

# Uma análise das regiões de confinamento caóticas descritas por uma partícula carregada submetida ao campo magnético de um dipolo

An analysis of chaotic confinement regions described by a charged particle subjected to the magnetic field of a dipole

Deyvid W. da M. Pastana<sup>1</sup>, Manuel E. Rodrigues<sup>\*1</sup> 

<sup>1</sup>Universidade Federal do Pará, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Abaetetuba, PA, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Física, Faculdade de Física, Belém, PA, Brasil.

Recebido em 26 de julho de 2021. Revisado em 04 de agosto de 2021. Aceito em 09 de agosto de 2021.

Este artigo buscou trazer uma análise das regiões de confinamento descritas por uma partícula carregada submetida ao campo magnético de um dipolo. Foram obtidas e analisadas as equações de movimento, de onde foi possível demonstrar que a energia mecânica do sistema é constante. As trajetórias confinadas obtidas são descritas pela partícula ao redor do eixo  $z$  e mantendo uma determinada distância mínima  $\Delta r > 0$  da origem (onde se situa a fonte), a qual é menor quanto menores forem os valores das condições iniciais no plano  $xy$ , com o limite de que esse valores devem ser maiores que as dimensões da fonte. Além disso, foi realizado uma análise do sistema no caso particular  $z(t) = 0$ , no qual constatou-se a não existência de caos pelo teorema de Arnold–Lioville e torna-se caótico quando o momento de dipolo é recalibrado com dependência temporal oscilante, e  $z(t)$  geral, no qual verificou-se caos e um comportamento transiente dos expoentes máximos de Lyapunov em função do número de passos do cálculo numérico. Os confinamentos tratados neste trabalho podem representar aproximações para fenômenos que acontecem na atmosfera do planeta Terra.

**Palavras chave:** Aprisionamento de partículas carregadas, caos, seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

This paper aimed to make an analysis of the confinement regions described by a charged particle subjected to the magnetic field of a dipole. The equations of motion were obtained and analyzed, from which it was possible to demonstrate that the mechanical energy of the system is constant. The obtained confined trajectories are described by the particle around the  $z$  axis and maintaining a certain minimum distance  $\Delta r > 0$  from the origin (where the source is located), which is smaller the smaller the values of the initial conditions in the  $xy$  plane, with the limit that these values must be larger than the dimensions of the source. Moreover, an analysis of the system was performed in the particular case  $z(t) = 0$ , in which the non-existence of chaos was verified by the Arnold–Lioville theorem and becomes chaotic when the dipole moment is recalibrated with oscillating time dependence, and general  $z(t)$ , in which chaos and a transient behavior of the maximum Lyapunov exponents as a function of the number of steps of the numerical calculation was verified. The confinements treated in this paper represent possible approximations for phenomena that happen in the atmosphere of planet Earth.

**Keywords:** Charged particle trapping, Chaos, Poincaré sections and Lyapunov exponents.

## 1. Introdução

A menor constituição possível geradora de um campo magnético é a configuração de um dipolo. Embora essa seja a composição mais simples possível para formação de um campo magnético, suas aplicações são inúmeras na física devido sua propriedade de confinamento de partículas carregadas. No trabalho [1] os autores fazem um estudo experimental das regiões de confinamento de um feixe de pósitrons, advindo de uma fonte radioativa, sobre os efeitos de um campo magnético de dipolo gerado por um aparato experimental RT-1 (uma fonte no formato de um anel constituído de um material super condutor) onde um resultado muito interessante

obtido pelos autores foi que a não homogeneidade do campo implica em equações de órbitas não integráveis e caóticas.

Os estudos de trajetórias de partículas carregadas aprisionadas em armadilhas de dipolos magnéticos são utilizados na física dos plasmas e buracos negros. No trabalho [2] os autores constatarem que o plasma pode apresentar regiões de vórtices quando sujeito a uma armadilha de dipolo. Já os buracos negros podem ser tornar a própria armadilha para uma partícula carregada quando a ele é atribuído um campo magnético de um dipolo na geometria de Kerr, tal como os autores mostram no trabalho [3].

Uma aplicação fundamental para a vida na terra consiste na proteção que o campo magnético do planeta exerce contra os ventos solares. O Sol, como toda estrela

\* Endereço de correspondência: [esialg@gmail.com](mailto:esialg@gmail.com)

em sua fase inicial de existência, é um reator nuclear que emite feixes de partículas carregadas em todas as direções no sistema solar, os quais desfariam as camadas de ar do planeta Terra sem a proteção do campo magnético. As partículas carregadas de altas energias que viajam do sol e atingem regiões próximas da Terra são aprisionadas no campo magnético e dirigidas aos polos dando origem às auroras boreais (Norte) e austral (Sul), um fenômeno de pura beleza; as partículas de baixas energias podem permanecer aprisionadas ou serem ejetadas para outras regiões do espaço. O campo magnético da Terra pode ser aproximado localmente o de um dipolo (no trabalhos [4] os autores comentam que as regiões de deformação externa do campo pelos ventos solares pode ser melhor aproximadas por um duplo campo de dipolo).

