

# A descontinuidade do campo elétrico em uma distribuição superficial e esférica de cargas: um invariante topológico

The discontinuity of the electric field in a spherical charge distribution: a topological invariant

Gustavo Elia Assad\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.

Recebido em 03 de novembro de 2020. Aceito em 15 de dezembro de 2020.

Este artigo soma-se aos outros recentes que vêm sendo publicados, principalmente nesta revista que está, ao nosso ver, tornando-se um fórum de discussão deste que é o campo elétrico na superfície de um condutor esférico carregado. Recentemente publicamos um artigo que discutia três modelos para encontrar o recalcitrante fator 1/2 que persegue muitos aficionados por esta questão eletrostática. Desta forma, este texto foi elaborado, exclusivamente, para tentar esclarecer e contrapor, algumas interpretações colocadas em um mais recente artigo [1] que defende uma integral própria para encontrar o teimoso fator. Desta forma, reabordamos o método da superposição do campo de anéis para discutir comportamento do campo através de uma superfície esférica carregada uniformemente, tentando chegar a um consenso.

**Palavras-chave:** campo elétrico de anéis, esfera carregada, descontinuidade.

This article adds to the other recent ones that have been published, mainly in this magazine that is, in our view, becoming a forum for discussion of this which is the electric field on the surface of a charged spherical conductor. We recently published an article that discussed three models for finding the recalcitrant factor 1/2 that chase many fans of this electrostatic issue. In this way, this text was elaborated, exclusively, to try to clarify and oppose, some interpretations put in a later recent article [1] that defends a proper integral to find the stubborn factor. In this way, we reaffirm the method of superposition of the ring field to discuss the field's behavior through a uniformly charged spherical surface, trying to reach a consensus.

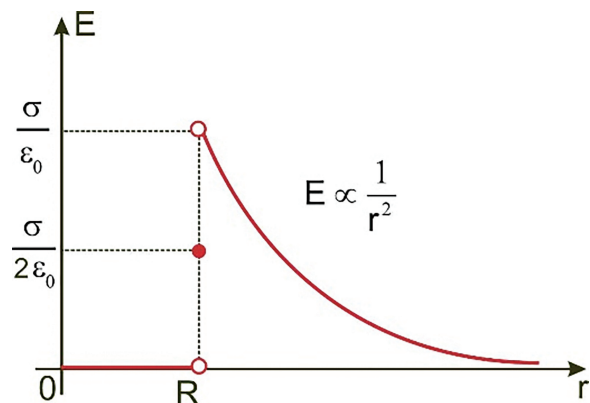
**Keywords:** electric field of rings, charged sphere, discontinuity.

## 1. Introdução

Na intenção de esclarecer o comportamento do campo elétrico sobre e através da superfície de um condutor esférico com distribuição superficial de cargas ( $\sigma$  é considerado constante em qualquer situação mostrada ao longo da discussão deste texto), trazemos, motivados por um artigo muito recente publicado nesta revista por Lima [1], um contraponto ao que esta referência tenta “demonstrar”, refutando os argumentos por nós colocados, em [2]. Na Ref. [1], o autor conclui que, para um modelo de distribuição superficial de cargas:

**O campo elétrico é então *descontínuo* na superfície de uma esfera condutora, saltando de 0 para  $\sigma/(2\epsilon_0)$  quando passamos de pontos dentro da esfera para qualquer ponto em sua superfície, e então deste para  $\sigma/\epsilon_0$  para pontos imediatamente externos a esfera.<sup>1</sup>**

Indicando que o comportamento do valor campo elétrico através da superfície de um condutor é dado conforme a representação da Figura 1. Mostraremos, outra vez, que a regularização da integral imprópria encontrada, leva ao fator 1/2 que representa o campo gerado por todas as cargas na vizinhança P, excetuando-se



**Figura 1:** Comportamento gráfico do campo elétrico em uma distribuição esférica superficial de cargas, segundo a Ref. [1].

