

O estilo orgânico de matematização newtoniana: implicações para a abordagem matemática no ensino de física

The organic style of Newtonian mathematization: implications for the mathematical approach in physics education

Otávio Bochecho^{*1}, Frederico Firmo de Souza Cruz², Sandro da Silva Livramento Machado³

¹Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Catarinense, Rio do Sul, SC, Brasil.

²Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

³Instituto Estadual de Educação de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

Recebido em 12 de setembro de 2024. Revisado em 29 de novembro de 2024. Aceito em 29 de dezembro de 2024.

Este artigo apresenta uma análise histórica-epistemológica do estilo orgânico de matematização newtoniana, durante o processo de formalização da sua mecânica racional. De acordo com a literatura, a problemática educacional, referente a abordagem matemática no ensino de física diz respeito a uma questão epistemológica e não, estritamente, metodológica. O caminho para uma nova concepção epistemológica seria através da análise histórico-epistemológica, do papel que a matemática desempenha no processo de formalização da física. Mais que uma ferramenta de cálculo, a matemática desempenha um papel de estrutura, de modo a revelar relações físico-matemáticas que conectam matemática e natureza. São realizados apontamentos para o ensino de física, quanto à necessidade dos professores e professoras se atentarem à construção dos significados que estariam condensados nestas relações físico-matemáticas, tornando o processo de matematização em salas de aula e materiais didáticos de física mais fenomenológico e menos técnico-operacional.

Palavras-chave: Matematização no ensino de física, relações entre matemática e física, matematização newtoniana, ensino de física.

This article presents a historical-epistemological analysis of the organic style of Newtonian mathematization while formalizing its rational mechanics. According to the literature, the educational problem underlying the mathematical approach in physics teaching concerns an epistemological issue rather than a methodological one. The path to a new epistemological conception would be through historical-epistemological analysis regarding mathematics' role in formalizing physics. More than a calculation tool, mathematics plays a structural role, revealing physics-mathematical relationships that connect mathematics and nature. This analysis is relevant to physics education, emphasizing the need for physics teachers to pay close attention to the construction of meanings embedded in the physics-mathematical relationships. In doing so, the process of mathematization in classrooms and physics teaching materials becomes more phenomenological and less technical-operational.

Keywords: Mathematics in physics education, interplay between mathematics and physics, Newtonian mathematization, physics teaching.

1. Introdução

No cenário nacional, pesquisas detectam que a abordagem da matemática no ensino de física é um dos fatores que potencializa uma ojeriza ao aprendizado desta ciência empírica, integralmente matematizada [1–3]. Isto fornece evidências de que há uma problemática educacional subjacente à prática de matematização no ensino de física.

Conforme evidenciado pelas pesquisas supracitadas, muitos estudantes e até professores de outras áreas confundem a disciplina de física com a matemática, chegando ao exagero de interpretar a primeira como

atividades subjacentes a habilidades algébricas e geométricas da segunda. A fala dos alunos sugere aos pesquisadores um ensino de física centrado, unicamente, em cálculos numéricos, crendo que para ter sucesso ou domínio da mesma, basta decorar fórmulas, a elas aplicar números e obter outros números. A disciplina de física, para eles, resume-se a resolver exercícios envolvendo cálculos ou, simplesmente, executar ‘*contas*’.

Esta abordagem *técnico-instrumental* [4], vazia de significado físico ou fenomenológico, está longe de revelar a matemática como um instrumento voltado para a constituição do pensamento físico. Tanto que a maioria dos estudantes, quando se defronta com determinados problemas de física, pensa logo na aplicação de fórmulas, sem cogitar que funções, equações ou modelos

*Endereço de correspondência: otavio.bochecho@ifc.edu.br

matemáticos permitem a interpretação de fenômenos físicos. Uma espécie de conversa entre matemática e natureza, a partir de relações físico-matemáticas que estão condensadas nas estruturas matemáticas da física.

Para além de um cálculo numérico, é a relação físico-matemática entre força ($\vec{F}$) e massa inercial (m) que permite um estudante interpretar se um carrinho de compras vazio acelera mais que outro cheio, quando empurrado pela mesma força. Isto parece banal, porém, tal significado relacional está condensado em $\vec{F} = m\vec{a}$ e, muitas vezes, tem sua construção ignorada no ensino de física, devido à escolha didática por cálculos numéricos, estritamente, técnicos e operacionais.

É necessário, durante o processo de matematização no ensino de física, a construção de significados que propiciem interpretações físico-matemáticas, de modo a revelar uma fenomenologia física. Algo que extrapola a resolução repetitiva de exercícios voltados a *técnica-instrumental* de cálculos numéricos mecânicos.

Mas, *tal problemática educacional, referente à abordagem da matemática no ensino de física, se reduziria a uma questão metodológica de ensino?*

Para Karam e Pietrocola [4, 5], o equívoco estaria na concepção do professorado quanto ao papel desempenhado pela matemática na construção teórica da física. Seria muito mais um equívoco epistemológico do que metodológico. O que, talvez, seria o motivo pela preferência do professorado por uma abordagem matemática mais técnica e operacional, ao invés de uma abordagem mais fenomenológica.

Como o entendimento do papel que a matemática desempenha no processo de teorização da física é rasteiro, o alcance semântico que a primeira desempenha no ensino da segunda ficaria comprometido. Por isso, para estes autores é necessária aos professores, bem como autores de materiais didáticos, uma nova concepção epistemológica, da função que a matemática exerce na elaboração teórica da física. Segundo os autores, a chave para esta mudança estaria na análise e/ou estudos históricos e epistemológicos, das relações de troca entre matemática e física, durante o processo de teorização da última. Algo que, para Paty [6], físico e filósofo francês, seria altamente instrutivo e amplamente evidenciado.

Neste sentido, uma análise historiográfica e epistêmica capaz de iluminar a concepção de professores e professoras, bem como de autores e autoras de materiais didáticos de física, é a do estilo orgânico newtoniano de matematizar a mecânica racional. Estudos deste estilo poderiam evocar uma excelente fundamentação epistemológica para uma troca de lente e novas escolhas didáticas, podendo proporcionar um processo de matematização no ensino de ideias físicas mais fenomenológico e menos técnico operacional.

