

Os conceitos de massa e força na mecânica newtoniana: uma abordagem lógica

Concepts of mass and force in Newtonian mechanics: a logical approach

O.A. Acevedo^{*1}

¹Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, 15081, Lima, Perú.

Recebido em 12 de agosto de 2025. Revisado em 31 de outubro de 2025. Aceito em 02 de dezembro de 2025.

Ordinariamente se assume que a massa e a força, por serem conceitos cotidianos, são bem conhecidas por todos. Porém, é um fato que essas grandezas são, muito pelo contrário, pouco conhecidas, uma vez que uma definição precisa do que elas são é dificilmente encontrada na literatura. Nesse artigo, apresentamos uma construção detalhada desses conceitos atrelada em alguns fatos experimentais e na ideia central, sugerida pelos mencionados fatos e desenvolvida especialmente por Saint-Venant e Desloge, de formular a descrição da interação dos corpos através das grandezas conservadas em suas colisões. Dessa forma, e em concordância com o ponto de vista estritamente lógico, mostramos que o conceito de massa antecede à segunda lei de Newton e à definição de força. Argumentamos então que a segunda lei de Newton tem duplo papel: ela é a definição de força, porém é também, sem isso ser alguma contradição, uma lei dinâmica. No meio, o conceito de campo de forças surge como uma necessidade filosófica exigida pelo método indutivo da ciência. Finalizamos discutindo brevemente alguns dos pontos usualmente levantados contra outras propostas de definição de massa.

Palavras-chave: Massa, força, segunda lei de Newton, mecânica clássica.

Ordinarily it is assumed that the mass and the force, being everyday concepts, are well known by everyone. However, it is a fact that those quantities are, by the contrary, little known, as a precise definition of them is hardly seen in the literature. In this paper, we present a detailed construction of these concepts based in some experimental facts and the central idea, suggested by these facts and developed specially by Saint-Venant and Desloge, of formulating the description of the interaction of bodies through the quantities conserved in their collisions. In this manner, and in accord with the strictly logic point of view, we show that the concept of mass precludes Newton's second law and the definition of force. We then argue that the role of Newton's second law is twofold: it is the definition of force, but it is also, without contradiction, a dynamical law. In the middle, the concept of force field arises as a philosophical necessity required by the inductive method of science. We conclude by briefly discussing some of the points usually raised against other proposals for defining mass.

Keywords: Mass, force, second Newton's law, classical mechanics.

1. Introdução

Ordinariamente, um estudante enfrenta dúvidas e dificuldades para compreender profundamente o significado das primeiras duas leis de Newton. Porém, embora seja isto algo comum, não são poucos os tratados sobre a mecânica clássica que decidem simplesmente não aprofundar o assunto, colocando em primeiro plano o desenvolvimento das técnicas de cálculo e resolução de problemas. O estudante, ainda com dúvidas, vê-se forçado a esquecê-las para poder seguir o ritmo da matéria, e poucas vezes se observa que futuramente retorne a esses questionamentos. Até que ponto isto traz consequências demasiado graves, não sabemos dizê-lo, mas se focarmos objetivamente nossa atenção na física em si mesma, é certo que se ela, como ciência não puramente empírica como também lógica, é dita

consistente, então os mencionados problemas têm de ser completamente esclarecidos.

Um exemplo do antes mencionado é o fato de supor que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda, ponto de vista defendido, por exemplo, nas Refs. [1, 2]. Não se encontra, porém, nessas referências, uma argumentação em favor do ponto de vista adotado, limitando-se os autores a uma breve menção, talvez por acreditarem eles ser algo muito evidente. Por exemplo, na Ref. [1], diz-se:

Devemos notar que nos sistemas não inerciais não são válidas nem a primeira nem a segunda lei de Newton (já que a primeira é um caso particular da segunda).

Mais extensa – porém, não mais esclarecedora – é a apresentação na Ref. [2]:

A segunda [lei de Newton] diz que a força total que age numa partícula é igual ao

*Endereço de correspondência: oacevedos@unmsm.edu.pe

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

produto da massa daquela partícula pela aceleração por ela sofrida. A primeira lei diz que uma partícula permanece em seu estado de repouso ou movimento retilíneo e uniforme (isto é, sua aceleração é 0) enquanto não ajam forças sobre ela. Essa primeira lei é evidentemente uma consequência da segunda, pois se o lado esquerdo (quer dizer, a força que age sobre a partícula) da equação com que se expressa a segunda lei é 0, então o lado direito tem de ser 0 também; o lado direito, no entanto, é o produto de dois fatores, um dos quais – a massa – não pode ser 0; portanto a aceleração tem de ser 0, que é precisamente o que afirma a primeira lei.

Não podemos ler esses trechos sem lembrar imediatamente das críticas severas que Berkeley colocou sobre a lei de gravitação de Newton [3], exaltando precisamente o fato de que, embora *pareça* explanatória, na verdade, é incompreensível por usar termos não definidos previamente, especialmente, o termo *força*. Afinal, embora essa palavra forma, sem dúvida, parte de nosso vocabulário cotidiano e a ela damos uma significação cotidiana mais ou menos clara, não por isso resulta claro seu uso dentro de uma equação, pois isso implica que sabemos como medi-la – o que requer uma definição além do cotidiano. Da mesma forma, embora não tenhamos ânimo de contestar a referências por outro lado tão meritórias, não conseguimos compreender o que as citas antes colocadas estão nos querendo dizer, pois nos parece que, também nelas, o uso das palavras é ambíguo e, por isso, ininteligível. Evidentemente, nossas dificuldades de compreensão resultariam solucionadas se pudéssemos voltar ligeiramente para trás no arcabouço conceitual da mecânica e definir, de forma inteiramente rigorosa, o que entenderemos por massa e por força. Eis o objetivo do presente artigo, que se divide, para tal tarefa, da forma seguinte.

Na seção 2 estabelecemos brevemente o que são os conceitos comparativos e os conceitos métricos, especificando também quando eles serão chamados extensivos. Essas definições são colocadas em correspondência com o conceito de massa, cuidadosamente construído, na seção 3. A seguir, nas seções 4 e 5 discutimos o status da segunda lei de Newton, primeiro como definição de força e depois como lei dinâmica. Na última seção 6 apresentamos nossas considerações em relação à relevância do assunto para a possível axiomatização da mecânica newtoniana e em relação a algumas objeções que poderiam ser levantadas ao aqui argumentado.

2. Conceitos Comparativos e Conceitos Métricos

Para compreendermos adequadamente o conceito de massa, é preciso considerar inicialmente como surgem os conceitos métricos de modo geral. Não iremos nos deter

demasiado nesse ponto, não porque seja pouco importante – ocorre exatamente o contrário –, mas porque o assunto já foi tratado com detalhe nas Refs. [2, 4], cuja leitura recomendamos. Nos limitaremos a mostrar a continuação algumas definições relevantes.

Definição 1. Um *sistema comparativo* é uma terna ordenada $(A; \sim; \prec)$ com A um conjunto e $\sim, \prec$ relações binárias em A tais que $\sim$ é uma relação de equivalência, chamada *coincidência*, e $\prec$, chamada *precedência*, é transitiva $(\forall x, y, z \in A : x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z)$ e irreflexiva $(\forall x, y \in A : x \prec y \Rightarrow \neg(y \prec x))$. Ademais, todos os elementos de A são comparáveis por coincidência ou precedência, isto é, $\forall x, y \in A : x \prec y \vee x \sim y \vee y \prec x$.

As relações de coincidência e precedência estão, intuitivamente, relacionadas a alguma propriedade compartilhada do conjunto A de objetos físicos. Logo, dados $x, y \in A$, estabelecemos que $x \sim y$ se x e y coincidem em relação à propriedade de que se trata (por exemplo, volume), e que $x \prec y$ se x precede y em relação a ela (por exemplo, se o volume de x é menor que o de y). Note que as relações de coincidência e precedência não informam com exatidão em que medida a propriedade em y é maior que a mesma em x , apenas indica que é maior. Em particular, não se associa um número à propriedade.

Isto último, porém, pode ser remediado. Considere como exemplo, ao mesmo tempo trivial e extremamente importante, como ver-se-á, de sistema comparativo a terna $(\mathbb{R}; =; <)$. Embora nesse caso é claro que o conjunto $A = \mathbb{R}$ não é um conjunto de objetos físicos, ele tem justamente o que estava faltando – números. Por isso, assignar à propriedade um número, de modo que tal assignação respeite as relações de coincidência e precedência, é possível mediante a seguinte definição.

Definição 2. Um *sistema métrico* associado ao sistema comparativo $(A; \sim; \prec)$ é um homomorfismo entre ele e o sistema comparativo $(\mathbb{R}; =; <)$, isto é, um mapa $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall x, y \in A : (x \sim y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)) \wedge (x \prec y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)). \quad (1)$$

Assim, o sistema métrico tem a vantagem de permitir comparações exatas entre os elementos do conjunto A , relativamente à propriedade que agora está **metrificada**.

É claro que com um mesmo sistema comparativo podem ser associados infinitos sistemas métricos. Por exemplo, de modo geral, dado um sistema métrico particular, qualquer composição dele com uma função monotônica em $\mathbb{R}$ será um outro sistema métrico igualmente admissível por satisfazer igualmente à equação (1). Porém, algumas propriedades físicas possuem a peculiaridade de serem **extensivas**, o que significa que existe uma operação adicional de composição no conjunto A que satisfaz à definição que segue.