A formação de aurora boreal é um fenômeno que foi estudado inicialmente por Carl Störmer nos anos de 1904–1907. Embora nesse período Störmer tenha chegado a conclusão de que esse fenômeno era resultado do aprisionamento de partículas carregadas, foi só em 1919 que conseguiu-se fundamentar seus cálculos de órbitas com soluções numéricas [5]. A formulação proposta por Störmer consiste em tratar as equações de movimento para uma partícula carregada sujeita a um campo magnético de um dipolo em coordenadas cilíndricas, através da hamiltoniana para esse sistema. Tal modelo é interessante pelo fato de que pode-se constatar que a hamiltoniana e o momento angular são constantes de movimento. Portanto, o sistema possui dois graus de liberdade a menos e, como consequência, não existe possibilidade de caos quando o movimento está contido em um plano fixo.

Neste artigo será apresentado um estudo sobre o movimento de partículas carregadas sobre o efeito de um campo magnético de dipolo. O foco desse trabalho é verificar as regiões de confinamento acessíveis pelas partículas carregadas e a estabilidade de suas órbitas.

Primeiramente, na seção 2 será feita uma revisão do dipolo magnético e do momento de dipolo. A demonstração segue a partir do potencial vetor magnético para um dipolo, onde seguimos os passos das bibliografias [6–8].

Posteriormente, na seção 3 os autores apresentam a análise das trajetórias confinadas que uma partícula carregada descreve sobre os efeitos de um campo de dipolo magnético. Nessa seção será utilizada a segunda lei de Newton para obtenção das equações de movimento em coordenadas cartesianas e a formulação hamiltoniana para o estudo das equações em coordenadas cilíndricas. Algumas das trajetórias obtidas nessa seção já foram constatadas por outras abordagens [9–11].

Por fim, na seção 4 e 5 será apresentado um estudo da estabilidade do sistema e a conclusão do trabalho. Na seção 4, são aplicados os métodos de análise das seções de Poincaré e dos expoentes de Lyapunov para verificar o caos no sistema de equações que governam o movimento tridimensional e o caso particular do movimento bidimensional de uma partícula carregada submetida

ao campo magnético de um dipolo. Já na seção 5, a priori, constatou-se uma variedade de aprisionamento e que o movimento tridimensional é caótico, embora o movimento bidimensional seja estável.

## 2. Dipolo magnético

O Eletromagnetismo é uma teoria de campos estabelecida para descrever fenômenos envolvendo eletricidade e magnetismo. O movimento de partículas carregadas geram campos elétricos e magnéticos, como aqueles que podem ser gerados ao conduzir uma corrente elétrica através de uma bobina, solenoide ou circuitos elétricos [12]. Os campos, por sua vez, são gerados de tal forma que obedecem as equações de Maxwell [8],

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

onde as constantes  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são a permeabilidade e a permissividade do meio, respectivamente.

As equações de Maxwell constituem um sistema de EDPs acopladas e muito complicado de ser resolvido. Mesmo que a distribuição de cargas  $\rho(\vec{r}, t)$  e densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  sejam fornecidas, é um trabalho arduo encontrar a solução geral para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , quando existe uma solução exata. Nesse sentido, é conveniente fazer o tratamento para os campos em termos dos potenciais, os quais apresentam uma certa invariância, podem ser moldados de forma a facilitar o problema sem que os campos sejam alterados, o calibre [13].

Em nosso caso, não precisaremos do calibre para satisfazer as equações de Maxwell, pois partiremos de uma expressão conhecida para o potencial vetor magnético [6, 7, 14, 15],

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (5)$$

onde  $\vec{r}$  é um vetor que representa a distância entre a origem de um sistema de coordenadas a um ponto qualquer no espaço e  $\vec{r}'$  é um vetor direcionado a um elemento de volume infinitesimal  $dV'$  no espaço ocupado pela configuração do dipolo. Note que a integral age sobre as variáveis de  $\vec{r}'$ , como também sobre a densidade de correntes uma vez que  $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{r}')$ , e o resultado é expresso em termos das coordenadas de  $\vec{r}$ . Portanto,  $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r})$ .