\* Endereço de correspondência: gustavo.elia.assad@gmail.com

<sup>1</sup> Texto traduzido para a língua portuguesa.

a carga do elemento de superfície que encerra P. Isto não indica, em absoluto, que o comportamento do campo se dá como o representado na Figura 1.

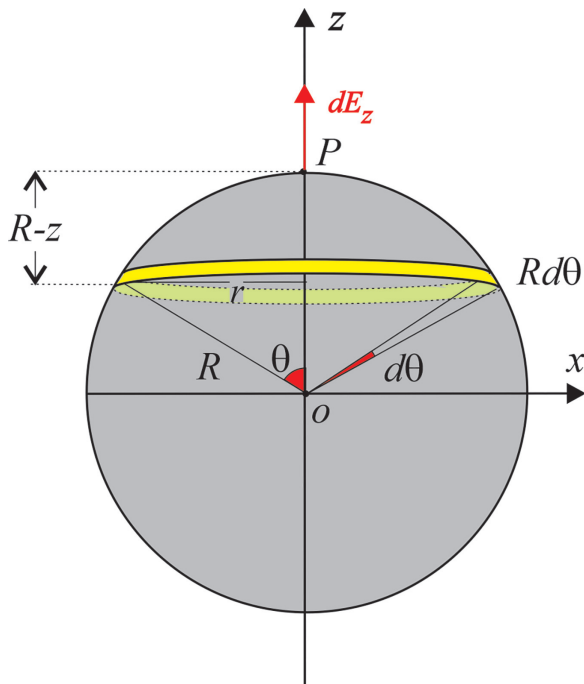
## 2. O Método da Superposição do Campo de Anéis

Embora não achemos que este procedimento seja o mais simples para a determinação destes resultados (a lei de Gauss é rápida e suficiente para nos mostrar o que vemos na Eq. (9) e a descontinuidade na superfície. Lembremo-nos de Occam e sua navalha!), a superposição do campo de anéis tem sido usada para a discussão do campo elétrico na superfície em alguns artigos recentes publicados na RBEF, são eles [1–3] e [4]. Desta forma, para efeito comparativo direto, *ipsis litteris* por Lima [1], reproduziremos o ubíquo resultado do campo de um anel carregado com carga  $dQ$ , apoiado sobre uma esfera (Figura 2), gerando em um ponto da superfície um campo dado por:

$$dE_Z = k_0 \frac{(R - z)}{[r^2 + (R - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dQ \quad (1)$$

Usando  $z = R \cos \theta$  e  $r = R \sin \theta$  e  $dQ = \sigma(2\pi r R d\theta)$ ,<sup>2</sup> encontra-se:

$$dE_Z = \frac{\pi}{\sqrt{2}} k_0 \sigma \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta \quad (2a)$$



**Figura 2:** Representação do anel de carga  $dQ$  uma esfera de raio  $R$  e o campo que ele produz ao longo do eixo de simetria no ponto  $P$ .

<sup>2</sup> O elemento de carga pode ser escrito, sem perda de generalidade, por  $dQ = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta$ .

ou

$$dE_Z = \frac{k_0 dQ}{2R^2 \sqrt{2(1 - \cos \theta)}} \quad (2b)$$

Tomando as identidades  $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$  e  $\sin^2(\theta/2) = (1 - \cos \theta)/2$ , tem-se:

$$dE_Z = \pi k_0 \sigma \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (3a)$$