Definição 3. Um *sistema comparativo extensivo* é uma *quaterna ordenada* $(A; \sim; \prec; \oplus)$ com $(A; \sim; \prec)$ um sistema comparativo e $\oplus : A \times A \rightarrow A$ um mapa chamado *composição* tal que $\forall x, y, z \in A$:

- I) $x \oplus (y \oplus z) \sim (x \oplus y) \oplus z$ (*associatividade*).
- II) $x \oplus y \sim y \oplus x$ (*comutatividade*).
- III) $x \prec y \Leftrightarrow x \oplus z \prec y \oplus z$ (*monotonia*).
- IV) $x \prec x \oplus y$ (*positividade*).
- V) $\exists n \in \mathbb{N} : x \prec ny$ (*propriedade arquimediana*)
 $[ny := y \oplus \dots \oplus y \text{ (} n \text{ vezes)}]$.

Naturalmente, nem todas as propriedades são extensivas, sendo o exemplo típico a densidade, com a mistura como operação de composição, que falha em ser positiva e arquimediana. O volume, por outro lado, com operação de composição sendo simplesmente o considerar os dois corpos em conjunto, satisfaz a todas essas condições, e por isso dá lugar a um sistema comparativo extensivo.

Outra vez, há um exemplo trivial de sistema comparativo extensivo que se torna importante para assignar um número à propriedade de modo que se respeite a extensividade. Trata-se do $(\mathbb{R}; =; <; +)$.

Definição 4. Um *sistema métrico extensivo* associado ao sistema comparativo extensivo $(A; \sim; \prec; \oplus)$ é um homomorfismo entre ele e o sistema comparativo extensivo $(\mathbb{R}; =; <; +)$, isto é, um mapa $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ que é sistema métrico e tal que:

$$\forall x, y \in A : \varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y). \quad (2)$$

Embora há, como antes, infinitos sistemas métricos extensivos possíveis associados a um determinado sistema comparativo extensivo, uma vez que se tem estabelecido um deles, de fato, as possíveis transformações dele são restritas de forma que apenas mudanças de escala são possíveis [2]: se φ é um sistema métrico extensivo, então qualquer outro sistema métrico extensivo é da forma $\psi = k \cdot \varphi$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

3. O Conceito de Massa

Vamos agora nos ocupar especificamente em construir o conceito de massa. Desenvolveremos esse assunto em três partes. Assumiremos, por outro lado, que os conceitos métricos extensivos de tempo e longitude já foram estabelecidos (o que não é uma tarefa especialmente difícil na mecânica newtoniana, pois, sendo cinemáticas, são noções intuitivamente muito claras), de modo que, particularmente, a palavra *velocidade*, derivada das anteriores, se considerará bem entendida.

3.1. Primeira lei de Newton e os sistemas inerciais de referência

A primeira lei de Newton encontra-se – como quase todo enunciado da Física – ancorada na idealização de uma série de experiências [5, 6]. Originalmente, escreveu Newton:

Todo corpo persevera em seu estado de repouso ou movimento uniforme, a menos que seja obrigado a mudar tal estado por forças impressas sobre ele.

Com o tempo, porém, ficou claro que esse enunciado precisa ser reformulado, uma vez que noções como a velocidade são relativas aos observadores (e o espaço absoluto de Newton não resistiu o passar do tempo). Por isso, na atualidade considera-se que a primeira lei de Newton é, na verdade, um enunciado que *define* a uma classe privilegiada de sistemas de referência, a que se dá o nome de **inerciais** – pois é neles que os corpos expressam sua inércia. Essa lei, assim, não fala sobre a natureza ou sobre como ela se comporta (pelo menos, não de forma direta), mas distingue aos observadores para os quais, *relativamente*, a natureza se comporta de um modo determinado. O enunciado pode ser então melhor escrito da forma seguinte¹:

Axioma 5 (primeira lei de Newton). *Existe ao menos um sistema de referência, chamado **inercial**, do ponto de vista do qual uma partícula afastada de toda influência se move uniformemente.*

Afastada de toda influência quer dizer, nesse contexto, suficientemente longe de qualquer outra partícula que possa interferir com seu movimento. Essa é com toda clareza uma idealização, e envolve a suposição de que afastar, espacialmente falando, implica remover as influências, como quer que elas se transmitam. Por outro lado, esse é um axioma impossível de ser submetido à prova experimental²; em palavras de Poincaré [9]:

Nenhum experimento, certamente, nos ensinará nunca que a lei de inércia é verdadeira. Essa lei, como a conhecemos, não é um resultado direto do experimento. É uma generalização, e ainda mais, uma generalização necessária para construir uma mecânica coerente.

Sim, é verdadeiramente necessária, pois como veremos mais à frente, o restante dos conceitos serão construídos acima da noção de sistema inercial. Por isso, devemos levar em consideração que, na prática, basta determinar experimentalmente – e isto é possível, sim – que um determinado sistema é *aproximadamente* inercial, dentro dos limites razoáveis de precisão requeridos.

Salientamos de forma especial que a primeira lei de Newton é enunciada *sem fazer referência à massa do corpo nem às forças a que ele está submetido*, sendo assim logicamente bem colocado por falar apenas

¹ Essa é uma combinação (que acreditamos conveniente) dos enunciados que aparecem nas Refs. [7, 8].

² Poderíamos argumentar, por exemplo, que o próprio fato de medir a velocidade constantemente para determinar se o movimento de uma partícula aparentemente afastada de toda influência é uniforme já constitui alguma interferência.

de conceitos cinemáticos (velocidade e longitude de afastamento).

Por fim, uma vez que, axiomáticamente, a existência de *um* sistema inercial é estabelecida, a possibilidade de se ter uma infinidade de sistemas inerciais de referência surge em conexão com o princípio de relatividade de Galilei [5, 10], que provém da observação empírica. Ele diz:

Axioma 6 (relatividade de Galilei). *Para quaisquer observadores que se movem, um em relação ao outro, com velocidade constante, todos os processos físicos se desenvolvem de igual modo.*

Daqui se segue que qualquer observador que se move com velocidade constante em relação a outro inercial é inercial também.

3.2. Sistema comparativo de massa

Vamos tratar agora da construção do sistema comparativo que associaremos com o conceito de massa. Porém, desejamos nesse momento apenas construir a *estrutura* do conceito, matematicamente falando, deixando para a subseção seguinte sua realização física. Expliquemos o que isto quer dizer. As definições na física estão baseadas na chamada **postura operacionalista** [11], segundo a qual a definição de uma grandeza física consiste em estabelecer um procedimento para determiná-la numericamente. Veja, não é forçoso que o tal procedimento seja *verdadeiramente* praticável, apenas que seja *idealmente* realizável. Como exemplo, citaremos a definição – em tradução livre – do ampere que estabeleceu o Escritório Internacional de Pesos e Medidas em 1946³ [12]:

O ampere é aquela corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores retos paralelos de comprimento infinito e seção circular insignificante, colocados a um metro de distância no vácuo, produz entre tais condutores uma força de 2×10^{-7} unidades MKS de força [newton] por metro de comprimento.

Não é difícil reconhecer que essa definição é completamente impraticável com exatidão, porém, *caso o fosse*, poderíamos obter, por um procedimento perfeitamente definido, um exato ampere de corrente elétrica.

Voltando ao nosso assunto de interesse, deixaremos, como dissemos, para depois o procedimento definitório da massa e continuaremos supondo que um tal procedimento foi estabelecido. Dar-lhe-emos (a tal procedimento) o nome de “*pesar numa balança*”, sem isso significar nada concreto por enquanto.

Pois bem, na balança de braços iguais, *comparamos* a massa de dois objetos, e por isso ela serve para construir o sistema comparativo de massa. Quando colocadas as duas partículas, digamos 1 e 2, cada uma em um prato da balança, pode ocorrer uma de três possibilidades: que o prato de 1 desça enquanto o de 2 sobe, caso em que dissemos que “a massa de 1 é maior que a de 2” e simbolizamos $m_2 < m_1$; que o prato de 1 suba e o de 2 desça, caso em que “a massa de 1 é menor que a de 2”, $m_1 < m_2$; que os dois pratos se mantenham equilibrados, caso em que “as massas de 1 e de 2 são iguais”, o que denotamos por $m_1 \sim m_2$. Além do mais, podemos definir uma composição das partículas que corresponde a colocá-las juntas no mesmo prato da balança, e comprovar, experimentalmente, que essa operação corresponde a um sistema extensivo (ou não).

Não é estritamente necessário aqui nos deter em como esse sistema comparativo pode se tornar em um sistema métrico – isto será feito com detalhe na seção seguinte, quando saibamos o que é *realmente* pesar numa balança. Porém, é útil, do ponto de vista pedagógico, tentar fazê-lo. A proposta da Ref. [8] é a seguinte: tomemos um corpo qualquer e estabeleçamos que sua massa é, por definição, igual a 1. Depois dividamos esse corpo em 100 partes iguais (essa igualdade verificada na balança!), e repitamos o procedimento com um número adequado de corpos iguais, para poder medir a massa de corpos mais massivos que o padrão tomado. Dessa forma, teremos um modo de medir a massa de qualquer outro corpo com uma precisão de até 1/100 de unidade, procurando a melhor quantidade de fragmentos que consegue (quase) equilibrar o corpo em estudo.

3.3. O que seria “*pesar numa balança*”?

Estando definida a estrutura comparativa, é preciso nos ocupar, por fim, da definição operacional da massa, ou, tal como o temos formulado, é momento de responder à pergunta: o que seria “*pesar numa balança*”?