O estilo de matematização newtoniana está atrelado a uma explicação do mundo, através de uma mediação orgânica físico-matemática. Na física newtoniana não é a matemática que explica, afinal a explicação está

na relação causa-efeito, que é estabelecida por relações físico-matemáticas.

Ao matematizar a sua mecânica racional, Newton incorpora o espaço geométrico com o espaço físico, de modo que não ocorre uma distinção entre ambos. Afinal, de acordo com Calazans [7], eles se concentram na mesma base ontológica. Sua preocupação é tanto com a matemática quanto com a natureza.

Esta integração ou mediação orgânica físico-matemática evidencia o papel *estruturante* [5] que a matemática desempenha, durante a construção teórica da física. Mais que uma ferramenta de cálculo, a matemática adentra na construção teórica das ideias físicas. É aí que reside a sua função estrutural, importante para um processo de matematização mais fenomenológico no ensino de física.

Esta concepção *estruturante* diz respeito a uma nova postura epistemológica, perante o discurso de matematização em salas de aula ou materiais didáticos de física. Uma postura cuja intencionalidade didática preocupasse em revelar um processo de matematização recheado de conteúdo fenomenológico, onde as estruturas matemáticas apresentadas no ensino de ideias físicas estejam voltadas para a estruturação do pensamento físico. Diferente da postura *técnica-instrumental*, reveladora de uma matemática como ferramenta de cálculos numéricos estéreis, perante a fenomenologia física.

Diante deste cenário, o presente artigo apresenta o estrato de uma pesquisa bibliográfica, de episódios históricos e filosóficos do processo de matematização da mecânica racional de Newton, a fim de potencializar reflexões didáticas, quanto à abordagem matemática no ensino de física.

Colaborar para superar a concepção rasteira de que a matemática é apenas uma linguagem de comunicação das teorias físicas é o objetivo da presente pesquisa. Diversos materiais didáticos, por exemplo, apresentam, de forma explícita ou implícita, que a matemática é inserida na física depois de pensadas as teorias. Por isso, seria compreensível o porquê de professores e professoras de física, em geral, apresentarem as leis de Newton como a mera aplicação operacional $\vec{F} = m\vec{a}$.

Obviamente, a conexão desta pesquisa com a formação docente se faz necessária. Afinal, seria este o cenário mais propício para se atingir os objetivos didáticos propostos aqui.

Por último, para satisfazer o objetivo de apresentar elementos históricos e filosóficos do processo de matematização da mecânica racional newtoniana e evidenciar a estreita relação entre matemática e física na ciência dos movimentos, de forma a revelar o papel *estruturante* da primeira na teorização da segunda, utiliza-se de fontes secundárias, de autores reconhecidos pela comunidade, que pesquisam em fontes primárias newtonianas e evidenciam o nascimento de uma chamada física-matemática newtoniana, dentro de um estilo próprio de matematização orgânica, que integra matemática e natureza.

2. Newton e a Fundação de Uma Física-Matemática

Referente à construção da física newtoniana, não seria exagero afirmar que o seu estilo de matematização inaugura as mediações ou conjunções mais fortes entre matemática e física [8, 9]. Isto pode ser evidenciado na constituição teórica da estrutura explicativa da sua mecânica racional e da sua teorização sobre o espectro de cores, que utiliza uma física-matemática.

O estilo newtoniano de matematizar tinha como meta chegar a propriedades físico-matemáticas e relações (trajetórias, velocidade, força, espectro de cores). A natureza das causas (da força gravitacional ou da luz, por exemplo) não tinham uma importância primordial.

Os problemas que o impulsionam eram tanto físicos quanto matemáticos; dada a trajetória determinar a força; através da trajetória da luz, explicar o espectro de cores.

O caminho de matematização de Newton tem em seu pressuposto a interpretação de fenômenos físicos partindo-se de uma grandeza física mensurável, capaz de gerar uma estrutura matemática, munida de relações físico-matemáticas. Diferente de outros, cujas premissas giravam em torno de causas conceituais.

Ao responder algo, Newton provê soluções onde a física e a matemática aparecem dentro de uma conjugalidade orgânica e *estruturante*. Um casamento físico-matemático. Mas qual a essência desta conjugalidade estrutural?

Como se verá mais adiante, Newton procura caminhos metodológicos de matematização que o levem até uma grandeza física mensurável, capaz de gerar um sistema de relações que conecta grandezas físicas umas às outras. É dentro destas relações que Newton cria uma estrutura explicativa para o movimento e as cores. Newton busca na fenomenologia física um caminho que o conduz a matemática. Uma organicidade onde a física é entendida junto dos instrumentos/conceitos matemáticos, transformando o pensar físico num pensamento físico-matemático.

Conforme afirma Ricardo [10, p. 69], “pensar o movimento matematicamente e não empiricamente exigiu de Newton uma física-matemática”. Curvas e figuras geométricas, entidades matemáticas, foram aproximadas da física e explicadas como linhas em movimento (trajetória), de forma a levar Newton a compreensão do funcionamento do Universo. Por exemplo, para corpos matemáticos sujeitos a forças centrais, Newton explica a dinâmica do movimento de planetas, satélites e outros fenômenos [8, 9].

Basicamente, a mecânica racional de Newton condiz com uma mecânica do ponto material. Afinal, sua essência matemática está na trajetória, que possibilita-o estruturar, matematicamente, a força.

O mesmo pode-se verificar em sua teoria matemática para as cores. Newton decide romper não só com a

escolástica aristotélica, mas também com as teorias anti-escolásticas, principalmente, aquelas sob influência cartesiana e hookeana¹. Newton se afasta das concepções qualitativas de Descartes e Hooke, cujo objetivo era, basicamente, alcançar uma concepção da natureza da luz e sua maneira de produzir efeitos. Um caminho metodológico de matematização pouco frutífero [8]. Com isto, Newton rejeita a concepção de uma luz solar homogênea, de onde as cores proveriam acidentalmente, e propõe uma luz composta, desde a sua origem, por raios de diferentes cores, que em certas circunstâncias (como a refração e a reflexão) podem se separar uns dos outros. Uma concepção alinhada com a teorização da óptica geométrica, a qual dispensa hipóteses referentes à natureza da luz.