Para chegarmos a expressão do dipolo magnético, considere que o ponto onde queremos determinar o campo magnético está muito distante da configuração

dipolo, isto é,  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ . Sobre essa condição, podemos expandir em série de Taylor a expressão  $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$  e desprezar os termos proporcionais a  $|\vec{r}'|^2$ . Dessa forma, obtemos

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} \tag{6}$$

Com o resultado da equação (6), o potencial vetor, equação (5), pode ser expressado como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \left[ \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} \right] dV'. \tag{7}$$

Como a integral é um operador linear, a equação (7) pode ser expressa como a soma das integrais dos dois termos entre colchetes,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \int_{V'} [\vec{r} \cdot \vec{r}'] \vec{J}(\vec{r}') dV'.$$

Note que o primeiro termo ( $\int_{V'} \vec{J} dV'$ ) deve ser nulo. Caso contrário, essa configuração de dipolo admitiria a existência de monopólos magnéticos [8].

Em todo caso, vamos considerar o dipolo como primeira composição possível geradora de um campo magnético. Portanto, o potencial vetor será definido como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \int_{V'} [\vec{r} \cdot \vec{r}'] \vec{J}(\vec{r}') dV' \tag{8}$$

Podemos utilizar a notação indicial para representar as componentes do potencial vetor expresso na equação (8) na forma

$$A_i = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3} \cdot \int_{V'} J_i \vec{r}' dV'. \tag{9}$$

A equação (9) pode ser reescrita na forma (ver a equação (15.62) de [8])

$$A_i = -\frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j \left[ \frac{1}{2} \int_{V'} (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}'))_k dV' \right]. \tag{10}$$

Na equação (10), o leitor não deve confundir  $\epsilon_0$  com  $\epsilon_{ijk}$ . Este último é um tensor covariante de terceira ordem [16] (muitas vezes denominado *tensor de permutação*).

Além disso, vamos definir uma grandeza de grande importância para o estudo dos dipolos,

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'. \tag{11}$$

Este é o momento de dipolo magnético, um vetor resultante do produto vetorial entre a posição de um elemento de volume infinitesimal, de um certo meio, com a densidade de corrente desse meio integrada o volume que esse meio ocupa no espaço.

Com essa informação em mãos, vamos desenvolver algebricamente a quantidade vetorial expressa na equação (10):

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j m_k \hat{e}_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \sum_{j,k} \epsilon_{kji} \hat{e}_i m_k r_j \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \sum_{j,k} \hat{e}_k \times \hat{e}_j m_k r_j \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} (\vec{m} \times \vec{r})_i. \end{aligned} \tag{12}$$

Dado que o potencial vetor magnético está associado ao campo magnético por um rotacional – fato que é garantido pela equação (2) –,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} (\vec{m} \times \vec{r}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right] \end{aligned} \tag{13}$$

A equação (13) representa o campo magnético gerado por uma configuração de um dipolo magnético. Essa expressão satisfaz as equações de Maxwell na ausência de campo elétrico, uma vez que possui divergência nula e uma densidade de corrente  $\vec{J} = 0$ .

### 3. Dinâmica de partículas carregadas submetidas a um campo magnético gerado por um dipolo

Nesta seção, trataremos o objetivo principal deste artigo, fazer uma análise da dinâmica de uma partícula carregada sujeita aos efeitos de um campo magnético gerado por um dipolo. Em nossa análise, utilizaremos um momento de dipolo constante  $\vec{m} = m\hat{k}$  e as equações que governam a dinâmica desse sistema serão tratadas pela formulação da segunda lei de Newton e pelo formalismo Hamiltoniano.

A interação de partículas carregadas com os campos eletromagnéticos é descrita pela força de Lorentz,

$$\vec{F} = Q \left( \vec{E} + \vec{v} \times B \right). \tag{14}$$

onde  $Q$  é carga da partícula. Uma vez que, uma carga elétrica está sujeita a uma composição de campos elétricos e magnéticos, a força que atua sobre essa partícula, resultando em uma influência direta na trajetória que essa partícula descreve, é a soma da força elétrica com a força magnética. No entanto, devemos atentar para alguns detalhes importantes. Primeiro, em nosso caso, estaremos considerando o movimento de uma partícula

carregada sobre os efeitos de um campo magnético gerado por um dipolo e na ausência de campo elétrico, o que resulta, da equação (14),  $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$ . Segundo, uma característica que reivindica uma certa cautela: a força magnética não realiza trabalho (isso é muito fácil de provar pois  $Q[\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l} = Q[\vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{v}dt = 0$ ). Em outras palavras, uma partícula carregada em repouso, em um referencial inercial, permanece em repouso se a única força externa agindo sobre ela for a força magnética.