Para responder a essa pergunta, vamos nos localizar em um sistema inercial de referência, o que já podemos fazer. Nele, partículas isoladas da influência de qualquer outra se movem uniformemente (primeira lei de Newton). Por isso, quando elas se aproximam entre si de forma que suas velocidades mudam, dizemos que têm **interagido**. O problema que surge é o de desenvolver uma maneira de quantificar a interação.

Como não podia ser de outra forma, visto que andamos pelo caminho da Física, devemos procurar ideias nos fenômenos observados, ou melhor, nos padrões que se repetem neles. Sim, pois observando o que acontece em muitas interações reais quicá possamos perceber a lei de sua ocorrência, que iremos abstrair, sob idealizações, e axiomatizar com a finalidade de fazer novas previsões. Ora, há uma observação feita há muito tempo por Descartes [13], e que diz assim:

³ Conhecidamente, essa definição (o mesmo que as definições de outras unidades de medida) mudou em 2019 em favor de uma outra baseada na fixação do valor numérico das constantes da natureza, o que garante que sejam imutáveis no tempo – supondo que as tais constantes o sejam realmente.

Deus, em sua onipotência, criou a matéria conjuntamente com o movimento e o repouso de suas partes, e com sua interferência perene mantém tanto movimento e repouso no Universo como havia quando o criou.

Essa é uma observação extremamente importante, pois fala diretamente da conservação da quantidade de movimento e de repouso (como quer que entendamos tais quantidades⁴). Mas se alguma coisa se conserva é porque é transmitida de uma parte à outra, sem se perder nem se criar. Isto dá a ideia de quantificar a interação pela quantidade transmitida de uma partícula à outra daquilo que é conservado.

Consideremos, portanto, a situação seguinte. Duas partículas a e b , inicialmente livres com velocidades iniciais constantes $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_b$, se aproximam entre si e se distanciam depois até serem novamente livres, se movimentando com as novas velocidades constantes $\mathbf{u}_a$ e $\mathbf{u}_b$. Que a grandeza g dependente da natureza da partícula e de sua velocidade seja conservada significa que [7]

$$g(a; \mathbf{v}_a) + g(b; \mathbf{v}_b) = g(a; \mathbf{u}_a) + g(b; \mathbf{u}_b). \quad (3)$$

Por outro lado, uma vez que há grandezas conservadas, então, necessariamente, os possíveis resultados de uma interação estão restritos – de forma que resultados em que a grandeza não se conserva são impossíveis. Podemos, na procura das grandezas conservadas, inverter essa observação e dizer: se conhecermos alguns resultados possíveis, então as possíveis grandezas conservadas estão restritas – de modo que aquelas grandezas que não se mantêm fixas nos resultados possíveis conhecidos certamente não são conservadas.

Qualquer um que tenha brincado com bolinhas sabe bem que ao se fazer colidir uma bolinha com outra idêntica, o movimento resultante fica inteiramente determinado pelo ângulo com que elas colidiram e as velocidades que lhes foram dadas. Em particular, não é difícil verificar assim, na experiência, que se velocidades aproximadamente iguais, porém em sentidos contrários, lhes são comunicadas, então resultará que as bolinhas se movimentam, após a colisão, com velocidades contrárias entre si e aproximadamente iguais em valor às que tinham inicialmente. De novo, o ângulo que as novas velocidades fazem com as antigas dependerá da distância entre as linhas de incidência delas – ou seja, do parâmetro de impacto. Naturalmente, esse tal ângulo fica mais difícil de adivinhar quanto mais pequenas são as bolinhas, pois o parâmetro de impacto se torna cada

vez mais pequeno e tanto mais difícil de controlar. Isto, como dissemos, é empírico. Agora vamos idealizá-lo: se imaginarmos que o rádio das bolinhas se aproxima a zero, então o ângulo termina sendo totalmente imprevisível. O que resta então é o seguinte axioma [7], que pode com justiça ser atribuído a Huygens [14].

Axioma 7. *Um possível resultado de uma colisão de duas partículas idênticas que se movem na mesma linha com velocidades iguais em valor, porém contrárias, é as mesmas partículas emergendo com velocidades de valor igual ao original e sentidos contrários entre si ao longo de uma linha inclinada de modo arbitrário em relação à linha de incidência.*

Em poucas palavras, se g é uma grandeza conservada, então – veja a Figura 1 –

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}_1^3 : \forall \mathbf{l} \in \mathbb{R}_1^3 : g(\mathbf{v}\mathbf{n}) + g(-\mathbf{v}\mathbf{n}) = g(\mathbf{v}\mathbf{l}) + g(-\mathbf{v}\mathbf{l}). \quad (4)$$

Aqui não temos explicitado a dependência de g com a natureza da partícula porque consideramos partículas idênticas; estamos escrevendo $g(a; \mathbf{v}) \equiv g(\mathbf{v})$ uma vez que o mesmo argumento a se repete em todas as funções g da equação (4). Também, estamos denotando por $\mathbb{R}_1^3$ ao conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ que têm norma igual a 1.

O axioma enunciado é muito restritivo, pois [7]:

Teorema 8. *Dada uma espécie de partículas, todas as grandezas conservadas são da forma*

$$g(\mathbf{v}) = \lambda + \sum_{i=1}^3 \mu_i v_i + \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{v}\|^2, \quad (5)$$

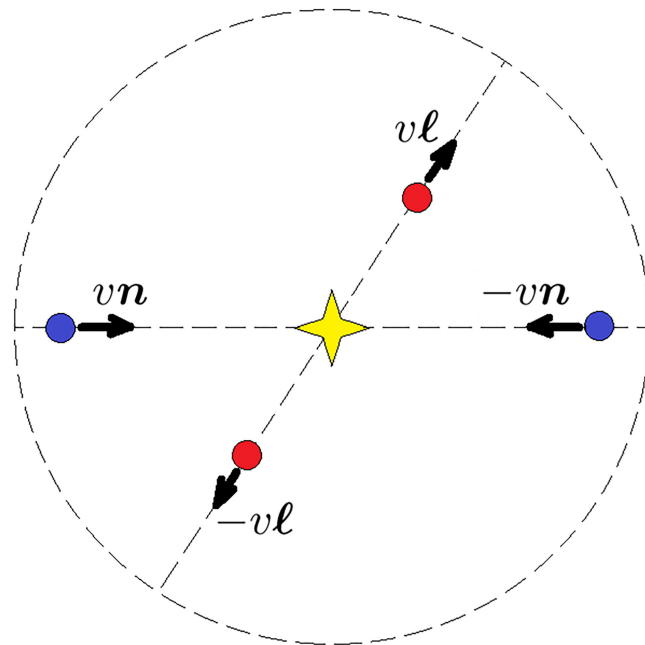


Figura 1: Resultados de Huygens elevados ao status de axioma. Embora todas as partículas são idênticas, temos pintado de azul aquelas que se aproximam à colisão, e de vermelho, as que resultam dela.

⁴ Certamente, Descartes já tinha uma noção – não muito precisa [14] – de massa, e a quantidade de movimento que encontrava conservada era justamente o produto mv (em uma só dimensão). Porém, não precisamos conhecer que é exatamente essa a quantidade de movimento, pois iremos descobri-lo em breve. Queremos apenas salientar que as regularidades observadas nas interações apontam à sua quantificação por estudo das grandezas conservadas.

com λ, μ_i, μ constantes (associadas à espécie dada de partículas).

Demonstração. Da equação (4) e do axioma de relatividade de Galilei segue que $\forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$:

$$g(\mathbf{V} + v\mathbf{n}) + g(\mathbf{V} - v\mathbf{n}) = g(\mathbf{V} + v\boldsymbol{\ell}) + g(\mathbf{V} - v\boldsymbol{\ell}). \quad (6)$$

Tomando a segunda derivada dessa igualdade em relação às componentes da velocidade v_i e v_j , e avaliando depois em $\mathbf{v} = 0$, obtém-se que

$$f(\mathbf{n}) = f(\boldsymbol{\ell}), \quad f(\mathbf{n}) := \sum_{i,j=1}^3 n_i n_j g_{ij}(\mathbf{V}), \quad (7)$$

$$g_{ij}(\mathbf{V}) := \partial_i \partial_j g(\mathbf{V}).$$

Ou seja, a função f é independente de seu argumento, sempre que ele tenha norma 1, pois $\mathbf{n} \in \mathbb{R}_1^3$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, deve então existir uma constante (constante para o argumento $\mathbf{n}$, porém possivelmente dependente de $\mathbf{V}$, que é tratado como constante nesse ponto) $h(\mathbf{V}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que a função $F := f - h(\mathbf{V})\tilde{f}$, com $\tilde{f}$ a função de vínculo, que em nosso caso é o anulamento de $\tilde{f}(\mathbf{n}) := \left(\sum_{i=1}^3 n_i^2\right) - 1$,

tenha gradiente nulo: $\partial_i F(\mathbf{n}) = 0$. Em particular, isto implica que $\partial_i \partial_j F(\mathbf{n}) = 0$, o que leva, para a função f dada na equação (7) e o vínculo já mencionado, à igualdade:

$$g_{ij}(\mathbf{V}) = h(\mathbf{V})\delta_{ij}. \quad (8)$$

Se agora derivarmos essa expressão em relação ao k -ésimo argumento, teremos que $g_{ijk}(\mathbf{V}) = h_k(\mathbf{V})\delta_{ij}$. Mas as derivadas parciais comutam em $\mathbb{R}^3$, de modo que $g_{ijk}(\mathbf{V}) = g_{kji}(\mathbf{V})$, o que implica que $h_k(\mathbf{V})\delta_{ij} = h_i(\mathbf{V})\delta_{kj}$. Se então escolhermos $i \neq j$ mas $j = k$, teremos de concluir que $h_i(\mathbf{V}) = 0$, e então h é uma constante independente de $\mathbf{V}$, que passaremos a chamar μ :

$$g_{ij}(\mathbf{V}) = \mu\delta_{ij}. \quad (9)$$

A integração elementar dessa equação já leva à equação (5), com λ, μ_i constantes de integração. $\square$

Note que esse teorema não afirma que, necessariamente, a grandeza g da equação (5) se conserva, mas apenas que, como máximo, a grandeza que se conserve pode conter os termos que aparecem na mencionada equação. Afinal, é perfeitamente possível que as constantes λ, μ_i, μ sejam, algumas delas ou todas, nulas. Em qualquer caso, sejam ou não nulas as constantes, a conservação da grandeza g leva à conservação também de outras grandezas que se derivam dela, segundo mostrado no Apêndice A.