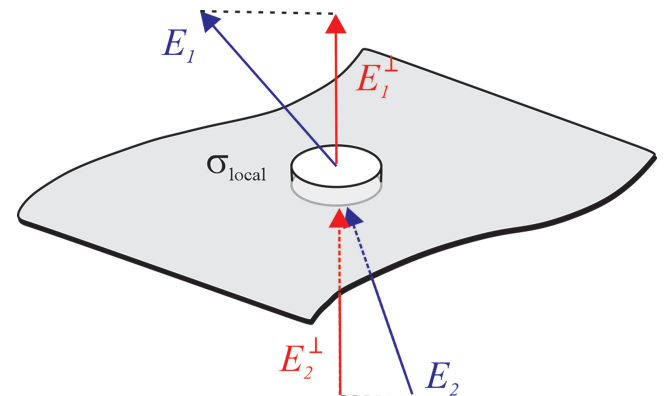
ou

$$dE_Z = \frac{k_0 dQ}{4R^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (3b)$$

Agora, temos três grupos de equações para descrever o mesmo campo gerado por um anel carregado com carga  $dQ$ . Qual o campo  $dE_z$  para  $r=0$ ,  $z=R$  ou  $\theta = 0$ ? Nitidamente, as Equações (1) e (2) mostram que ele é indefinido neste ponto, o que o Lima também concorda [1]. Então, quando passamos para a Equação (3), onde deveríamos obter o mesmo resultado, Lima diz que, agora, o campo é definido neste ponto. A descontinuidade/continuidade é um invariante topológico e as três equações devem e mostram o mesmo resultado. Uma mudança de variável não faz a função (campo) deixar de ser descontínua num ponto ( $z = R$ ), e não fará  $dE_z$  ser definido neste ponto. A reinclusão do ponto representativo de  $z = R$  (ou  $\theta = 0$ ), feita pelo autor, mostra-se equivocada. Qualquer variação da Equação (1) ou integrações para a determinação do campo em  $P$ , devem valer em  $[-R, R)$  ou seu análogos, inclusive a Equação (3a).

Uma carga não gera campo nem força sobre ela mesma. Basta fazer  $r = 0$  e  $z = R$  na Eq. (1); e  $\theta = 0$  nas Eqs. (2a,2b) e (3b). Na Equação (3a), a indefinição do campo fica obscurecida pela manipulação algébrica proposta, mas é facilmente vista quando  $d\theta$  é trocado por uma expressão com  $dQ$  (i.e.  $dQ = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta$ ), conforme mostrado na Eq. (3b).

Para ratificar a argumentação acima, observe a Figura 3 e apliquemos a lei de Gauss sobre o elemento



**Figura 3:** Descontinuidade da componente normal do campo elétrico através de uma superfície carregada.

de superfície cilíndrico (*pill box*) para encontrar a conhecida equação da descontinuidade, aqui mostrada na Equação (4) encontrada na ampla literatura de nível superior (e.g. pág. 31 da Ref. [5]).

$$E_1^\perp - E_2^\perp = \frac{\sigma_{Local}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dQ_{Local}}{dA} \quad (4)$$

A descontinuidade em uma superfície carregada é uma função da carga local, ou melhor, da densidade de carga local. Se não há carga em um elemento de área da superfície não há descontinuidade através deste elemento. Tomando o bem conhecido livro de eletrodinâmica de David Griffith [6], veja a transcrição de um fragmento de texto da pág. 102, que reitera os argumentos acima.

**Agora, o elemento de área não pode exercer uma força sobre ele mesmo, da mesma forma que você não pode erguer a si mesmo ficando em pé em um cesto e puxando as alças. A força no elemento, então, deve-se exclusivamente ao  $E_{Outras}$ , e este não sofre descontinuidade (se retirássemos o elemento, o campo no “buraco” seria perfeitamente suave/regular). A descontinuidade deve-se inteiramente à carga do elemento.**<sup>3</sup>

Mesmo diante da argumentação de Griffith [6], um resultado ubíquo na literatura, o autor (em [1]) afirma que a presença de uma carga elétrica ( $dQ$ ) em um ponto não cria um campo infinito neste ponto e que o campo dela pode ser definido sobre ela mesma. Como argumento, usa o conhecido campo no interior de uma esfera uniformemente carregada (*i.e.*  $E(r) = (k|Q|/R^3)r$ ). Este é o campo da carga líquida contida no interior de uma superfície gaussiana ( $q_{Gauss}$ ) de raio  $r$ , sobre esta superfície (*i.e.*  $k|q_{Gauss}|/r^2$ ). Este é um excelente resultado que mostra que, conforme em [2], se há uma distribuição volumétrica de cargas, em casca ou esfera, existe uma transição contínua do campo através desse volume até a superfície. Este resultado não mostra o campo de um elemento infinitesimal desta distribuição sobre ele mesmo.