Considere uma partícula com carga  $Q$  e massa  $M$ , submetida ao campo magnético de um dipolo, com um momento de dipolo  $\vec{m} = m\hat{k}$ , onde  $m$  é uma constante. Igualando a segunda lei de Newton a força magnética, obtemos

$$M\ddot{\vec{r}} = Q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}. \tag{15}$$

Tomando uma equação com cada componente de  $\vec{r}$ , em coordenadas cartesianas, temos

$$\ddot{x}(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} + \omega_0 [\dot{y}(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3\dot{z}zy] = 0 \tag{16}$$

$$\ddot{y}(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - \omega_0 [\dot{x}(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3\dot{z}zx] = 0 \tag{17}$$

$$\ddot{z}(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} + 3\omega_0 z(\dot{y}x - \dot{x}y) = 0 \tag{18}$$

Aqui, nós definimos a constante  $\omega_0 = Q\mu_0/4\pi M$ .

Dado que a força magnética não realiza trabalho, a energia mecânica  $E$  desse sistema se resume a energia cinética  $T = Mv^2/2$ . Para verificar se a energia desse sistema é conservativa, ou dissipativa, tomamos a derivada temporal da energia mecânica,

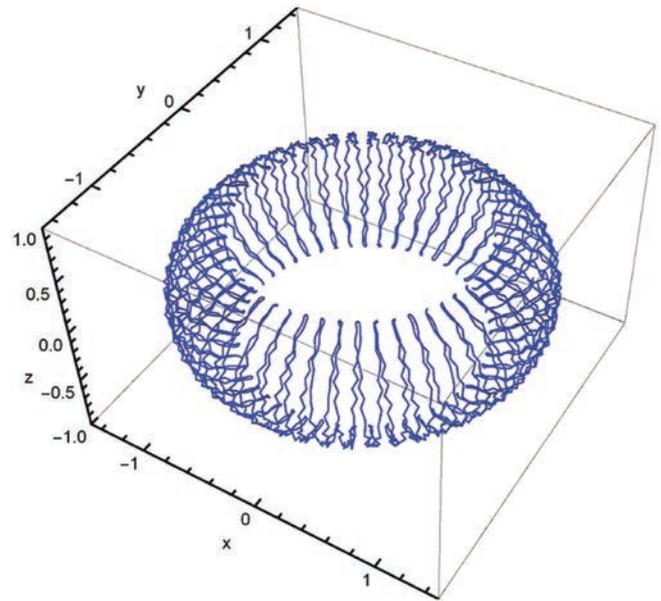
$$\dot{E} = \dot{T} = \frac{M}{2} \frac{dv^2}{dt} = (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \cdot M(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}).$$

Substituindo o termo  $M\{\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}\}$  pelo lado direito da equação (15), temos

$$\begin{aligned} \dot{T} = \dot{x} \left\{ \omega_0 [\dot{y}(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3\dot{z}zy] \right\} \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ - \dot{y} \left\{ \omega_0 [\dot{x}(x^2 + y^2 - 2z^2) + 3\dot{z}zx] \right\} \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ + \dot{z} \left\{ 3\omega_0 z(\dot{y}x - \dot{x}y) \right\} \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, a energia cinética e, por consequência, a energia mecânica desse sistema são conservadas.

Esse sistema de equações diferenciais é não linear e acoplado. Diante dessa tipologia de equações, uma solução analítica é inviável. Portanto, estudo da trajetória será a partir de uma solução numérica. Considere que as condições iniciais para esse problema são definidas como  $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.005, \dot{z}(0) =$



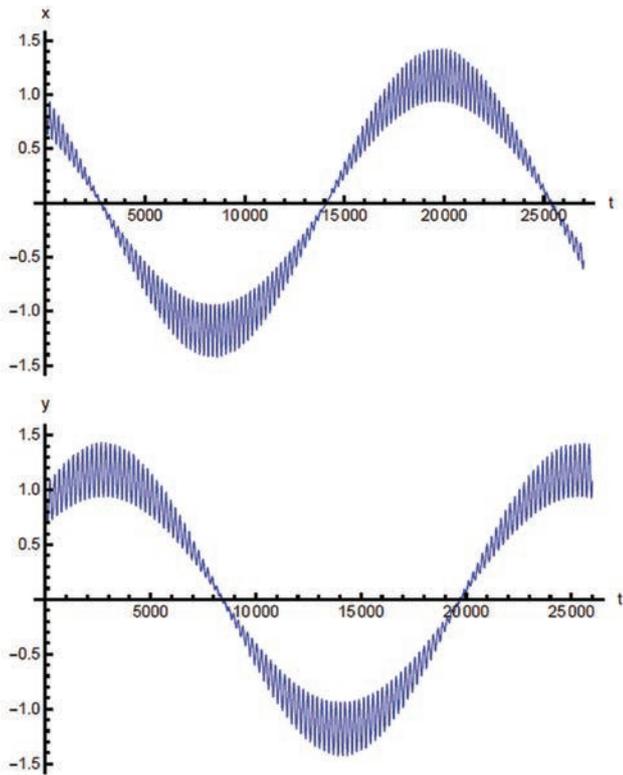
**Figura 1:** trajetória de uma partícula carregada submetida ao campo magnético de um dipolo com o parâmetro  $\omega_0 = 1$ , condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.005$  e  $\dot{z}(0) = 0.01$ , sobre o intervalo de tempo  $\Delta t = 23000$ .