Como podemos apreciar na equação (5), a dependência com a natureza da partícula está contida nas constantes λ, μ_i, μ , enquanto a dependência com a velocidade está, por assim dizer, separada, na medida em que os termos de g são da forma $g(\bullet; \mathbf{v}) = \alpha(\bullet) + \beta(\bullet)h(\mathbf{v})$. Progrediremos através do seguinte resultado [7].

Teorema 9. *Se existe uma grandeza conservada da forma $g(\bullet; \mathbf{v}) = \alpha(\bullet) + \beta(\bullet)h(\mathbf{v})$ com $\beta(\bullet) \neq 0$ e $h(\mathbf{v})$ uma função não constante, então o quociente $\frac{\beta(a)}{\beta(b)}$ é único dadas as espécies «a» e «b» de partículas, no sentido de que se $\tilde{g}(\bullet; \mathbf{v}) = \tilde{\alpha}(\bullet) + \tilde{\beta}(\bullet)h(\mathbf{v})$ é uma outra grandeza conservada, então*

$$\frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\beta}(b)} = \frac{\beta(a)}{\beta(b)}. \quad (10)$$

Demonstração. Chamando $\Delta h(\mathbf{v}) := h(\mathbf{u}) - h(\mathbf{v})$, as equações de conservação de g e de $\tilde{g}$ se escrevem, respectivamente,

$$\beta(a)\Delta h(\mathbf{v}_a) + \beta(b)\Delta h(\mathbf{v}_b) = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{\beta}(a)\Delta h(\mathbf{v}_a) + \tilde{\beta}(b)\Delta h(\mathbf{v}_b) = 0. \quad (12)$$

Essas duas equações podem ser colocadas numa só equação matricial, a saber,

$$\begin{pmatrix} \beta(a) & \beta(b) \\ \tilde{\beta}(a) & \tilde{\beta}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta h(\mathbf{v}_a) \\ \Delta h(\mathbf{v}_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Mas sendo h uma função não constante, essa equação matricial deve admitir soluções não triviais, o que é possível somente se a matriz quadrada tem determinante nulo. Levando em consideração a não nulidade das funções β – o que permite dividir entre elas –, a mencionada condição torna-se equivalente à equação (10). $\square$

Por outro lado, segundo o Apêndice A, são conservadas (veja, em particular, g_4 e g_9) $\mu_1 v_i, \mu_2 v_i, \mu_3 v_i, \mu v_i$. Ou seja, identificando $h(\mathbf{v}) = v_i$, podemos aplicar o teorema recém mostrado para concluir que existem constantes $B_1, B_2, B_3, D \in \mathbb{R}$, iguais para todas as espécies de partículas, e um parâmetro dependente da partícula, m , tais que $\mu_i = B_i m$ e $\mu = Dm$. Dessarte, fazendo as adequadas combinações lineares (veja g_7 e g_3), tanto m quando $m\mathbf{v}$ são grandezas conservadas⁵. Isto, não podemos esquecer, sob a suposição de que as constantes μ_i e μ são diferentes de zero – ou, pelo menos, é válido em relação às constantes que o são. Assim, para que exista o parâmetro m característico da partícula basta que exista

⁵ O leitor com certeza estará se perguntando sobre a necessidade de argumentar desse modo, sendo que g_7 e g_9 levam a uma conclusão semelhante sem a necessidade de relacionar as constantes μ_i com μ e introduzir o parâmetro m . A importância da argumentação mostrada é que, de fato, há *um só* (e não mais de um) parâmetro dependente da partícula, m , tal que $m\mathbf{v}$ é conservada. Por outro lado, a necessidade de usar m e não diretamente μ , por exemplo, é que é perfeitamente possível que μ seja nulo mas os μ_i não. Isto, de fato, acontece em muitas situações, pois olhando para a equação (5) é fácil perceber – com um olhar adiantado a nosso argumento – que $\mu_i v_i$ será associado ao momento linear, enquanto $\mu \|\mathbf{v}\|^2/2$ será associado à energia cinética. Ora, muitas vezes a energia cinética não é conservada, mas o momento linear sim. Isto se consegue facilmente colocando $D = 0$ sem isso impedir que os B_i sejam não nulos.

pelo menos uma grandeza conservada que dependa da velocidade.

Como isto é garantido pela observação de Descartes, e como, para mais, uma quantidade do tipo $\mu\|\mathbf{v}\|^2/2$ não é conservada em certas colisões observadas [15], devemos concluir (baseados nesses fatos empíricos e os desenvolvimentos lógicos que deles se derivam e que então elevamos ao status de axioma) que

Axioma 10. *Existe, associada a cada partícula «a», um parâmetro m_a , chamado **massa**, tal que, se duas ou mais partículas interagem entre si, então a grandeza*

$$\sum_a m_a \mathbf{v}_a, \quad (14)$$

*chamada **momento linear**, se mantém constante.*

Por tudo o que dissemos, devemos salientar que o momento linear é aquela grandeza conservada que procurávamos para quantificar a interação, cuja transmissão de uma partícula à outra é a medida da mesma. Assim, a natureza da massa é exatamente a de ser o fator que acompanha à velocidade na constituição do momento linear. Nesse sentido, a massa só pode ser concebida na interação.

Corolário 11. *A massa é uma grandeza conservada e extensiva, no sentido de que se duas ou mais partículas interagem se unindo numa colisão para formar uma única partícula, a massa m dessa última é igual à soma das massas m_a das partículas individuais:*

$$m = \sum_a m_a. \quad (15)$$

A demonstração desse corolário se reduz a observar a grandeza g_5 no Apêndice A. Esse resultado é, por assim dizer (se bem que em um contexto diferente), a lei de conservação da massa de Lavoisier [16], que então se cumpre necessariamente na mecânica clássica newtoniana.

Assim, chegamos à existência do parâmetro m_a , cuja definição é axiomática, produto de deduções lógicas apoiadas na idealização de fatos observados na experiência. Agora diremos o que é “pesar numa balança”. Começemos lembrando que na balança de braços iguais, para comparar o *peso* das partículas a e b , colocamos a partícula a em um prato e a b no outro, e dizemos que o peso de a é maior que o de b se o prato de a cai em relação ao de b , e viceversa. No caso que estamos desenvolvendo, a comparação ocorre do modo seguinte. Tomamos as partículas a e b e lhes damos, do ponto de vista de um observador inercial, quaisquer velocidades iniciais, porém de forma que estejam dirigidas a uma colisão entre si. Segundo a conservação do momento linear, teremos que

$$m_a \Delta \mathbf{v}_a + m_b \Delta \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Assim, diremos que a massa de a é maior que a de b , $m_b \prec m_a$, se a velocidade de a sofre, na interação,

uma mudança menor que a de b , no sentido que $\|\Delta \mathbf{v}_a\| < \|\Delta \mathbf{v}_b\|$, e viceversa. E diremos que as massas são iguais, $m_a \sim m_b$, se as velocidades mudam na mesma quantidade. Esse é o sistema comparativo de massa operacionalmente estabelecido.

A equação (16), contudo, não fixa inteiramente o valor das massas. Para tornar esse conceito em um conceito métrico falta dizer exatamente que *número* m_a corresponde a cada partícula a . Para tal, devemos escolher, arbitrariamente, uma partícula de referência, r , e fixar seu valor *por definição*. Assim, torna-se do todo apropriado estabelecer a

Definição 12. *Um **sistema métrico** ou **sistema de unidades de massa** consiste em escolher uma partícula «r» de referência e definir seu valor igual a 1. A massa m_a de qualquer outra partícula «a» é, em tal sistema métrico, o número*

$$m_a := \frac{\|\Delta \mathbf{v}_r\|}{\|\Delta \mathbf{v}_a\|}, \quad (17)$$

com $\Delta \mathbf{v}_a$ e $\Delta \mathbf{v}_r$ as mudanças nas velocidades das partículas «a» e «r», respectivamente, que ocorrem numa colisão qualquer delas segundo medidas por um sistema inercial de referência.

É de todo claro que diversos sistemas métricos serão obtidos escolhendo diversas partículas de referência. Por exemplo, até 2019 a “partícula” de referência que definia o sistema métrico do quilograma era um cilindro padrão de platina e irídio guardado no Escritório Internacional de Pesos e Medidas [12]. Atualmente, o mesmo sistema métrico é definido em função da constante de Planck por um procedimento que envolve a balança de Watt [17], o que, novamente, fixa a “partícula” de referência.