Em outro trecho, Lima afirma que a Eq. (1) não apresenta uma singularidade não integrável em  $z = R$  (extensivo para as Eqs. (2) e (3)) sob o argumento de que o ponto P é encerrado por uma área nula e, portanto, não está associado a uma quantidade finita de carga, não podendo, assim, ser tratado como uma carga puntiforme. Se não houvesse carga em P:

- (i) a densidade local de cargas seria nula e não haveria descontinuidade alguma;
- (ii) se  $\sigma = 0$  e  $dQ = 0$ , as Equações (2a,2b e 3a,3b), obviamente, levariam ao valor  $E_P = 0$ , mostrando

que este é um ponto “vazio” e esse elemento em nada influencia na superposição dos anéis. Em suma, o campo calculado em P só se deve ao restante das cargas, é dado por todas as cargas, menos a do anel de P;

- (iii) o campo evoluiria suavemente de dentro para fora (de 0 a 1 ou 0 a  $\sigma/\varepsilon_0$ ), passando por infinitos valores e até mesmo por 1/2 na superfície, mas, de forma alguma, seria descontínuo ou representado pelo gráfico da Figura 1, defendido pelo Teorema encontrado em [1]. (Vide transcrição do Griffith acima);
- (iv) não haveria força radial para fora sobre o elemento de superfície em P nem sobre qualquer outro elemento da superfície da esfera<sup>4</sup>;
- (v) não haveria pressão eletrostática alguma sobre a superfície da esfera.<sup>5</sup>

Sendo assim, existe sim um elemento de carga não nulo em ambos os anéis diametralmente opostos da esfera (em  $z = \pm R$ ) dados, justamente, por  $dQ = \sigma dA$  (para que  $\sigma$  seja constante, finito e diferente de zero,  $dQ$  e  $dA$  são não nulos). Contudo, para mostrar que este elemento de carga se comporta como uma carga puntiforme, façamos  $r = 0$  e  $d = R - z$  na Eq. (1), encontrando a expressão para o campo de uma carga puntiforme a uma distância “ $d$ ” não nula da mesma e que não está definido em  $d = 0$  (ou  $z = R$ ).

$$dE_Z = \frac{k_0 dQ}{d^2} \quad (5a)$$

Em um caso particular de um ponto sobre a esfera, podemos fazer  $z = -R$  na Eq. (1); e  $\theta = \pi$  nas Eqs. (2b) e (3b), encontrando, em todas,

$$dE_Z = \frac{k_0 dQ}{4R^2} \quad (5b)$$

Esta é a expressão do campo de uma carga puntiforme  $dQ$  a uma distância  $2R$  da mesma. Obviamente, isto ocorre pois  $d = 2R \gg R d\theta$ . Ao nos aproximarmos muito do elemento de carga  $dQ$ , que ocupa a superfície  $dA$  em  $z = R$ , ele irá se comportar como um pequeno disco carregado, gerando em pontos próximos à sua face um campo de módulo  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  para dentro e para fora da esfera. Não estamos dizendo que o campo do disco é infinito, estamos dizendo que este pequeno disco gera campos com valores finitos e sentidos opostos em suas faces ( $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ) e que o campo não está definido sobre a superfície, sobre o próprio disco, onde  $d = 0$  ou  $z = R$ . Então, o restante das cargas deve gerar um

<sup>4</sup> A força elétrica sobre a superfície ( $dF = \sigma dQ/2\varepsilon_0$ ) pode ser vista na página 30 da Ref. [7].