0.01 e  $\omega_0 = 1$ . Calculando a solução numérica, para esse sistema, com essas condições iniciais, no intervalo de tempo  $\Delta t = 23000s$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ , obtemos a trajetória ilustrada na Figura 1.

A trajetória da Figura 1, descrita pela partícula, quase-periódica. Podemos observar claramente que o movimento no eixo  $z$  tem um aspecto oscilatório, já que o movimento varia entre máximos de  $z = 0.5$  e mínimos de  $z = -0.5$ . As oscilações também estão presentes no plano  $xy$  como pode ser observado na Figura 2. Portanto, os resultados numéricos mostram que as coordenadas da partícula são funções periódicas cuja razão entre os períodos é um valor irracional, caracterizando um movimento quase-periódico no qual a partícula parte do ponto determinado pelas condições iniciais mas não retorna a esse ponto, embora eventualmente passe por regiões próximas [17].

A taxa de variação temporal da energia cinética, quando calculada com a solução numérica com as condições iniciais da trajetória 1, apresenta picos da ordem de  $10^{-11}$  e ordens inferiores. Na equação (19), provamos que  $\dot{T} = 0$ . A explicação para isso é que essas pequenas oscilações são erros numéricos. Para gerar esse gráfico, a precisão foi aumentada em 100 vezes e constatamos que a ordem da função é menor quanto maior for a precisão utilizada. Portanto, os resultados numéricos indicam que  $\dot{T}$  tende a zero em uma precisão de excelência, o que está de acordo com o resultado da equação (19), e que os picos de ordem  $10^{-11}$  e ordens inferiores são erros numéricos desprezíveis.

O espaço de fases de uma partícula carregada no campo de um dipolo contém diversos pontos a partir

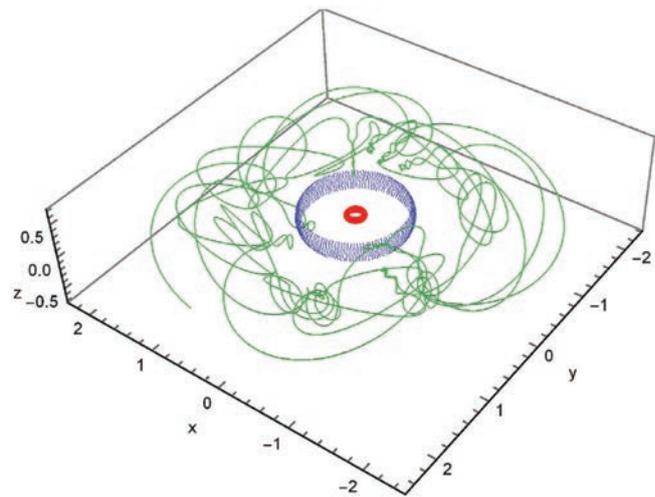


**Figura 2:** posições  $x(t)$  e  $y(t)$  da trajetória vinculada na Figura 1.

dos quais uma partícula carregada pode descrever uma trajetória que ocupa um volume finito no espaço. Nesse caso a partícula está confinada e o dipolo age como uma armadilha magnética, tal como mostra a Figura 1. Outras regiões de confinamento para partículas que iniciam o movimento, em diferentes posições e velocidades, estão ilustradas na Figura 3. As curvas mostradas na Figura 3 delineiam um espaço ao redor do eixo  $z$ .

A Figura 3 apresenta uma característica espacial interessante das órbitas do movimento: a distância máxima entre a origem do sistema de coordenadas e a partícula  $\Delta r_m$  é menor quanto menores são valores escolhidos para as posições iniciais. Pode-se observar isso na Figura 3 onde a trajetória em vermelho inicia no ponto  $x(0) = y(0) = 0.1$  com uma distância  $\Delta r_{m1}$  máxima da origem ao trajeto é claramente menor que as distâncias máximas alcançadas nos trajetos em azul  $\Delta r_{m2}$ , com posição inicial  $x(0) = y(0) = 0.5$ , e verde  $\Delta r_{m3}$ , sendo a posição inicial  $x(0) = y(0) = 1$ . Portanto, observa-se que, de modo geral, existe um padrão de aproximação com o eixo  $z$  com a variação das condições iniciais, especificamente para as trajetórias ilustradas na Figura 3, dado por  $\Delta r_{m1} < \Delta r_{m2} < \Delta r_{m3}$ .