Para finalizar, o sistema métrico, qualquer que seja, torna-se em um sistema métrico extensivo graças à equação (15).

Note que a definição dada de sistema métrico de massa é semelhante às “definições operacionais” de Mach [18] e de Saint-Venant [19], em que se propunha $m_a/m_r = \|\mathbf{a}_r\|/\|\mathbf{a}_a\|$, com $\mathbf{a}_a$ e $\mathbf{a}_r$ acelerações de a e de r durante sua interação mútua⁶. O sentido, contudo, é inteiramente diferente. Sim, pois Mach e Saint-Venant propuseram tal “definição operacional” já assumindo a validade da segunda e da terceira leis de Newton – que já contêm em si alguma noção de massa –, o que significa que ela é, na verdade, proposta apenas como um método de medição de massas, e não como uma verdadeira definição; nessa direção aponta também a breve discussão apresentada pela Ref. [20]. O caminho seguido nesse artigo, próximo do mostrado por Desloge [7] (embora com algumas mudanças), visa ser uma definição axiomática de massa e uma dedução de sua extensividade, seguida do estabelecimento do sistema métrico extensivo correspondente,

⁶ Determinações operacionais alternativas podem ser encontradas na Ref. [21].

tomando como ponto de partida (axiomático) os fatos empíricos observados por Descartes e Huygens. Afinal, o conceito de força nem sequer tem aparecido até agora em nossa discussão. Esta será apresentada na seção seguinte. Antes disso, porém, gostaríamos de sugerir uma atividade que pode ser realizada no laboratório.

◇ Sugestão de atividade: Medindo a massa “por definição”

A definição dada de massa é, de fato, praticável com certa exatidão se se admitirem algumas aproximações. Trazemos assim uma experiência que pode ser desenvolvida no laboratório e que consiste em determinar, “por definição”, as massas de um conjunto de objetos.

Sabidamente, o trilho de ar é um dispositivo que permite o movimento unidimensional sobre ele de determinados móveis, eliminando quase completamente o atrito pela formação de um colchão de ar entre o trilho e o móvel. Trata-se de um aparelho muito comum nos laboratórios de física geral. Ele pode ser usado como balança porque permite determinar as massas dos corpos justamente pelo estudo das variações das velocidades quando submetidos a colisões. A experiência deveria constar dos seguintes pontos.

1. Dando um pequeno toque em um móvel qualquer sobre o trilho e medindo sua velocidade média em alguns trechos (dividindo uma determinada longitude de percurso entre o tempo que ele toma), verificamos que, na medida em que a velocidade média permanece aproximadamente constante, podemos considerar, aproximadamente também, o sistema de laboratório como um sistema inercial de referência, e os móveis sobre o trilho como partículas livres de interação.

2. Escolhemos um móvel e o definimos como o padrão r . O colocamos em repouso no ponto médio do trilho. Marcamos pontos sobre o trilho a distâncias L de tal ponto médio.
3. Enviamos um móvel a a colidir com r . A velocidade de incidência pode ser medida cronometrando o tempo t_1 em que a percorre a distância L marcada, como mostrado na parte superior da Figura 2.
4. Acontecida a colisão, r começará a se mover com velocidade u_r para a direita, demorando t_r para chegar ao ponto à distância L . a poderia se mover, no entanto, para a direita com velocidade u_+ , ou para a esquerda com velocidade u_- . Em qualquer caso, tardará um tempo t_2^+ ou t_2^- , respectivamente, para percorrer a distância L . Veja a parte inferior da Figura 2.

Uma vez que todas as distâncias são L , a relação entre as variações das velocidades pode ser escrita unicamente em função dos tempos de percurso:

$$\frac{\|\Delta v_r\|}{\|\Delta v_a\|} = \frac{t_1 t_2^\pm}{t_r (t_2^\pm \mp t_1)}. \quad (18)$$

Desse modo, é possível verificar, primeiro, que qualquer que seja a velocidade v dada inicialmente ao móvel incidente, a razão da equação (18) é sempre a mesma. Isto confirma a observação de Descartes. Estando, então, convencidos da existência de regularidades (grandezas conservadas), aplicaremos com confiança nossa definição de massa, equação (17), com o que obteremos a massa do móvel a no sistema métrico em que $m_r = 1$. A experiência deve ser repetida para medir a massa de móveis diversos e em sistemas de unidades diversos também, verificando assim que diversos sistemas de unidades se relacionam apenas por mudanças de escala. ◇

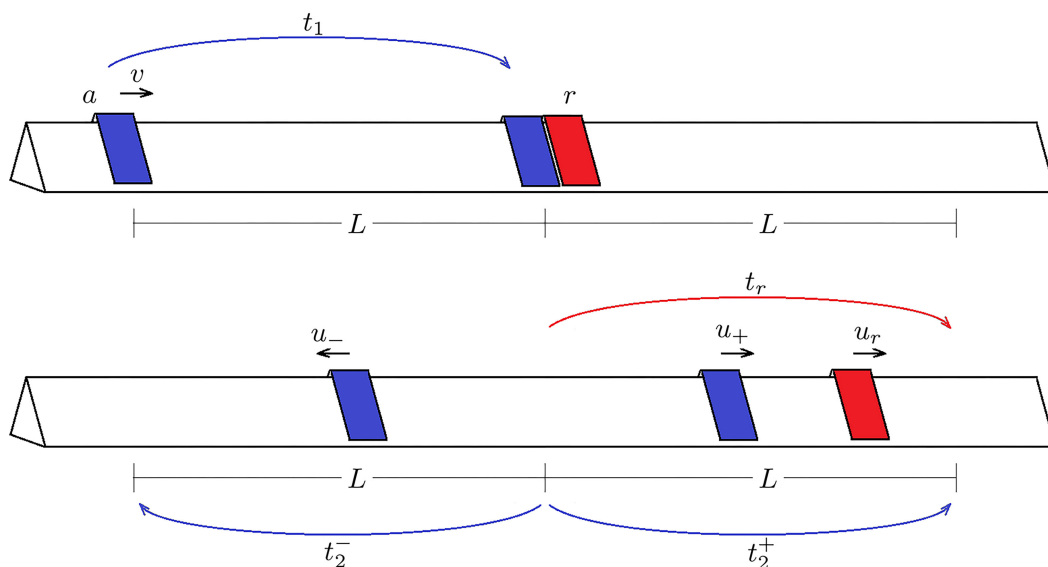


Figura 2: Medindo a massa “por definição” com o uso de um trilho de ar.

4. A Segunda Lei é a Definição de Força...

Tendo estabelecido já o conceito de massa, ele pode agora ser usado sem restrição. Além do mais, juntamente com o conceito de massa vem dado o conceito de momento linear como grandeza conservada nas interações mútuas. Se então deixarmos uma partícula interagir com outras e quisermos apenas descrever a influência que essas outras têm sobre a primeira, estaremos interessados unicamente em conhecer a evolução temporal do momento linear dela. Dessa forma, a medida da interação de nossa partícula de interesse com o resto de partículas, vem dada, como alhures, pela quantidade de momento linear que transmite e que lhe é transmitida de parte das outras. Se faz então absolutamente natural introduzir uma grandeza que carregue tais informações.

Definição 13. A *força* que age sobre uma partícula que, do ponto de vista de um sistema inercial de referência, tem momento linear $\mathbf{p}(t)$ é

$$\mathbf{F}(t) := \mathbf{p}'(t). \quad (19)$$

Note que a força somente pode ser estabelecida num sistema inercial de referência, pois a primeira lei de Newton garante que, segundo ele, se a partícula está afastada de toda influência (ou seja, não interage), então $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{0}$ e em consequência a força é nula, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$. Isto não ocorre do ponto de vista dos observadores não inerciais, em que o momento linear de uma partícula pode mudar apesar de estar afastada de toda influência, o que significa que a força não é uma medida da interação quando o movimento é referido a um sistema não inercial.

O leitor com toda certeza reconhece nessa definição a segunda lei de Newton, que parece ter sido rebaixada ao status de uma simples definição. No entanto, isto concorda plenamente com o que Newton pensava do próprio trabalho [3]:

Dizer que uma força age sobre um corpo é equivalente a dizer apenas que o corpo se moverá (ou que tem a disposição a fazê-lo) de tal modo.

Antes, no entanto, de que o leitor se entristeça por esse ponto de vista, desejamos alertá-lo de que a segunda lei retomará seu papel glorioso como lei dinâmica na seção seguinte. Por enquanto, queremos mostrar que a segunda lei como definição, na verdade, não é pouca coisa.

Primeiro, uma consequência notável da segunda lei como definição de força é que ela faz com que automaticamente as forças sejam somadas segundo a regra do paralelogramo, uma vez que as derivadas do momento linear o são⁷. Esse não é um ponto insignificante, levando

em consideração que nenhuma demonstração disso foi feita até agora [8] – e certamente tampouco aqui, pois sendo consequência imediata da definição, nada há que precise ser demonstrado.

Em segundo lugar, tomemos, a modo de exemplo de aplicação, o caso paradigmático da gravidade. Como é perfeitamente conhecido, Kepler enunciou, entre os anos 1609 e 1619, as três leis do movimento planetário [22, 23], que escrevemos a continuação:

- 1°. Os planetas se movem seguindo órbitas elípticas, com o Sol situado em um dos focos.
- 2°. O raio vetor que une o planeta com o Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
- 3°. O quociente entre os cubos dos semieixos maiores das órbitas e os quadrados dos tempos de revolução é igual para todos os planetas do Sistema Solar.