<sup>5</sup> Se tomarmos a expressão da nota de rodapé anterior e substituímos  $dQ$  por  $\sigma dA$ , encontramos a força por unidade de área ou a pressão eletrostática ( $dF/dA = p = \sigma^2/2\varepsilon_0$ ) que pode ser vista na Ref. [6] ou na página 32 da Ref. [7], inclusive com um cálculo de um valor típico de  $3,6 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$ .

<sup>3</sup> Texto traduzido para a língua portuguesa.

campo em P  $\left(+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)$  de dentro para fora (é aí que está o recalcitrante fator 1/2), de modo a fazer com que o campo interno seja nulo e o externo seja  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Mais adiante, como já feito em [2], mostraremos como se comporta o campo quando “viajamos” através de um orifício na esfera, tal qual através do ponto P quando se retira a carga  $dQ$ . Passaremos por 1/2 e não saltaremos para ele.

### 3. A Integração

Admitindo-se, como dito por Jackson [5], Griffith [6], Purcell [7], etc., que o campo é descontínuo na superfície de um condutor com distribuição superficial de cargas, no caso da geometria esférica e com o método da superposição de anéis, a superposição de todos os anéis sobre a esfera gera uma singularidade não integrável em pontos da superfície. Assim, para regularizar a integral, exclui-se o ponto do domínio em que há descontinuidade (em que o integrando diverge) e procede-se com o limite de aproximação de P. Método já mostrado e bem fundamentado em [2, 3] e [4]. Para generalizar, considere  $dE_z$  função de uma variável qualquer (e.g.  $dE_z = f(w)$ ), com descontinuidade em  $w = a$  ( $f(a)$  é indefinido). O procedimento bem conhecido de regularização da integral imprópria é:

$$\int_a^b f(w)dw = \lim_{k \rightarrow a} \int_k^b f(w)dw \quad (6)$$

Desta forma, os procedimentos de integração associados às Eqs. (1–3), retirando-se um elemento infinitesimal de carga ( $dq$ ) da superfície, levariam ao mesmo fator 1/2. Isto é, o campo gerado por todas as cargas da vizinhança de P ( $E_{Q-dq}$ ), excluindo-se a carga deste elemento de superfície seria radial para fora e dado por:

$$E_{Q-dq}|_{z=R} = \frac{1}{2} k_0 \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (7)$$

Onde  $Q$  é a carga total da esfera. Este campo, ao se superpor ao campo do elemento de superfície em  $z = R$ , zera o campo no interior, faz o campo ser  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  em pontos externos muito próximos da esfera e cria descontinuidade em  $z = R$ .

Com todo o rigor matemático, na Ref. [2] é mostrada uma expressão para o cálculo do campo de “todos” os anéis em um ponto qualquer do diâmetro da esfera e não só na superfície. A equação na forma dimensional é mostrada a seguir na Equação (8). O eixo de simetria foi tomado no eixo  $z$  para efeito comparativo com [1].

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R}{z} \left[ \frac{-R+z}{\sqrt{(-R+z)^2}} + 1 \right], \quad z \neq \pm R \quad (8)$$

A descontinuidade no valor do campo pode ser rigorosamente obtida quando se faz o limite de  $E(z)$  com

$z$  tendendo a  $R$  pela direita e pela esquerda, além de que,  $E(R)$  é indefinido, a função  $E(z)$ , como esperado, apresenta uma descontinuidade na superfície, conforme mostra a Figura 4. Na Figura 5, coloca-se o conhecido gráfico do potencial elétrico com destaque para a não diferenciação do mesmo com respeito a  $z$ , em  $z = R$ , ratificando a descontinuidade do campo.