No entanto, embora as equações forneçam trajetórias construídas a partir de soluções numéricas para valores tão pequenos quanto se queira, existe um limite para o qual os resultados forneçam uma representação física. Se considerarmos que feixes de partículas carregadas são aprisionadas no campo magnético da Terra, então



**Figura 3:** regiões de confinamento para uma partícula carregada sobre o efeito de um campo magnético gerado por um dipolo; a região verde é acessada por uma partícula com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.05$  e  $\dot{z}(0) = 0.1$ ; em azul, temos  $x(0) = y(0) = 0.5, z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.015$  e  $\dot{z}(0) = 0.1$ ; e em vermelho, temos  $x(0) = y(0) = 0.1, z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.05$  e  $\dot{z}(0) = 0.1$ .

a distância mínima possível entre a origem e um ponto na trajetória da partícula (considerando que a origem do sistema de coordenadas coincide com a origem do planeta) é o raio da Terra; se for um problema de uma partícula carregada movendo-se sobre os efeitos do campo magnético de um dipolo, então a estrutura do dipolo é o limite da trajetória; ou ainda se for um experimento para um estudo das órbitas de partículas carregadas sobre o efeito de um campo magnético de dipolo, a própria composição experimental é o limite. Portanto, o padrão observado na Figura 3 não será necessariamente visto quando a partícula estiver no interior da fonte.

O padrão de movimento observado nas Figuras 1 e 3 é descritos por uma partícula que se movimenta ao longo de um espaço limitado por um plano alinhado paralelamente ao eixo  $z$ , a uma certa distância da origem, que gira em torno desse eixo. Chamaremos esse padrão de movimento no plano meridional. Störmer em seus trabalho [5] fez uma análise desse problema onde considerou uma componente do campo magnético da terra como o campo gerado por um dipolo magnético. Dessa forma, parte das partículas carregadas expelidas através do vento solar, chegam a região sujeitas ao campo magnético da terra permanecem aprisionada. Um grupo dessas partículas de altas energias, geram o fenômeno das Auroras Boreais. Quando uma partícula acessa a região sobre os efeito da componente dipolar do campo magnético da terra, com condições iniciais que as colocam no plano meridional e considerando a componente dipolar do campo magnético da terra paralelo ao seu eixo de rotação, a dinâmica tridimensional das partícula pode ser modeladas convenientemente em

termos da dinâmica Hamiltoniana, onde as coordenadas utilizadas são as coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$  [18].

Considere  $\vec{m} = m\hat{z}$  na equação (12),  $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$  e  $c_1 = \eta Q/M$ , sendo  $m$  é uma constante atribuída ao momento e  $\eta = \mu_0 m/4\pi$ . Então, a Lagrangeana é dada por [19]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}M|\vec{v}|^2 - Q\vec{v} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{Mc_1 r^2}{R^3}\dot{\phi} \end{aligned} \quad (20)$$

A lagrangeana e a hamiltoniana estão relacionadas por [20]

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{r}_i - \mathcal{H}(r_i, p_i, t), \quad (21)$$

onde  $p_i$  e  $\dot{r}_i$  são o momento linear e as coordenadas generalizadas. Portanto, da equação (20) e (21), temos

$$\mathcal{H} = M\dot{r}^2 + M\dot{z}^2 + Mr^2\dot{\phi}^2, \quad (22)$$

ou,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{M} \left[ p_r^2 + p_z^2 + \left( \frac{p_\phi}{r} - Mc_1 \frac{r}{R^3} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Note que a hamiltoniana (22) é definida pela própria energia cinética. Sabemos, pela (19), que a energia cinética é constante. Portanto, a própria hamiltoniana é uma constante.

Os momento  $p_r$ ,  $p_\phi$  e  $p_z$ , são obtidos da lagrangeana por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}. \quad (24)$$

Lembrando que as equações de Hamilton são [19, 20]

$$\dot{r}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (25)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i}, \quad (26)$$

com as equações (20), (23) e (24), determinamos as equações de movimento:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{M}p_r \\ \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{Mr^3} + 3Mc_1^2 \frac{r^3}{R^8} - Mc_1^2 \frac{r}{R^6} - 3p_\phi c_1 \frac{r}{R^5} \\ \dot{z} = \frac{1}{M}p_z \\ \dot{p}_z = 3Mc_1^2 \frac{r^2 z}{R^8} - 3p_\phi c_1 \frac{z}{R^5} \end{cases} \quad (27)$$

Note que a hamiltoniana (23) não depende da coordenada  $\phi$ . Então, pela equação (26)  $\dot{p}_\phi = 0$ . Essa é uma importante consequência desse sistema, o momento angular obedece as leis de conservação,

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = Mr^2\dot{\phi} + M \frac{c_1 r^2}{R^3} = \text{constante}. \quad (28)$$

A expressão (28) também poderia ser obtida diretamente do momento de dipolo [21],

