1905).
- [19] A. Sommerfeld, *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Deutsches Museum, Berlin, 2000).
- [20] A.J.W. Sommerfeld, *Phys. Z.* **2**, 55 (1900).
- [21] A.J.W. Sommerfeld, *Math. Ann.* **47**, 317 (1896).
- [22] A.J.W. Sommerfeld, *Z. Für Math. Phys.* **46**, 11 (1901).
- [23] A.J.W. Sommerfeld, *Phys. Z.* **1**, 105 (1889).
- [24] J. Stark, *Phys. Z.* **10**, 579 (1909a).
- [25] J. Stark, *Phys. Z.* **10**, 902 (1909b).
- [26] A.J.W. Sommerfeld, *Phys. Z.* **10**, 969 (1909).
- [27] M. Planck, *Ann. Phys.* **309**, 553 (1901).
- [28] E. von Schweidler, *Phys. Z.* **11**, 225 (1910).
- [29] E. Meyer, *Jahrb. Radioakt. Elektron.* **7**, 279 (1910).
- [30] A.S. Russell e F. Soddy, *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **21**, 130 (1911).
- [31] W. Wien, *Ann. Phys.* **323**, 991 (1905).
- [32] A.J.W. Sommerfeld, *Phys. Z.* **12**, 1057 (1911b).
- [33] A.J.W. Sommerfeld, em: *Théorie Rayonnem. Quanta Rapp. Discuss. La Réunion Tenue À Brux. 30 Octobre Au 3 Novembre 1911 Sous Auspices ME Solvay*, editado por P. Langevin e M. de Broglie (Gauthier-Villars, Paris, 1912).
- [34] J. Mehra, *The Solvay Conferences on Physics: Aspects of the Development of Physics Since 1911* (Springer, New York, 2011).
- [35] D.K. Barkan, *Sci. Context* **6**, 59 (1993).
- [36] P. Langevin e M. de Broglie, *La théorie du rayonnement et les quanta: rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911, sous les auspices de M.E. Solvay* (Gauthier-Villars, Paris, 1912).
- [37] P.E. von Lenard, *Ann. Phys.* **313**, 149 (1902).
- [38] R.S.S. Suttini, J.J. Caluzi e N.C.G. Errobidart, *Rev. Bras. Ensino Física* **46**, e20230369 (2024).
- [39] C.A. dos Santos, *A luz e algumas de suas tecnologias: um estudo da física* (Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017).
- [40] R.H. Kargon, *Isis* **68**, 509 (1977).
- [41] M. Eckert, *Acta Crystallogr. A* **68**, 30 (2012).
- [42] M. Eckert, *Ann. Phys.* **524**, A83 (2012).
- [43] E.R.W. Ladenburg, *Berichte Dtsch. Phys. Ges.* **9**, 504 (1907).
- [44] A.W. Hull, *Am. J. Sci.* **28**, 251 (1909).
- [45] J.R. Wright, *Phys. Rev. Ser. I* **32**, 243 (1911).
- [46] F.A. Lindemann, *Berichte Dtsch. Phys. Ges.* **13**, 482 (1911).
- [47] R.W. Pohl e P. Pringsheim, *Verhandlungen Dtsch. Phys. Ges.* **12**, 1039 (1910).
- [48] R.W. Pohl e P. Pringsheim, *Verhandlungen Dtsch. Phys. Ges.* **13**, 474 (1911).
- [49] A. Einstein, *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 5: The Swiss Years: Correspondence, 1902–1914* (Princeton University Press, Princeton, 1989).
- [50] A. Einstein, *Collect. Pap. Albert Einstein Vol. 3 Writ. 1909–1911* (Princeton University Press, Princeton, 1889).
- [51] R.A. Millikan, *Phys. Rev.* **7**, 355 (1916).
- [52] R.A. Millikan, *The Electron: its isolation and measurement and the determination of some of its properties* (The University of Chicago Press, Chicago, 1917).
- [53] W.H. Kadesch, *Phys. Rev.* **3**, 367 (1914).
- [54] C.A. dos Santos, *Rev. Bras. Ensino Física* **40**, e3602 (2018).
- [55] H.A. Lorentz, *Phys. Z.* **11**, 205 (1910).
- [56] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física IV – Sears e Zemansky: ótica e física moderna* (Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2016).
- [57] E. Marx e K. Lichtenecker, *Ann. Phys.* **346**, 124 (1913).
- [58] J.J.P. Elster e H.F.K. Geitel, *Phys. Z.* **13**, 468 (1912).
- [59] A.L. Hughes, *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **25**, 683 (1913).
- [60] A.L. Hughes, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Contain. Pap. Math. Phys. Character* **212**, 205 (1912).
- [61] A.L. Hughes, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **16**, 376 (1911).
- [62] O.W. Richardson e K.T. Compton, *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **24**, 575 (1912).
- [63] W. Friedrich, P. Knipping e M. Laue, *Ann. Phys.* **347**, 1064 (1913).
- [64] W. Friedrich, P. Knipping e M. Laue, *Ann. Phys.* **346**, 971 (1913).
- [65] R.S.S. Suttini, J.J. Caluzi e N.C.G. Errobidart, *Rev. Bras. Ensino Física* **45**, e20230188 (2023).