É este caminho metodológico de matematização que o levaria a uma caracterização quantitativa dos efeitos luminosos. Afinal, possibilitaria a identificação de uma grandeza física mensurável (neste caso, o grau de refringibilidade), capaz de estabelecer um sistema de relações físico-matemáticas com potencial explicativo para a formação de um espectro colorido [8].

De acordo com Panza [8], dentro de uma perspectiva parcial e certo desenvolvimento histórico, é possível definir a matemática como a ciência das quantidades e suas relações. Para este filósofo da matemática, os objetos de estudo na geometria eram as formas ou figuras. Porém, a partir da metade do século XIX, ocorre uma transformação desta concepção restrita da matemática para um projeto mais abrangente, onde tais estudos de formas ou figuras são conduzidos a considerações de relações entre quantidades, como as afirmações de que um quadrado se caracteriza pela igualdade entre seus lados e um círculo pela igualdade de seus raios. Tal transformação não é devida, diretamente, a Newton. No entanto, graças a sua obra, duas mudanças iniciaram tal processo de modificação.

A primeira mudança diz respeito a Newton ampliar os métodos de Descartes, o qual encontra, no século XVII, uma forma de representar curvas através de equações. Newton torna tais equações objetos de estudo em si, contribuindo com o nascimento da noção de *função*, uma das noções-chave da matemática moderna e da física-matemática [8].

A segunda mudança concerne à noção de variação. Num período muito anterior a Newton, as quantidades eram concebidas como constantes ou variáveis. Porém, conceber quantidades como variáveis não representa a mesma ideia de estudo referente a sua variação. Esta constatação exige encontrar uma maneira de representar, além de quantidades e relações, as modalidades de suas respectivas variações. Esta seria a essência da ampliação dos métodos de Descartes, que Newton realiza. Compreender a maneira como devem ser estudadas as respectivas variações das grandezas envolvidas nas

¹ Este termo provém em nome do físico Robert Hooke.

equações que expressam as curvas. Tarefa que Newton concretiza quando encontra, novamente, uma grandeza capaz de reproduzir um sistema de relações com potencial explicativo [8].

Esse era o objeto da teoria das fluxões de Newton, que, segundo Panza [8], seria a primeira versão do que se denomina, atualmente, análise infinitesimal. Um dos ramos centrais da matemática moderna.

2.1. Do método das tangentes de Roberval à teoria das fluxões

Seria exagero afirmar que o prelúdio da mediação físico-matemática newtoniana ocorre quando Newton encontra-se com o método das tangentes de Roberval². Talvez, represente mais a robustez de suas transformações à matemática. Porém, caracteriza muito a essência do seu estilo orgânico em matematizar a fenomenologia física. Aquilo que *a priori* constitui-se em pontos puramente matemáticos, a seguir, são substituídos por corpos e originam uma estrutura explicativa, através de um sistema de relações físico-matemáticas, que permitem descrever, pensar e generalizar a fenomenologia presente na natureza.

Tal encontro ocorre durante a sua reclusão campestre em Woolsthorpe, devido a uma epidemia de peste que obriga a Universidade de Cambridge a fechar as portas, no verão de 1665. Segundo Panza [8], provavelmente, Newton teria conhecido o método de Roberval antes de sua partida, dada a impossibilidade de contato com outros estudiosos, durante este isolamento.

O fundamento deste método reside na concepção de uma curva como traçado do movimento contínuo de um ponto. Roberval define a tangente como a direção pontual desse movimento, pressupondo que a determinação da tangente definiria a direção em cada ponto da trajetória. Para isso, observa que, independentemente da forma, todo movimento é composto por dois movimentos básicos: o movimento retilíneo e o movimento circular. Assim, conhecendo o movimento prévio das direções dos movimentos componentes, o método de Roberval permitiria determinar a direção de um movimento composto. Cabe lembrar, aqui, que o movimento retilíneo tem sua direção na própria trajetória deste movimento, enquanto a de um movimento circular é perpendicular ao raio da sua trajetória.

Newton não hesita em tomar esta ideia para si, segundo Panza [8]. Porém, reformula o método de Roberval, de modo a focar em problemas subjacentes às velocidades pontuais de vários movimentos que mantêm uma relação entre si.

² Gilles Personne de Roberval (1602–1675), matemático e físico, professor de matemática no Collège de France e um dos fundadores da Académie des Sciences, em 1666. Segundo Panza [8], a intenção em reformar a geometria, por meio de uma revisão crítica dos *Elementos de Euclides*, levou-o ao método das tangentes (retirado do estudo dos movimentos compostos). Foi também o inventor da balança que recebe o seu nome, em 1670.

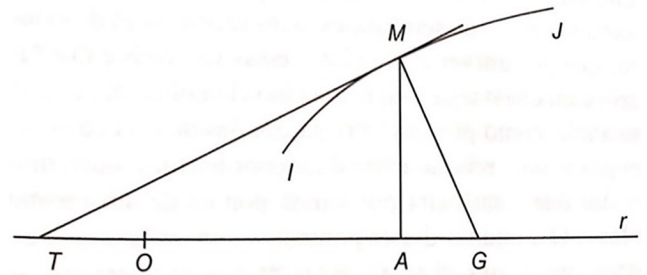


Figura 1: Representação do movimento contínuo de um ponto sobre uma curva [8, p. 49].

Numa nota redigida em torno de setembro de 1665, Newton representa uma curva IJ, referente a um sistema de coordenadas cartesianas de eixo r e de origem O , conforme a Figura 1, abaixo.