Essas três leis puramente cinemáticas, afirmamos, dão toda a informação em relação ao $\mathbf{p}'(t) = m\mathbf{a}(t)$ de um planeta (de massa constante), de modo que são suficientes para *derivar* a lei de gravitação universal em virtude da equação (19) – conjuntamente com a hipótese de universalidade, que veremos no momento oportuno. Para começar, a lei 1°. diz, em primeiro lugar, que a órbita está contida em um plano que contém ao Sol. Se nele estabelecemos coordenadas polares $(r; \theta)$, então a órbita é da forma⁸

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (20)$$

com e a excentricidade ($e < 1$ para uma elipse) e p a distância entre o foco (que colocamos na origem do sistema de coordenadas) e a diretriz (que estabelecemos paralela ao eixo OY). O semieixo maior a da órbita relaciona-se com essas duas grandezas segundo a equação

$$ep = (1 - e^2)a. \quad (21)$$

A lei 2°. se escreve da forma $r^2\theta'/2 = h/2$ (constante), de forma que $r^2\theta' = h$. A derivada temporal dessa igualdade resulta em

$$2r'\theta' + r\theta'' = 0. \quad (22)$$

Levando em consideração que em coordenadas polares a aceleração se escreve

$$\mathbf{a} = (r'' - r\theta'^2)\mathbf{e}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{e}_\theta, \quad (23)$$

a equação (22) – ou seja, a lei 2°. – vem dizer que a aceleração é radial só, isto é, que a força de gravidade é

⁷ Em relação à decomposição de forças nos remetemos à cita que antes mostramos: “Dizer que uma força age sobre um corpo é equivalente a dizer apenas que o corpo se moverá (ou que tem a disposição a fazê-lo) de tal modo.” Assim, a força que um corpo particular exerce sobre outro é, por definição, $\mathbf{p}'(t)$, *caso nenhum outro corpo agisse sobre ele*.

⁸ O estudo das seções cônicas forma parte da geometria analítica. Para esse assunto recomendamos a excelente Ref. [24].

uma força central. Por outro lado, da equação (20) e a definição da constante h segue, após derivação, que

$$r' = \frac{h}{p} \sin(\theta), \quad r'' = \frac{h^2 \cos(\theta)}{p r^2}, \quad (24)$$

igualdades que substituídas na expressão para a aceleração, equação (23), levam a

$$\mathbf{a} = -\frac{h^2}{ep} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (25)$$

Esse resultado já permite afirmar que a força de gravidade é atrativa, central e inversamente proporcional ao quadrado da distância. O que falta estabelecer, no entanto, é se o fator h^2/ep muda de planeta a planeta ou se é uma constante igual para todos eles. A resposta necessita da lei 3^o. que relaciona as características orbitais dos diversos planetas. Um simples cálculo mostra que a área delimitada pela órbita elíptica de um planeta é calculada de duas formas:

$$A = \pi ab = \frac{1}{2} hT. \quad (26)$$

Aqui, b é o semieixo menor da elipse [$b^2 = a^2(1 - e^2)$] e T é o período orbital. Evidentemente, a primeira igualdade na equação (26) é de ordem geométrica, enquanto a segunda provém da lei 2^o. A manipulação algébrica permite estabelecer que

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{ep}{h^2}. \quad (27)$$

Note, de forma especial, que o lado direito dessa equação contém, ademais do fator numérico $4\pi^2$, justamente a grandeza que aparece na equação (25). Ora, o lado esquerdo é exatamente aquilo de que trata a lei 3^o., e é igual para todos os planetas. Concluímos então que a fração h^2/ep é uma constante para todos os planetas, e, por isso, pode depender no máximo da massa M do Sol, que é o único parâmetro comum ao movimento de todos os planetas do Sistema Solar⁹. Portanto,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{mf(M)}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (28)$$

É nesse ponto que precisamos introduzir como hipótese a universalidade da gravitação: a força que o planeta exerce sobre o Sol deve ter a mesma forma funcional:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{Mf(m)}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (29)$$

Porém a terceira lei de Newton – que é consequência direta da definição de força e a conservação do momento linear – impõe que $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{F}}$, donde $mf(M) = Mf(m)$.

⁹ Certamente, poderíamos incluir aqui outros parâmetros do Sol (seu raio, temperatura superficial e quaisquer outros). No entanto, a hipótese de universalidade que enunciaremos imediatamente reduz essa lista apenas à massa.

Daqui é imediato ver que

$$\frac{f(m)}{m} = \frac{f(M)}{M} =: G \quad (30)$$

é uma constante universal. Com isto, $f(M) = GM$ e fica estabelecida a lei de gravitação universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (31)$$

Não é uma observação menor o fato de que a massa que aparece nessa lei de força é a massa anteriormente definida e que participa na construção do momento linear – algumas vezes chamada massa *inercial*. A segunda lei como definição de força, vemos, exclui automaticamente a necessidade de falar da massa *gravitacional*, ou ainda fazer distinções mais finas, como subdividir essa última classe em ativa e passiva. Assim, o princípio de equivalência newtoniano – veja a Ref. [25] para uma revisão – torna-se uma tautologia: a força da gravidade é, *por definição*, originada pela massa (inercial). Isto se explica melhor se lembramos que, propriamente falando, antes de conhecer a cinemática do movimento (as leis de Kepler), a força da gravidade ainda não existia, pois é impossível definir a força sem conhecer primeiro $\mathbf{p}'(t)$. Justamente, a massa gravitacional surge porque se supõe a existência da força *antes* da cinemática – e tal força alguma fonte deve ter. Não falaremos mais desses diversos tipos de massa, pois em decorrência do discurso praticado até agora, só uma massa existe.

5. ... Mas Também é Uma Lei Dinâmica

Consideremos agora o seguinte ponto. Se restringíssemos a aplicabilidade da segunda lei ao contexto particular em que se estabelece uma força determinada (por exemplo, se usarmos a lei de gravitação universal apenas para os planetas do Sistema Solar), seria de todo impossível fazer previsões com ela. Com efeito, precisaríamos sempre estar medindo $\mathbf{p}'(t)$ para determinar a força, e nunca poderíamos nos adiantar e dizer “tal será a força”, pois conhecer a força requer conhecer o movimento primeiro. Isto deixa em evidência que na dedução anterior da lei de gravitação fizemos, sub-repticiamente, uma hipótese adicional: que a lei da força que age numa partícula é a mesma em todo momento. Sim, pois Kepler deduziu suas leis em um tempo determinado (digamos, num intervalo de tempo de aproximadamente vinte anos), mas disso não segue que ainda hoje possamos fazer uso delas; na verdade, estamos sempre alertas de que algum dos planetas se afaste do que esperaríamos se as leis de Kepler ainda fossem válidas, e por isso, em alguma medida, continuamos calculando a força pela sua definição da equação (19). Como nesses séculos a lei não tem se modificado, acreditamos suficientemente nela e a usamos para fazer previsões.

Porém, nossa confiança, como tudo, precisa também ser estabelecida de forma precisa (ai, a confiança não parece uma palavra muito científica), de modo que

qualquer um possa concordar, ou discordar, da suposição que ela contém. Essa suposição é a de que um corpo *cria ao seu redor um campo de gravidade*. Assim, a força não é mais apenas aquela que age num corpo determinado, mas torna-se um **campo de forças** que a fonte cria ao seu redor, de tal modo que, qualquer que seja a partícula colocada nele, em qualquer posição e tempo determinados, saibamos com exatidão qual a força que agirá nele.

Naturalmente, o campo de forças é uma extrapolação infinitamente grande, pois de saber como o Sol atrai a uns poucos planetas passamos, pela confiança, a dizer como ele age no Universo todo! Assim, sob a hipótese da existência – não nos deteremos nessa palavra complicada – do campo de forças, a segunda lei de Newton é reivindicada em seu papel de lei dinâmica: conhecida agora a força, a equação (19) pode ser usada para determinar $\mathbf{p}'(t)$.

A pergunta que surge nesse contexto é se por acaso é evitável a noção de campo de forças – e, portanto, evitável a interpretação da segunda lei como lei dinâmica. Gostaríamos nesse sentido de citar a Bunge [26]:

Não existindo “fatos gerais”, não é possível verificar diretamente hipóteses gerais como são os enunciados das leis [...]. Só podem ser comprovadas e usadas as consequências particulares das hipóteses científicas.

Isto explicita a prática científica em geral, e a da física em particular: o método indutivo. A partir de algumas observações (seria impossível fazer mais do que isso), estabelecemos uma lei, que então passa pelo longo e nunca finalizado processo de falsificacionismo. Enquanto não se encontra um só caso que viole a lei, ela permanece. Porém, caso se descubra situações que não se alinham com a lei, ela deixa de ser tal (pelo menos, de forma “exata”). Por isto, enquanto a física procurar as leis do Universo, a resposta ao questionamento levantado é *não*, não é evitável a interpretação da segunda lei de Newton como lei dinâmica, pois evitá-lo significaria exatamente desistir na procura de leis.

Para exemplificar esse ponto, retomemos nossa discussão sobre a lei de gravitação universal, descoberta cinematicamente pelo uso da segunda lei como definição. É justamente na confiança da existência do campo de gravidade criado pelo Sol e os outros planetas que o planeta Netuno foi (teoricamente) descoberto por Adams e Le Verrier [27, 28]. Sim, uma grande confiança certamente, ao ponto que, faltando fontes para explicar o movimento estranho de Urano, preferiu-se adivinhar a existência de um planeta ainda não descoberto antes que desconfiar da lei! De forma similar se fez a dedução original da existência de matéria escura [29]: faltando matéria visível para explicar, com a lei de gravitação universal, o movimento de certos cúmulos de matéria, se postulou a existência de matéria invisível¹⁰.