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow R^-} E(z) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow R^+} E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (9)$$

Agora, se retirarmos o elemento de carga do elemento de área onde se encontra P, conforme as palavras citadas de David Griffith [6], o campo deve evoluir suavemente entre seus notórios valores de “0” no interior da esfera até “ $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ” em pontos justapostos à sua superfície. Para verificar este comportamento, em [2], o procedimento de retirada do elemento de carga é feito através da alteração do limite de integração, tal qual feito nas demais referências associadas, levando ao seguinte resultado:

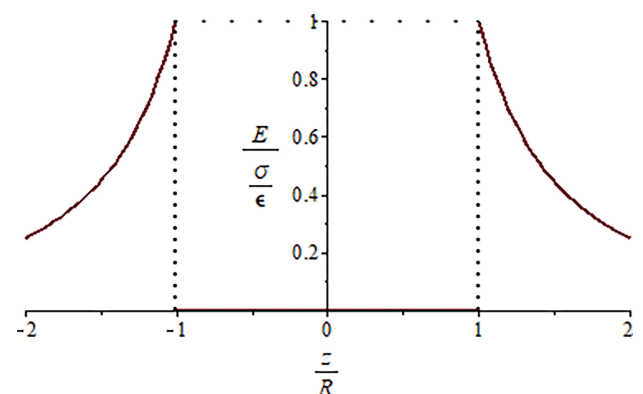
$$E(z, \xi) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R}{z} \left( 1 + \frac{-R + z \cos(\xi)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos(\xi)}} \right) \quad (10)$$

Esta equação mostra que quando  $\xi \rightarrow 0$ , o campo neste pequeno orifício é “ $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ” e que não há, de fato, descontinuidade alguma entre pontos internos e externos. Os limites laterais são absolutamente iguais e também assumem este valor. Vide Eq. (11).

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} E(z \rightarrow R^+, \xi) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

Para mostrar a transição do campo através do orifício e a confirmação da não descontinuidade, observe a Figura 6 que mostra a plotagem de três gráficos representativo da Eq. (10), com  $\xi = 10^{-7}$  rad em três escalas diferentes.

Estes gráficos, com escalas horizontais diferentes, mostram a evolução do campo quando “viajamos” através do



**Figura 4:** Descontinuidade do campo elétrico na superfície do condutor esférico.

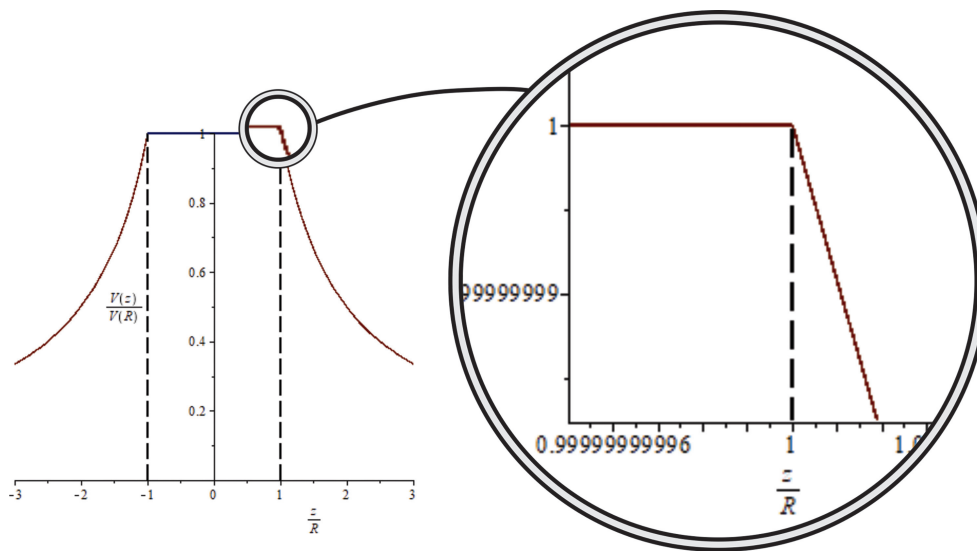


Figura 5: Gráfico de  $V(z)$  com destaque para o fato de que esta função é NÃO derivável em  $z = R$  (superfície).