A curva IJ pode ser traçada mediante a variação do tamanho de dois segmentos que se movimentam de forma retilínea, separadamente um do outro. O segmento AM , que tem o seu tamanho modificado no eixo das ordenadas, ao transladar sobre o eixo r , e o segmento OA , que tem seu comprimento alterado, no mesmo intervalo de tempo, no eixo das abscissas. É através desta essência que Newton propõe a representação das velocidades dos movimentos, responsáveis pela geração das coordenadas cartesianas x e y de uma curva geométrica, como duas grandezas p e q , ligadas entre si por uma associação que depende da relação expressa por uma equação $f(x, y)$ dessa curva [8]. O principal resultado desta nota de setembro, segundo [8], foi estabelecer uma relação entre tangentes de uma curva e velocidades pontuais, cuja noção, na versão newtoniana do método de Roberval, é crucial. Afinal, Newton compreende que, para encontrar a direção dos movimentos compostos, é necessário focar mais nas velocidades pontuais do que nas direções dos movimentos componentes. Há a necessidade de se considerar uma grandeza mensurável, pois somente a direção não era o suficiente. Para isso, sobre as retas que indicam as direções dos movimentos componentes, era necessário considerá-las como segmentos dotados de um comprimento que entrariam na determinação das tangentes procuradas [8]. Newton, então, ultrapassa esta etapa e passa a tratar estes segmentos como novos tipos de grandezas, portadoras de duas componentes: 1) uma determinada pelo seu comprimento e 2) outra caracterizada pela direção³, dada pela posição da reta à qual tais segmentos pertencem. Portanto, as velocidades pontuais seriam representadas, geometricamente, de acordo com o comprimento e posição destes segmentos.

Com isso, Newton demonstra que o problema das tangentes a uma curva geométrica se reduz ao problema da determinação das velocidades pontuais dos movimentos retilíneos que geram suas coordenadas cartesianas. Ou

³ Segundo Panza [8], isto representaria uma das primeiras aparições de *vetor*.

seja, o algoritmo das tangentes, referente as curvas, pode ser reduzido ao algoritmo de velocidades puntuais, contanto que estas últimas sejam atribuídas a movimentos retilíneos que geram os segmentos.

Segundo Panza [8], tais pressupostos representam a tamanha envergadura do estilo newtoniano de matematizar o movimento. Para a resolução de problemas subjacentes à composição de movimentos não retilíneos, o formalismo das velocidades puntuais de Newton exige o acoplamento de uma representação geométrica das mesmas.

Isto caracteriza a organicidade físico-matemática, no *modus operandi* de Newton, ao matematizar a física. A caracterização do movimento pode ser uma questão física, no entanto, a resposta só é possível via um casamento físico-matemático. Este papel estruturador da matemática desloca-a de um âmbito descritivo ou tradutor de dados empíricos para uma esfera de ação mediadora na construção da ideia física. Por isso, a denominação de uma matematização físico-matemática.

O encontro com uma grandeza mensurável foi fundamental para Newton sofisticar o método de Roberval. Atitude idêntica ocorrerá na teorização matemática das cores, quando Newton atribuirá a causa do espectro de cores ao grau de refração para cada cor, e não mais uma modificação ou transformação da própria luz.

Este estilo orgânico de matematizar newtoniano demonstra que a partir de Newton a física não busca mais respostas em uma causa essencial, como teorizar sobre a quantidade de água, terra, ar e fogo que compõem a matéria. As perguntas tornam-se mais objetivas e buscam encontrar uma grandeza mensurável que conduza a um sistema de relações físico-matemáticas, cujo potencial explicativo permita questionar e interpretar a fenomenologia presente no mundo físico.

Mais adiante, Newton demonstra que a geração de uma outra variável, a área sob uma curva, também é decorrente de um movimento que possui uma velocidade pontual. Ou seja, a noção de velocidade pontual newtoniana estende-se a todo movimento que se supõe gerar uma grandeza geométrica expressa por uma variável. Não se limita mais apenas ao movimento que origina um segmento.

Segundo Panza [8], esta extensão na noção da velocidade pontual é o embrião que se transforma na noção mais geral de fluxo, fundamental para a criação do cálculo infinitesimal newtoniano, bem como para várias de suas construções físico-matemáticas explicativas.

Em termos técnicos, considera-se uma curva HK, sobre um eixo R'S' e origem O. Assim como, dois pontos sobre essa curva, I e M, conforme a Figura 2.

Se M é um ponto qualquer sobre a curva HK, o problema das áreas consiste, neste caso, na determinação da área do trapézio EAMI, gerado pelo movimento de translação da ordenada AM. Assim, suponha-se que esse trapézioide seja representado pela variável y, que $OA = x$ e que $AM = z$. Também, que o segmento

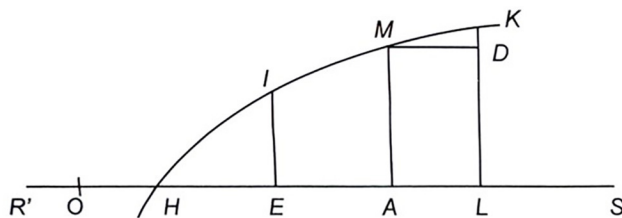


Figura 2: Área de uma curva como variável devido a velocidades puntuais [8, p. 80].

MD representa a velocidade pontual do movimento que gera a abscissa OA, admitindo-se $MD = p$. A velocidade pontual q do movimento que gera o trapézioide y será então representada pelo retângulo ALMD, cuja área é igual a zp. Portanto, tem-se a igualdade $q = zp$. Buscando o segmento y, cuja velocidade pontual é dada por certa expressão $[g(x)] p$, encontra-se a área da curva de ordenada $z = g(x)$. Portanto, para determinar essa área, é preciso retornar da equação $q = [g(x)] p$ para a equação $y = f(x)$, da qual ela deriva, pela aplicação do algoritmo das velocidades puntuais.

Segundo Panza [8], o termo fluxo é empregado por Newton para designar as variáveis p e q, anteriormente concebidas como velocidades puntuais. No entanto, para este autor, tal mudança terminológica sinaliza algo mais profundo.

Em notas, de 1665–1666, e num tratado, conhecido como *Tratado de outubro de 1666*

[...] as variáveis p e q estavam associadas às variáveis x e y, através de um movimento que supostamente gerava essas variáveis, por sua vez concebidas como segmentos gerados pelo movimento de um ponto, ou como trapézoides gerados pela translação de um segmento variável. Portanto, a teoria de Newton era abertamente geométrica, assentada sobre uma concepção mecânica de grandezas geométricas, concebidas justamente como geradas por movimentos [8, p. 81].