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad (29)$$

onde  $\vec{P}$  é o momento linear,

$$\vec{P} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (30)$$

A conservação do momento angular elimina a equação de movimento para a coordenada  $\phi$ , de forma que temos apenas as equações

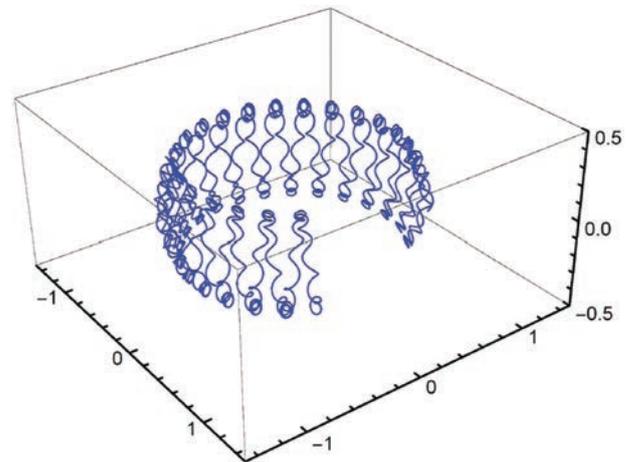
$$\ddot{r} = \frac{1}{M} \left[ \frac{p_\phi^2}{Mr^3} + 3Mc_1^2 \frac{r^3}{R^8} - Mc_1^2 \frac{r}{R^6} - 3p_\phi c_1 \frac{r}{R^5} \right] \quad (31)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{M} \left[ 3Mc_1^2 \frac{r^2 z}{R^8} - 3p_\phi c_1 \frac{z}{R^5} \right]. \quad (32)$$

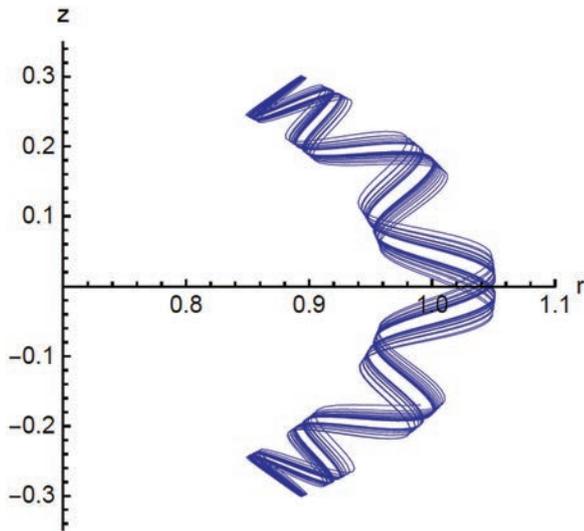
As equações (31) e (32) nos permitem estudar dinâmica de partículas carregadas. Em investigações de soluções numéricas, é conveniente analisar as soluções das equações tomando uma unidade tal que todas as constantes sejam iguais a 1. Isso posto, considere que uma partícula carregada com carga  $Q$  e massa  $M$  inicia um movimento, governados pelas equações (31) e (32), com condições iniciais  $r(0) = 1$ ,  $\dot{r}(0) = 3/50\sqrt{2}$ ,  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 0.03$ . O resultado é que a partícula se movimentada do eixo  $z$  confinada no plano meridiano. A Figura 4 mostra o movimento tridimensional da partícula e a Figura 5 ilustra a trajetória no plano meridional.

Outra trajetória para uma partícula confinada no plano meridiano, pode ser observada com as condições iniciais  $r(0) = 1$ ,  $\dot{r}(0) = [3 \cos(\pi/6)]^{1/2}/10$ ,  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 0.03 \sin(\pi/6)$ , como mostram as Figuras 6 e 7.

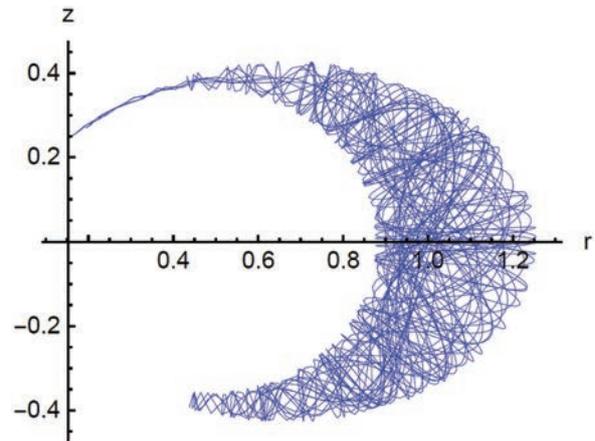
Além disso, podemos particularizar as equações (31) e (32), fazendo  $z(t) = 0$ , para análise do movimento ao