¹⁰ Para um tratamento detalhado do problema no contexto galáctico, veja a Ref. [30].

◇ Sugestão de atividade: Medindo a força “por definição”

Retornemos a nossa atividade, sugerida anteriormente, em que usávamos o trilho de ar para determinar a massa de alguns móveis para medir, agora, a força “por definição”; mais especificamente, a força de atrito. Naturalmente, o trilho de ar reduz o atrito quase completamente, porém não de forma que o faça desaparecer por inteiro, especialmente se a saída de ar é diminuída ligeiramente. Consideremos, assim, uma situação em que a saída de ar tem sido calibrada de forma que há um atrito pequeno, porém perceptível.

1. Dividindo o trilho em alguns trechos de igual comprimento, damos um toque leve no móvel r de referência para que se movimente com velocidade pequena. Registramos o tempo em que cada ponto final x dos trechos é atingido por r .
2. Fazemos um gráfico dos pontos $x(t)$ e o aproximamos por uma parábola, ou de $x(t^2)$ e o aproximamos por uma linha reta. Em qualquer um dos casos, seremos capazes de determinar a aceleração de r em seu movimento, ou seja, $v'(t)$, que será constante. Como, por definição do sistema métrico em que r é o padrão, $m_r = 1$, teremos que $\mathbf{p}'(t) = v'(t)$, e então a v' constante calculada será justamente a força de atrito que agiu sobre r , que denotaremos f_r . Repetindo o procedimento para diversas velocidades, poderemos verificar que f_r é sempre a mesma, isto é, que independe da velocidade.
3. Repetindo a experiência com outro móvel a poderemos determinar v'_a . Multiplicando pela massa, anteriormente medida, obteremos $f_a = p'_a$.

Com um número suficiente de móveis e velocidades diversas, poderemos nos convencer de que todas as forças de atrito se relacionam segundo a expressão

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{m_a}{m_b}. \quad (32)$$

Isto prova que, pelo menos para os móveis utilizados, a força de atrito é diretamente proporcional à massa e independe da velocidade. Poderemos agora extrapolar nossos resultados para estabelecer nossa conclusão de forma geral e fazer novas previsões com ela. Assim, temos descoberto a lei de força para alguns casos particulares e, confiando na regularidade do Universo, estabelecemos a lei: um corpo b de massa m_b experimentará em seu movimento pelo trilho de ar a força de atrito $f_b = m_b f_r$. ◇

6. Comentários Finais

Queremos finalizar esse artigo discutindo brevemente a possibilidade de axiomatização, do ponto de vista matemático, da mecânica newtoniana. A axiomatização foi feita na Ref. [31], mas vamos mostrar aqui uma

versão ligeiramente simplificada essencialmente igual à mostrada na Ref. [32]:

Definição 14. Um *sistema mecânico de partículas* é uma 6-upla ordenada $(P; T; s; m; f; g)$ com P um conjunto finito não vazio, T um intervalo de $\mathbb{R}$, $s : P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas vezes diferenciável no segundo argumento para todo $p \in P$, $m : P \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f : P \times P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

- A1) $\forall p, q \in P : \forall t \in T : f(p; q; t) = -f(q; p; t).$
 A2) $\forall p, q \in P : \forall t \in T : s(p; t) \times f(p; q; t) = -s(q; t) \times f(q; p; t).$
 A3) $\forall p \in P : \forall t \in T : m(p)D_t^2 s(p; t) = \sum_{q \in P} f(p; q; t) + g(p; t).$

Uma vez que o leitor tenha dedicado alguns instantes a imaginar o significado dos símbolos escritos acima, seguramente possa estar convencido de que, efetivamente, essa parece ser uma boa definição do que seja um sistema mecânico de partículas, se interpretarmos P como o conjunto das partículas pertencentes ao sistema, T o intervalo de tempo em que estudamos seu movimento, $s(p; t)$ a posição da partícula p no instante t , $f(p; q; t)$ a força que sobre a partícula p exerce a q no tempo t e $g(p; t)$ a força externa a que está submetida a partícula p no instante t , tudo isso observado do ponto de vista de um sistema inercial de referência.

Porém, não devemos esquecer de que esse conjunto de axiomas poderia ser satisfeito por algum outro modelo diferente desse que estamos imaginando. Estaremos ainda dispostos a chamar “sistema mecânico de partículas” a uma 6-upla abstrata que satisfaça aos axiomas, mas que nada tenha a ver com partículas, intuitivamente falando? Acreditamos que uma grande porção de físicos, de fato, se recusaria a tal coisa.

Acontece que a definição anterior é *matemática*, na medida em que define apenas uma estrutura, sem nada dizer a respeito de como essa estrutura se adequa (ou não) a nosso entendimento do mundo. Nesse sentido, uma teoria física não pode ser definida apenas matematicamente, mas incorpora também em si as que Prugovečki chama *regras de correspondência* [33], e que, justamente, são as regras que atribuem significado empírico aos símbolos do formalismo matemático.

Nesse artigo, tentamos precisamente conceder à massa e à força, que ninguém tem dificuldade para manipular matematicamente, um significado empírico. Assim, em retrospecto, temos desenvolvido as seguintes ideias.

1. Existem, axiomáticamente, sistemas de referência chamados inerciais, em que as partículas afastadas de toda influência se movem uniformemente. Embora isso não seja, como percebeu Poincaré, empiricamente testável, trata-se de uma hipótese de trabalho que, para cada caso particular, pode, sim, ser testada *aproximadamente*, como na experiência do trilho de ar.

2. Nesses sistemas, a interação pode ser detectada justamente porque leva a movimentos não uniformes.
3. Na procura de grandezas conservadas que permitam quantificar a interação surgem, simultaneamente, e com base empírica nas observações de Descartes e Huygens, os conceitos de massa e momento linear. Esse é o ponto central do artigo: a experiência, em conjunto com a dedução lógica, é capaz de nos revelar diretamente a existência dessas grandezas conservadas, tornando, precisamente por isso, a lei de conservação do momento linear na forma mais natural de definir a massa. Nesse processo, a força ainda nem sequer tem sido introduzida – a massa antecede à força.
4. A força é definida pela segunda lei de Newton como medida da interação a que está sujeita uma partícula. Porém, a segunda lei transcende seu papel como definição de força sob a hipótese de que os corpos criam campos de forças. Assim sendo, a segunda lei tem duplo papel:

- (a) Permite determinar empiricamente o campo de forças pela observação do movimento de partículas (papel de definição de força).
- (b) Permite aplicar, por extrapolação, o campo de forças determinado empiricamente para a previsão de novos fenômenos (papel de lei dinâmica).

Resulta então já claro que a primeira lei não pode, de forma alguma, ser um caso particular da segunda – como algumas referências citadas na Introdução indicavam. Com efeito, pois a segunda lei requer da primeira, em primeiríssimo lugar, para determinar quando é que há uma interação: a presença dela, revelada na não uniformidade do movimento da partícula, tornaria-se impossível sem a primeira lei. Além do mais, sem a primeira lei, a massa não poderia ser definida, de modo que escrever uma equação do tipo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ resultaria carente de todo significado, pois trataria-se de uma igualdade em que nem $\mathbf{F}$ nem m têm significado prévio – e uma só equação não pode definir duas grandezas. Com o caminho percorrido nesse artigo, todas essas dificuldades desaparecem: a mecânica newtoniana tem uma base conceitual totalmente sólida.

Nesse ponto, resulta conveniente discutir brevemente algumas objeções – muitas delas mostradas nas Refs. [34, 35] – que foram feitas à definição de Mach, a qual, como dissemos alhures, está relacionada, porém não é igual, à que aqui apresentamos.

Uma objeção relativamente frequente afirma que a definição de Mach falha em ser praticável no mundo real. O concedemos, e também para a definição mostrada aqui. Porém, insistimos em que a definição operacional não precisa ser praticável, mas ser frutífera conceitualmente – nisso coincidimos com a Ref. [36] e com o Escritório Internacional de Pesos e Medidas. Basta

que ela permita justificar procedimentos práticos. Nesse sentido, propostas como as das Refs. [21, 37] podem ser aplicadas, descansando conceitualmente no que foi desenvolvido nesse artigo.

Por outro lado, críticas relativas ao fato das acelerações não poderem ser medidas instantaneamente caem no mesmo ponto que a objeção anterior. Contudo, isto é inclusive evitado na proposta de Saint-Venant e de Desloge recorrendo a experiências de espalhamento. Naturalmente, sabemos bem (adiantados ao conhecimento singelo que aqui procuramos) que duas das interações fundamentais são de longo alcance e, propriamente, para eles não se aplica a condição de espalhamento – nos referimos, obviamente, à gravidade e à interação eletromagnética. Contudo, um afastamento de alguns anos luz deveria ser considerado suficiente para poder dizer, com razoável exatidão, que as partículas não interagem mais.

Por último, há uma outra objeção relativa à ordem aceleração-massa-força de apresentação dos conceitos [38], que diz o seguinte:

[...] a aceleração é a condição suficiente para um corpo não ser livre. Se o corpo não é livre, então alguma coisa deve estar agindo sobre ele. Isso que age sobre o corpo se chama “força” na mecânica. Portanto, força é a condição necessária para a aceleração. Se a força é a condição necessária para a aceleração, então não é logicamente aceitável começar com a aceleração.