No entanto, a partir de 1671, na publicação do *De Methodis*⁴, as variáveis p e q são vinculadas, diretamente, às variáveis x e y. Sendo estas grandezas quaisquer que Newton denomina “fluentes”. Assim, as fluxões seriam as grandezas que medem, de forma direta, o ritmo ou com que regularidade ocorre a variação dos fluentes. Portanto, conforme Panza [8, p. 81], “a teoria das fluxões se apresenta diretamente como uma teoria geral da variação de grandezas”.

Para Panza [8, 11], isto não se trata de uma mudança trivial, pois, a partir disto, o formalismo algébrico

⁴ Por volta de outubro e novembro de 1666, Newton redige um tratado, porém, deixa-o incompleto. Como resultado de uma revisão deste trabalho incompleto, Newton redige em 1671 o *De methodis*. Nesse período, Newton teria obtido seus principais resultados sobre a sua teoria das fluxões [11].

passaria a ser concebido como uma ferramenta capaz de viabilizar uma generalidade maior que aquela própria da geometria e seus diagramas. Isto constituiria o fundamento do século seguinte na matemática de Euler, D'Alembert, Laplace e Lagrange.

Tanto a noção de grandeza quanto a de quantidade modificam-se, tornando-se mais abstratas. Segundo Panza [8]

A teoria das grandezas não é mais concebida como uma geometria, pois as grandezas, elas mesmas, não são mais concebidas como objetos geométricos: elas não são mais pensadas como uma natureza individual específica (como a de um segmento ou de um trapezoide), mas preferencialmente pelas modalidades de sua variação e, portanto, pelo sistema de relações que as liga a outras grandezas [8, p. 83].

É a partir da abstração deste sistema de relações, que liga uma grandeza a outra, que nasce, a partir deste momento, a condição de generalidade.

Esta é a virtude da matemática que impulsiona o desenvolvimento da física Newtoniana; as relações que ela possibilita. Estas últimas permitem explicar e promover o pensamento físico generalizado, numa conjugação físico-matemática. A busca newtoniana por uma grandeza física mensurável, que se relacione com outras grandezas, é um fator crucial na estrutura dedutiva e demonstrativa de suas ideias físicas que são matematizadas.

Fica nítido no estilo newtoniano de matematizar, que pontos matemáticos, presentes em sua estrutura dedutiva e demonstrativa, podem ser substituídos por corpos e conjugarem uma explicação físico-matemática. Ou seja, aquilo que aparenta ser uma explicação puramente matemática, na verdade, estava forjada dentro de uma conjugalidade físico-matemática.

2.2. A organização dos *Princípios* e o estilo de matematização newtoniana

Newton redige, a partir de agosto de 1684, o que muitos consideram o mais extraordinário tratado científico de todos os tempos: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematicæ* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) – [12, 13]. Um tratado de mecânica e de astronomia, dividido em três livros. Antes do primeiro livro, os *Princípios* abrem com dois títulos preliminares, intitulados, respectivamente, Definições e Axiomas ou Leis do Movimento, que juntos formam a base da estrutura dedutiva para demonstrar proposições presentes nos Livros I e II. Assim, o movimento dos corpos sob a ação de forças centrais brota no interior de uma essência físico-matemática [14].

Para este intento, Newton implementa métodos matemáticos da geometria euclidiana clássica, enriquecida por estudos das cônicas (seções IV e V do Livro I)

e pelo ‘*método das primeiras e últimas razões*’, que introduz procedimentos de geometria infinitesimal e é apresentado na Seção I do Livro I [14]. Ainda no Livro I, Newton desencadeia o tratamento matemático do problema das forças centrais, nas seções II e III. Ou seja, lida com o movimento de um ponto sob a ação de uma força centrípeta, cujo centro de força é considerado apenas um ponto matemático. Isto muda na Seção XI, quando esse ponto matemático passa a portar uma massa e Newton inicia seus estudos relacionados ao problema de dois corpos [14]. Nas seções IV, V, VI e VII, Newton estuda as propriedades de diversas cônicas, a determinação dos movimentos em esferas e os movimentos de subida e descida dos corpos. Após esta análise, estritamente matemática, na Seção VIII Newton inverte a problemática das forças centrais; “encontrar a curva que deve ser descrita por um corpo lançado em uma direção com uma velocidade determinada e sujeito a uma força central que age de acordo com uma determinada lei” [14, p. 101 – tradução nossa].

Para Blay [9, 14], o objeto principal das proposições do primeiro livro consiste no movimento dos corpos movidos pela ação das forças, onde Newton forja a matemática que necessitará, através de 11 Lemas e dois Escólios. Além disso, a sua introdução procedimental de uma geometria infinitesimal, através do ‘*método das primeiras e últimas razões*’, fornece resultados decisivos para a construção da teoria das forças centrais e estabelece um aparato ferramental para lidar com a ação contínua da força. Portanto, a Seção I aparenta, à primeira vista, ser apenas matemática, porém, tem papel decisivo na organização da teoria das forças centrais.

No Livro II, Newton apresenta o estudo do movimento sob os efeitos de meios resistivos. Inaugura, após pesquisas de Arquimedes e Pascal, o que se torna a mecânica dos fluidos. Executa críticas aos vórtices cartesianos e lança as bases para aquilo que se tornará a hidrodinâmica de Bernoulli [14].

No Livro III, os resultados do primeiro e segundo livros são retomados e utilizados para a construção de soluções para problemas astronômicos e físicos (movimento de planetas, da lua, formato da Terra, teoria das marés, etc.), cujo coração da estrutura explicativa é a sua Lei da Gravitação Universal [14].

Com isso, o desmoronamento do universo hierárquico aristotélico é inevitável. Um novo modelo de universo homogêneo, no qual as leis são válidas no céu e na terra, ganha evidência. Sendo que tal modelo tem como alicerce uma estrutura dedutiva baseada em princípios e conceitos bem definidos. Com a ciência do movimento, abre-se caminho para a mecânica racional [14].