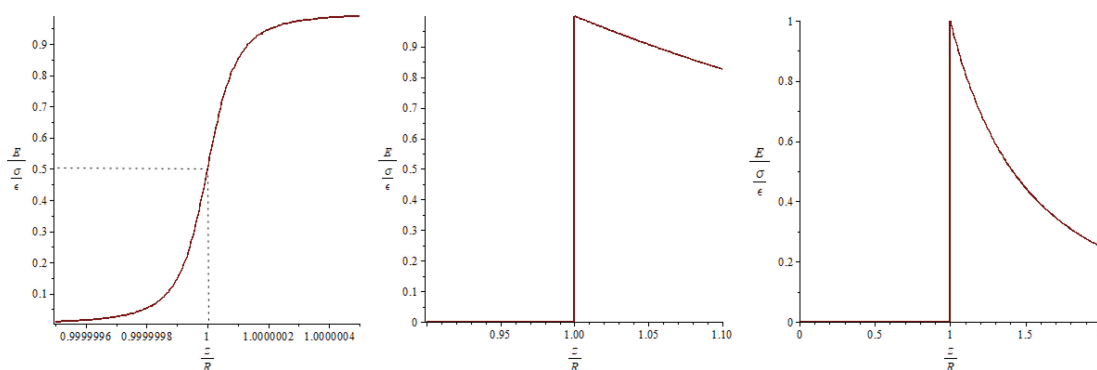


Figura 6: Gráficos que mostram a evolução do campo através do elemento de área carregado retirado da superfície do condutor no ponto P.

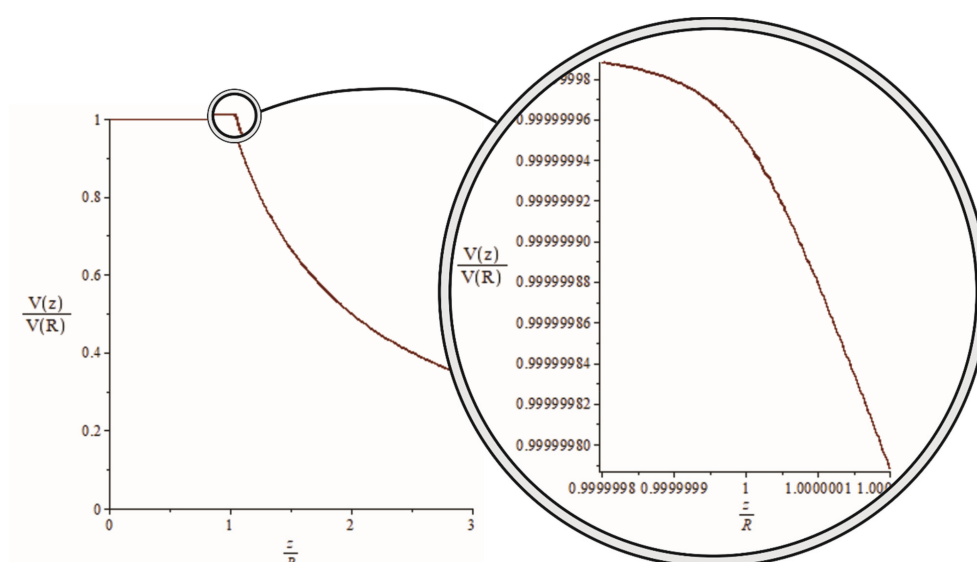


Figura 7: Comportamento do potencial elétrico em função da posição, ao longo de uma direção radial com destaque para a transição entre pontos internos e externos próximos do "buraco" deixado pela retirada do elemento de carga  $dq$ .