A contestação a essa suposta dificuldade é que chamar força à condição necessária para a aceleração realmente não significa nada, a menos que se diga de que modo ela quantifica a interação. Na verdade, é exatamente nesse espírito que nós temos chamado “influência” ou “interação” à condição de não liberdade – do ponto de vista de um sistema inercial de referência. Essas palavras, como as temos usado, são vagas e apenas ajudam a conceituar a situação física. Por outro lado, os conceitos cinemáticos são os mais elementares (fundamentais) porque podem ser diretamente assimilados, e por isso é sempre logicamente e operacionalmente adequado começar com eles.

Para terminar, não podemos deixar de mencionar, com grande ênfase, o fato de que esse artigo está completamente dentro dos limites da mecânica newtoniana¹¹, e por isso de forma alguma acreditamos que as construções feitas sejam adequadas de modo geral. Esperamos continuar o estudo considerando também outras teorias mecânicas.

¹¹ Isto fica claro desde o momento em que usamos a relatividade de Galilei para argir os argumentos.

Agradecimentos

O autor, que apesar do esforço ainda tem muito a aprender do idioma português, deseja agradecer o invaluável apoio de Evelyn Lima e sua diligente revisão da redação desse manuscrito.

Disponibilidade de Dados

Não há dados associados a esse artigo.

Apêndice

A. Grandezas Conservadas Construídas a Partir de g

Do ponto de vista de um sistema inercial de referência o espaço é homogêneo e isotrópico. Isto, junto com o axioma de relatividade de Galilei, permite escrever uma lista de formas de construir novas grandezas conservadas a partir de uma g conhecida [7]:

- 1) Dada uma colisão possível, também é possível aquela em que todas as velocidades são refletidas em um plano qualquer.
- 2) Dada uma colisão possível, também é possível aquela em que todas as velocidades são rotadas segundo um mesmo ângulo arbitrário em torno a um mesmo eixo igualmente arbitrário.
- 3) Se uma grandeza é conservada em um SIR, então é conservada em qualquer outro SIR.

Em particular, podemos aplicar esses pontos para dizer que

- 1') Se $g(\bullet; (v_i; v_j; v_k))$ é uma grandeza conservada, então também o é $g(\bullet; (-v_i; v_j; v_k))$. Isto é consequência do ponto 1) fazendo a reflexão no plano YZ.
- 2') Se $g(\bullet; (v_i; v_j; v_k))$ é uma grandeza conservada, então também o é $g(\bullet; (v_j; v_k; v_i))$. Isto segue do ponto 2) fazendo uma rotação de $2\pi/3$ em torno ao eixo $(1; 1; 1)/\sqrt{3}$.
- 3') Se $g(\bullet; \mathbf{v})$ é uma grandeza conservada, então também $g(\bullet; -\mathbf{v})$ é conservada. Isto se deduz de uma aplicação sucessiva dos pontos 1') e 2') repetidamente [especificamente, 1')-2')-1')-2')-1')-2')].
- 4') Se $g(\bullet; \mathbf{v})$ é uma grandeza conservada, então $g(\bullet; \mathbf{V} + \mathbf{v})$ também é conservada, qualquer que seja $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$. Isto, evidentemente, é consequência do ponto 3).

Além do mais, é trivial mostrar, partindo da definição dada na equação (3), que qualquer combinação linear de grandezas conservadas também é conservada.

A aplicação dessas simples regras à grandeza conservada g da equação (5) permite estabelecer que também

são conservadas:

$$g_1 := \frac{1}{2}(g(\mathbf{v}) + g(-\mathbf{v})) = \lambda + \frac{1}{2}\mu\|\mathbf{v}\|^2, \quad (\text{A.1})$$

$$g_2 := \frac{1}{2}(g(\mathbf{v}) - g(-\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^3 \mu_i v_i, \quad (\text{A.2})$$

$$g_3 := \frac{1}{2}(g_2(v_i; v_j; v_k) - g_2(-v_i; v_j; v_k)) = \mu_i v_i, \quad (\text{A.3})$$

$$g_4 := g_3(v_j; v_k; v_i) = \mu_i v_j, \quad (\text{A.4})$$

$$g_5 := \frac{1}{V_i}(g_3(\mathbf{v} + \mathbf{V}) - g_3(\mathbf{v})) = \mu_i, \quad (\text{A.5})$$

$$g_6 := g_1(\mathbf{v} + \mathbf{V}) - g_1(\mathbf{v}) = \mu \sum_{i=1}^3 v_i V_i + \frac{1}{2}\mu\|\mathbf{V}\|^2, \quad (\text{A.6})$$

$$g_7 := \frac{1}{\|\mathbf{V}\|^2}(g_6(\mathbf{v}) + g_6(-\mathbf{v})) = \mu, \quad (\text{A.7})$$

$$g_8 := \frac{1}{2}(g_6(\mathbf{v}) - g_6(-\mathbf{v})) = \mu \sum_{i=1}^3 v_i V_i, \quad (\text{A.8})$$

$$g_9 := \frac{1}{2V_i}(g_8(v_i; v_j; v_k) - g_8(-v_i; v_j; v_k)) = \mu v_i. \quad (\text{A.9})$$

Referências

- [1] L. Tarásov e A. Tarásova, *Preguntas y problemas de Física* (Editorial Mir, Moscou, 1976).
- [2] J. Mosterín, *Conceptos y teorías en la ciencia* (Alianza Editorial, Madrid, 2003).
- [3] E. McMullin, *Phys. perspect.* **4**, 13 (2002).
- [4] G.F. Vasconcelos Júnior, R.P.S. Costa e B.F. Rizzuti, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **40**, e3304 (2018).
- [5] G. Galilei, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (Alianza Editoria, Madrid, 2011).
- [6] I. Newton, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural* (Tecnos, Madrid, 2011).
- [7] E.A. Desloge, *Classical Mechanics* (John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1982), v. 1.
- [8] M. Spivak, *Physics for mathematicians. Mechanics I* (Publish or Perish, Houston, 2010).
- [9] H. Poincaré, *Science and Hypothesis* (Dover, Nova Iorque, 2011).
- [10] M. Kriele, *Spacetime: Foundations of General Relativity and Differential Geometry* (Springer, Berlim, 2001).
- [11] P.W. Bridgman, *Logic of Modern Physics* (MacMillan, Nova Iorque, 1927).
- [12] Comité International des Poids et Mesures, *Procès-Verbaux des Séances. Deuxième Série – Tome XX. Sessions de 1945 et de 1946* (Gauthier-Villars, Paris, 1947).
- [13] R. Descartes, em: *Principles of Philosophy*, editado por J. Cottingham, R. Stoothoff, D. Murdoch e A. Kenny (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [14] R. Dugas, *A History of Mechanics* (Dover, Nova Iorque, 1988).
- [15] T. Li, R. Li, Z. Chi, Y. Zhang e H. Yang, *Condens. Matter* **9**, 18 (2024).
- [16] A. Lavoisier, *Tratado Elementar de Química* (Madras, São Paulo, 2007).
- [17] L.P. Damasceno, R. Mascarín, J.M.P. Nogueira, D.V. Magalhães e V.S. Bagnato, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e20180248 (2019).
- [18] E. Mach, *The Science of Mechanics: A Critical and Historical Exposition of its Principles* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [19] A.J.C.B. de Saint-Venant, *Principes de Mécaniques fondés sur la Cinématique* (Bachelier, Paris, 1851).
- [20] M. Alonso e E.J. Finn, *Física. Volumen I: Mecánica. Edición revisada y aumentada* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1986).
- [21] O. Kinouchi, G. Menesse e J. Stolfi, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **43**, e20210253 (2021).
- [22] J. Kepler, *Astronomia Nova* (Green Lion Press, Novo México, 2015).
- [23] J. Kepler, *The Harmony of the World* (American Philosophical Society, Filadélfia, 1997).
- [24] C.H. Lehmann, *Geometría analítica* (Limusa, México, 1996).
- [25] O.A. Acevedo, E.M. de Moraes e B.M. Pimentel, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e20180329 (2019).
- [26] M. Bunge, *La ciencia, su método y su filosofía* (Ediciones Siglo veinte, Buenos Aires, 2000).
- [27] R.P. Feynman, *El carácter de la ley física* (Tusquets, Barcelona, 2015).
- [28] R. Fitzpatrick, *An Introduction to Celestial Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
- [29] F. Zwicky, *Helvetica Physica Acta* **6**, 110 (1933).
- [30] J. Binney e S. Tremaine, *Galactic dynamics* (Princeton University Press, Nova Jersey, 2008), 2 ed.
- [31] J.C.C. McKinsey, A.C. Sugar e P. Suppes, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **2**, 253 (1953).
- [32] P. Suppes, *Introduction to Logic* (Van Nostrand, Nova Iorque, 1957).
- [33] E. Prugovečki, *Quantum Mechanics in Hilbert Space* (Dover, Nova Iorque, 1981), 2 ed.
- [34] E. Hecht, *The Physics Teacher* **44**, 40 (2006).
- [35] M. Jammer, *Concepts of Mass: In Classical and Modern Physics* (Dover, Nova Iorque, 1997).
- [36] R. Weinstock, *Am. J. Phys.* **29**, 698 (1961).
- [37] P.A. Goodinson e B.L. Luffman, *Am. J. Phys.* **53**, 40 (1985).
- [38] R.L. Coelho, *The Physics Teacher* **50**, 304 (2012).