Para Panza [8], a luz que invade os pensadores em 1687, quando surgem os *Princípios*, não era apenas uma nova teoria que vinha se somar a outras, era uma física-matemática que desenvolveria, no futuro, a mecânica analítica de Lagrange, a mecânica celeste de Laplace, a teoria da relatividade de Einstein, a mecânica quântica e a física de partículas.

o corpo em repouso, no momento do impulso, o corpo chegaria no mesmo tempo AB a um certo ponto I, ao longo de BO, cuja posição nessa reta depende da intensidade do impulso. De fato, nesse mesmo tempo, o corpo chega em R, sendo fácil observar que a área do triângulo ORB é a mesma, caso o ponto I modifique-se ao longo de OB. O que sugere a conclusão de que a área varrida pelo raio vetor, que liga o ponto O ao corpo, quando ele passa por B, ao longo do tempo considerado, não depende da intensidade do impulso.

Agora, supõe-se que em R, esse corpo receba um outro impulso, dirigido a O, novamente. Seguindo o mesmo raciocínio acima, no mesmo tempo para percorrer de B a R, o corpo chegaria a T, caso $RS = BR = JT$ e $ST = RJ$, sendo J um ponto qualquer sobre RO. Com isto, seria facilmente demonstrável que os triângulos ORB e OTR são iguais (tendo uma base OR comum e alturas relativas a essa base iguais entre elas).

Para intervalos de tempos iguais, o raio vetor com origem em O, que liga tal ponto às posições do corpo B, R e T, descreve áreas iguais, independente da intensidade que age em B e R. Assim, é suficiente supor que esses impulsos se sucedam em intervalos de tempo cada vez menores, até se transformarem em uma força com ação contínua, de modo que a trajetória BRT se transformará numa curva e o corpo, devido a atração contínua, em direção à O, passará descrever áreas dessa curva proporcionais aos tempos nos quais elas são descritas.

Após a demonstração deste teorema, conforme a Figura 4, a área do setor elíptico SPQ pode ser considerada como uma medida do tempo que o corpo leva para percorrer o arco PQ de sua órbita elíptica, ao redor do Sol, posicionado em um dos focos da elipse.

Diante da suposição de que o arco PQ seja infinitamente pequeno, esse setor pode ser identificado com um triângulo e sua área pode ser expressa pelo produto $\frac{1}{2}(SP)(QT)$.

Explorando essa possibilidade, Newton prova, através de uma argumentação geométrica, que, em cada ponto de uma órbita elíptica, a força de atração dirigida para um dos focos é inversamente proporcional ao quadrado

da distância desse foco ($F \propto 1/d^2$), o que demonstra a conjectura de Hooke.

Novamente, a busca por uma grandeza física mensurável, que proporcione um sistema de relações entre grandezas, faz parte do estilo newtoniano de matematizar. Sendo que aqui tal grandeza seria a área varrida pelos raios-vetores dos planetas, que lhe permite uma relação com o tempo.

Além do pioneirismo, ao prover provas para a conjectura de Hooke, Newton é o primeiro a interligar os enunciados daquilo que viria a tornar-se sua Lei da Gravitação com as Leis de Kepler. Um outro potencial que a matemática possibilita na física: a relação ou conexão físico-matemática entre diversos enunciados ou objetos físicos, geralmente, a partir de uma hipótese fundamental. Neste caso, a hipotética força central de Hooke.

Dizer que uma força age na direção do Sol e que planetas varrem áreas iguais em intervalos de tempos iguais é, matematicamente, equivalente, segundo Feynman [15]. E isto pode ser demonstrado através das relações físico-matemáticas, de modo que sua lógica permite passar de um fato a outro, em meio a uma grande variedade de fatos.

Esta integração é o que Newton proporciona em seu estilo orgânico de matematizar. Sua obra, *Princípios*, anuncia constructos matemáticos, em seus livros I e II, a partir da Geometria. Porém, uma geometria que considera questões do movimento e situações limites, através do seu '*método das últimas razões*'. Uma geometria cinemática do ponto material, que considera a composição de movimentos. Geradora de quantidades matemáticas pelo movimento e caracterizada pelo aspecto causal (forças).

No Livro I destaca-se, portanto, uma matematização newtoniana com a característica de levar em conta o movimento. A argumentação em suas figuras ilustrativas é gerada a partir do movimento. Por isso, tem uma característica causal, a força na mecânica racional. Apesar de não estar falando, diretamente, da natureza ou do mundo empírico.

É no livro III que Newton deriva a força da gravidade. Onde aparecem grandezas físicas relacionadas à natureza. Porém, para Calazans [7], estas já estariam forçadas nos livros I e II, afinal, Newton sempre esteve imerso numa certa base ontológica, referente a matemática e a física.

3. Implicações Para o Ensino de Física

Conforme visto, Newton promove uma integração entre geometria e natureza, de modo a preocupar-se tanto com a matemática quanto com a natureza física. Praticamente, não há distinção entre ambas [7].

Newton anuncia um tratamento matemático em seus dois primeiros livros e a aplicação destes no terceiro, porém, todos os seus constructos, ditos matemáticos, já traziam a fenomenologia do mundo físico, extrapolando

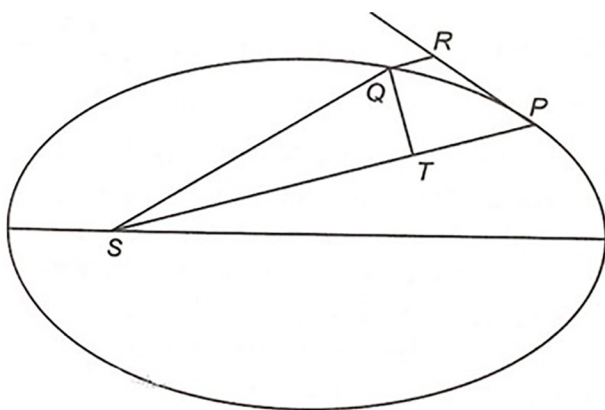


Figura 4: Órbita elíptica de um corpo ao redor do Sol [8, p. 201].

as ditas relações matemáticas para o âmbito de relações físico-matemáticas. A matemática intermedeia a construção de ideias físicas e estabelece uma relação de estrutura entre a matemática e a física.

Esta é a característica marcante da matematização newtoniana; integrar matemática e natureza, de forma orgânica. Newton demonstra em seu processo de matematização que a matemática adentra na construção da teoria física. Ou seja, estudos e análises da formalização teórica da sua mecânica racional apontam que a matemática desempenha um papel de estrutura na constituição genuína do pensamento físico e não apenas a missão de uma simples ferramenta de cálculo, após a ideia física constituída.