orifício de onde foi retirada a carga da superfície para eliminar a descontinuidade do campo. Ao ponto que nos afastamos da esfera, vemos uma transição súbita do valor do campo  $e$ , quando próximos, vemos que, de fato, o campo evolui suavemente através desse, mostrando mais uma vez que, em se retirando o elemento de superfície, a descontinuidade não mais existe. Não obstante, como o campo é contínuo em todo o domínio e sabendo que  $E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}$  mostra-se, na Figura 7, o comportamento do potencial elétrico ao longo do eixo  $z$ , com destaque para pontos muito próximos de  $z = R$ , de onde foi retirado o elemento de carga e por onde transita-se através do “buraco”. Este destaque mostra que  $V(z)$  está longe de estar associado à transição do campo sugerida em [1] e representada no gráfico da Fig. 1. Sugere-se, enfim, que o leitor se indague: como seria o comportamento do potencial se a transição do campo fosse, de fato, como mostrada na Fig. 1?

#### 4. Conclusões

Após análise da metodologia adotada por [1], observamos que o uso da superposição de anéis para a determinação do campo elétrico em um ponto da superfície carregada de um condutor esférico apresenta um nítida descontinuidade em  $z = R$ , evidenciada, exatamente, a partir da fórmula clássica do campo elétrico gerado por um anel em pontos do eixo de simetria do mesmo, Eq. (1). O campo não deixa de ser descontínuo neste ponto ( $z = R$  ou  $\theta = 0$ ), nem a função não passa a ser integrável nele, por uma mudança de variável. A descontinuidade tem invariância topológica. Todas as Equações advindas de (1) devem ser aplicáveis em todos os pontos do domínio, excetuando-se  $z = R$ , inclusive a Equação (3a), através da qual Lima [1] afirma que o ponto pode ser reincluído e que leva ao suposto salto de  $E = 0$  até  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  e deste para  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Sendo assim, os limites de integração associados às Equações (1-3) devem ser  $[-R, R]$  e  $(0, \pi]$ . Ainda, conforme o próprio autor, a retirada deste ponto do domínio não afeta o valor da integração e leva ao mesmo fator  $1/2$  (associado ao Valor Principal de Cauchy para integrais impróprias) mas, não faz o campo variar de acordo com a Fig. 1. O campo transitaria suavemente de  $E = 0$  a  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  através do orifício deixado em P, conforme dito por [6] e demonstrado por [2] com a Eq. (10) e a representação gráfica na Fig. 5. Isto não é nada além de estarmos dizendo que a descontinuidade do campo elétrico em uma superfície carregada é dada, exclusivamente pela carga presente no elemento de superfície, pela densidade de cargas local. Excluindo-se este elemento, não há mais descontinuidade, conforme ratificado pela famosa Ref. [5].

Por fim, se o modelo adotado é o de uma distribuição superficial esférica de cargas, o gráfico representativo é o da Figura 4 e sugere-se:

*“Para qualquer esfera condutora de raio  $R$  e densidade superficial  $\sigma$ , em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é descontínuo em pontos de sua superfície, nulo em seu interior e  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  para pontos da superfície externa quando, então, cai com a lei do inverso do quadrado da distância ao centro da esfera.”*

#### REFERÊNCIAS

- [1] F.M.S. Lima, Rev. Bras. Ensino Fís. **42**, e20200182 (2020)
- [2] G.E. Assad, Rev. Bras. Ens. Fís. **42**, e20190245 (2020)
- [3] K. Slodkowski, M.C. Pinheiro e T.C. Luchese, Rev. Bras. Ensino Fís. **40**, e2311 (2018).
- [4] F.M.S. Lima, Resonance **23**, 1215 (2018)
- [5] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics: (Wiley, New York, 1998), 3rd ed., p. 31.
- [6] D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics (Prentice Hall, Upper Saddle River-NJ, 1999), p. 102.
- [7] E.M. Purcell e D. J. Morin, Electricity and Magnetism: 3rd ed. (Cambridge University Press, New York, 2013), v. 2.