Sem dúvidas, este é um importante legado da matematização newtoniana para o ensino de física. Seu estudo e análise permitiria evocar a nova postura epistemológica que Pietrocola [5] e Karam [4] preconizam às salas de aula e materiais didáticos, no que diz respeito às relações de troca entre matemática e física. Ou seja, o estudo histórico-epistemológico da matematização newtoniana deixa excelentes indicativos para superar a abordagem *técnico-operacional* da matemática no ensino de ideias físicas, focada em cálculos numéricos, em troca de uma abordagem denominada *estruturante*, onde o discurso de matematização em salas de aula e os materiais didáticos de física revelam-se recheados de conteúdo fenomenológico, voltado para a estruturação de um pensamento físico.

Porém, é importante reconhecer a distinção entre os campos de construção teórica da física e o seu ensino. Afinal, a abordagem matemática na construção de teorias físicas tem como foco a constituição de ‘*explicações científicas*’, enquanto a abordagem matemática no ensino de física está imersa numa intencionalidade didática, de modo a prover uma ‘*explicação*’ destas ‘*explicações científicas*’ [16].

No contexto do ensino de física, o papel dos professores e autores de materiais didáticos não condiz com o objetivo de formular leis que busquem novas formas de explicar a natureza, como é o caso do trabalho dos físicos. O papel principal é explicar para outras pessoas como tais leis foram construídas pela comunidade científica e explicar como podem ser construídas explicações para investigar ou questionar o comportamento da natureza [16].

Assim, as implicações didáticas aqui não dizem respeito a uma reprodução fiel do método de matematização orgânica de Newton, em salas de aula e materiais didáticos. Ou seja, ensinar estudantes a matematizarem, como se fossem pequenos ou pequenas cientistas, através do percurso metodológico de matematização newtoniana, cujo pressuposto inicial seria a interpretação de fenômenos físicos partindo-se de uma grandeza física mensurável, capaz de gerar uma estrutura matemática, munida de relações físico-matemáticas.

Para uma nova concepção epistêmica quanto ao papel da matemática no ensino de ideias físicas, o foco didático

estaria na construção de significados que estão condensados nestas relações físico-matemáticas. São elas que permitem a Newton integrar a ferramenta matemática com a fenomenologia física. Ou, nas palavras de Panza [8] e Blay [9], mediar fortes conjunções entre matemática e natureza, de modo a permitir uma estrutura explicativa físico-matemática para a sua mecânica racional.

Portanto, matematizar no ensino de física diria respeito a estabelecer relações físico-matemáticas e extrapolar a visão limitada de que a matemática se constitui como ferramenta exclusiva para o cálculo de grandezas físicas ou quantidades. Mais do que isto, constitui-se como uma ferramenta voltada para a construção ou estruturação do pensamento físico.

Nesta matematização do pensamento físico, é importante que professores e autores de materiais didáticos incluam em suas intencionalidades didáticas a construção de determinados significados que estão condensados nas estruturas matemáticas que são apresentadas ou deduzidas.

Conforme descrito anteriormente, a preocupação inicial de Newton não está ligada a conceituar, mas representar, através de uma estrutura físico-matemática. E isto é possível devido sua perspicácia em buscar grandezas físicas mensuráveis que permitiriam a construção de um sistema de relações físico-matemáticas que, por sua vez, permitem estruturar, matematicamente, o pensamento e questionamento da fenomenologia física.

Na época de Newton não havia a ferramenta vetorial. Toda a sua matematização, conforme exposto ao longo do artigo, basicamente utiliza uma geometrização, que mais tarde adapta-se ao cálculo vetorial. Ou seja, no campo da representatividade matemática ocorrem mudanças. No entanto, as relações físico-matemáticas estabelecidas por Newton permanecem porque são elas que garantem a integração entre matemática e fenomenologia física.

Em $\vec{F} = m\vec{a}$,⁵ por exemplo, são as relações físico-matemáticas, condensadas na mesma, que permitem a integração entre matemática e fenomenologia física. Os símbolos $\vec{F}$, m e $\vec{a}$, por exemplo, diriam respeito a representatividade simbólica e conceitual. Uma espécie de significados nominais e conceituais; $\vec{F}$ de força resultante ou soma vetorial das forças que atuam sobre um corpo/sistema, m como sinônimo de massa inercial ou resistência à mudança de movimento e $\vec{a}$ de aceleração ou variação temporal da velocidade.

Um processo de matematização focado apenas em construir os significados nominais e conceituais de estruturas matemáticas não permitiria a integração entre matemática e natureza. Apenas fomentaria a substituição de números para a obtenção de outros números,

⁵ Importante enfatizar que não é Newton quem deduz a expressão $\vec{F} = m\vec{a}$. Após 65 anos da primeira publicação dos *Princípios*, Euler anuncia tal expressão. O exemplo aqui é como objeto de análise, subjacente ao ensino de física. Para estudos mais avançados: Euler, Leonhard, “Découverte d’un nouveau principe de mécanique” (1752). (<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/177>).

revelando a matemática como uma ferramenta de cálculo, perante a física. Estimularia a famosa *aplicação de fórmulas*, ou seja, uma abordagem *técnica-operacional* da matemática no ensino de física.

Seria através do entrelaçamento dos significados nominais e conceituais, quando vistos como um todo, dentro da estrutura físico-matemática, que proporcionaria a construção de significados relacionais, que permitiriam a integração da matemática com a fenomenologia física e revelariam a primeira como ferramenta voltada para a construção do pensamento físico. Estes significados relacionais dizem respeito às relações entre as grandezas físicas $\vec{F}$, m e $\vec{a}$. Seriam eles que permitiriam interpretar e levantar questões sobre fenômenos físicos, como, por exemplo, empurrar, com a mesma força, um carrinho de compras vazio e cheio e perguntar-se a respeito das acelerações.

Para interpretá-las, é necessário relacionar a grandeza ou conceito subjacente a resistência a mudança do estado cinemático (m) com a grandeza ou conceito referente a mudança temporal da velocidade ($\vec{a}$). Tal relação físico-matemática estaria condensada na equação $\vec{a} = \vec{F}/m$, que, matematicamente, estabelece uma relação inversamente proporcional. Desta forma, conclui-se ou estrutura-se o pensamento físico de que o carrinho de compras vazio acelera mais que o carrinho de compras cheio.

Percebe-se que significados nominais (representatividade simbólica), conceituais e da própria matemática (diretamente ou inversamente proporcionais, relação linear, quadrática, etc) se entrelaçam, formando uma espécie de significado relacional de grau fenomenológico.

Salienta-se que a construção do significado relacional de grau fenomenológico evidencia a real integração entre matemática e fenomenologia física. Afinal, conceitualmente, quanto maior a resistência à mudança de movimento, ou seja, a inércia de um corpo, menor serão os efeitos da mudança no seu estado cinemático e isto está condensado em $\vec{a} = \vec{F}/m$.

Além disso, conforme mostramos anteriormente, no processo de matematização da sua Mecânica Racional, Newton chega à força através da trajetória, que, portanto, constitui-se na ponte estrutural que permite conectar objetos físicos da Dinâmica com a Cinemática. Ou seja, estaria condensado em $\vec{F} = m\vec{a}$ uma espécie de relação físico-matemática de estrutura, que, neste caso, estruturaria causas e efeitos. Isto é, permite uma certa compreensão da fenomenologia do movimento.

Algo que também está condensado nas estruturas físico-matemáticas que representam a Lei de Faraday, $\varepsilon = -d\Phi/dt$, ou a quantização da energia, $E = hf$, por exemplo. Onde, campo de força e quantização da energia, respectivamente, também permitem interligar objetos físicos, com propriedades bem definidas. Na primeira, entre objetos da eletricidade e do magnetismo e na segunda, entre energia e frequência.

Na estrutura físico-matemática $\vec{F} = m\vec{a}$, os significados relacionais de estrutura aparecem em

questionamentos e interpretações referentes à relação entre força resultante e trajetória. E isto se efetua através do caráter vetorial da força, aceleração e velocidade. É mediante a direção e sentido dos vetores força resultante e velocidade, por exemplo, que se define o tipo de movimento e trajetória. Ou seja, através de uma trajetória é possível chegar à força e vice-versa.

Uma abordagem matemática no ensino de física, sob as lentes de uma nova postura epistemológica, preconizada por Pietrocola [5] e Karam [4], reside na ideia de que a expressão $\vec{F} = m\vec{a}$, por exemplo, apresenta apenas a ponta de um iceberg. É nas profundezas deste que estariam condensados os seus verdadeiros significados, que revelaria o verdadeiro papel epistêmico da matemática na física; o de estrutura e não ferramenta de cálculo.

Abordar tais significados, relacionais e de estrutura, é que permitiria integrar matemática e fenomenologia física. O que, em termo didáticos, proveria uma abordagem ou matematização *estruturante* no ensino de física.

Para finalizar, defende-se a necessidade de não medir esforços, na área de pesquisa em ensino, que rumem em direção a uma abordagem matemática no ensino de física mais fiel aos fundamentos epistemológicos que estas ciências trocam ao se relacionarem. ‘*Física não é Matemática*’; ‘*Física não é Cálculo*!’, alerta Karam [4].

Da mesma forma, não se deve poupar esforços para contrapor a vertente que defende uma eliminação do processo de matematização no ensino das ideias físicas, dando lugar a um ensino de Física dito *conceitual* ou *qualitativo*. Um ensino isento da formalização matemática dos conceitos físicos abordados. Até porque, de fato, não existe tal física-conceitual! Assim como não existem teorias físicas que seriam teorias matemáticas, mas sim teorias físico-matemáticas, como a teoria da relatividade geral e a própria mecânica clássica de Newton.

Quando uma doença está além do conhecimento humano, não se elimina os doentes. Pelo contrário, investe-se em pesquisas a fim de descobrir a cura. O mesmo ocorre com a abordagem da matemática no ensino de física. Se isto caracteriza uma problemática educacional, não devemos eliminar tal relação em nome de um ensino *dito* conceitual ou qualitativo. A exemplo da busca por uma cura, ao invés da eliminação, o melhor caminho é investir em pesquisas de diversas frentes; estudos histórico-epistemológicos, semânticos, formação de professores, estratégias didáticas, confecção de materiais didáticos e, principalmente, a caracterização teórica e qualificação analítica daquilo que se pretende que seja uma abordagem adequada da matemática no ensino de física.

Referências

- [1] E.C. Ricardo, G. Ahumada e D. Couso, em: *I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* (Tandil, 2001).

- [2] M.J. Lunkes e J.B. Rocha Filho, *Ciência & Educação* **17**, 21 (2011).
- [3] C. Brock e J.B. Rocha Filho, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **28**, 356 (2011).
- [4] R.A.S. Karam, *Estruturação matemática do pensamento físico no ensino: uma ferramenta teórica para analisar abordagens didáticas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo (2012).
- [5] M. Pietrocola, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **19**, 93 (2002).
- [6] M. Paty, *A Matéria Roubada* (Edusp, São Paulo, 1995), v. 1.
- [7] V.F.B. Calazans, *A filosofia da matemática nos Principia de Newton e suas implicações ontológicas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo (2014).
- [8] M. Panza, *Newton* (Estação Liberdade, São Paulo, 2017), v. 1.
- [9] M. Blay, *Les “Principia” de Newton* (Presses Universitaires de France, Paris, 1995), v. 1.
- [10] E.C. Ricardo, *Elementos físicos e matemáticos da mecânica analítica, a relação entre as duas ciências e a vigilância epistemológica*. Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo, São Paulo (2012).
- [11] M. Panza, *Scientiae Studia* **8**, 509 (2010).
- [12] I. Newton, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural – Livro I* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008), v. 2.
- [13] I. Newton, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural – Livros II e III* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017), v. 1.
- [14] M. Blay, *La Science du Mouvement: de Galilée à Lagrange* (Éditions Belin, Paris, 2002), v. 1.
- [15] R. Feynman, *Sobre as Leis da Física* (Contraponto, Rio de Janeiro, 2012), v. 1.
- [16] D.F. Vizcaino, *Papel da “matematização” nas explicações de professores e alunos em disciplinas de Física na formação inicial de professores*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Bauru (2013).