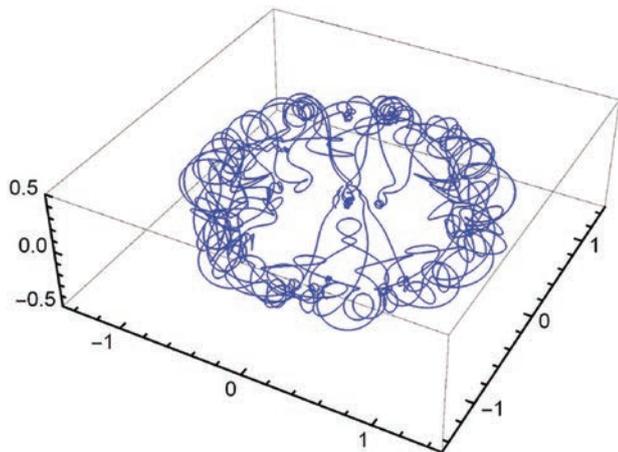
**Figura 4:** movimento confinado com condições iniciais  $r(0) = 1$ ,  $\dot{r}(0) = 3/50\sqrt{2}$ ,  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 0.03$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 1220$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



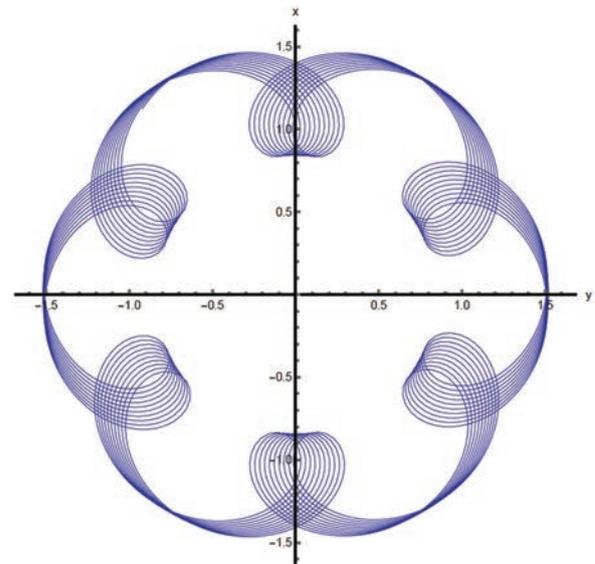
**Figura 5:** movimento no plano meridiano da trajetória da Figura 4 no intervalo de tempo  $\Delta t = 800$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 7:** movimento no plano meridiano da trajetória da Figura 6 no intervalo de tempo  $\Delta t = 800$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 6:** movimento confinado com condições iniciais  $r(0) = 1$ ,  $\dot{r}(0) = [3 \cos(\pi/6)]^{1/2}/10$ ,  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 0.03 \sin(\pi/6)$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 800$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 8:** movimento confinado no plano equatorial com condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 750$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

longo de um plano ortogonal ao plano meridiano, em  $z(0) = 0$ , o qual é denominado plano equatorial [11]. Nesse caso, usaremos as coordenadas cartesianas. Aplicando essa restrição, as equações (31) e (32) recaem nas equações:

$$\ddot{x} + \frac{c_1 \dot{y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \tag{33}$$

$$\ddot{y} - \frac{c_1 \dot{x}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \tag{34}$$

Note que estamos utilizando as equações adimensionais.

As equações para o movimento bidimensional são simples quando comparadas com as equações para o movimento tridimensional. No entanto, a não linearidade,

característica do segundo termo, proporcional a primeira derivada, a torna complexa o suficiente para que nossa análise continue a partir dos métodos numéricos.

O movimento no plano equatorial, governado pelas equações (33) e (33), representa uma aproximação para o sistema de uma partícula carregada sujeita a componente dipolar do campo magnético da terra que se movimenta ao redor da linha do equador.

A Figura 8 mostra que uma a partícula também pode permanecer aprisionada no plano equatorial. Essa trajetória foi obtida no trabalho [11]. Variando-se as condições iniciais resulta em trajetórias com uma forma semelhante a ilustrada nessa figura, porém diferindo, principalmente, na área que essas trajetórias ocupam e na velocidade com que essa partícula percorre. Essa

característica, pouca variabilidade de trajetórias, decorre da estabilidade do sistema, o que será explorado na próxima seção. No trabalho [22], os autores apresentam uma grande variedade de trajetórias confinadas para uma partícula carregada sujeita a um campo magnético oscilante, localmente em conformidade com as equações de Maxwell.

#### 4. Verificando a existência de caos no movimento 2D e 3D

Na seção anterior, nós tratamos a dinâmica de uma partícula carregada sobre ação do campo magnético de um dipolo. Nesta seção, vamos analisar a sensibilidade do sistema a variação das condições iniciais da partícula. Para isso, vamos analisar o comportamento de um determinado estado  $\vec{G}(t)$  em relação a uma mudança nas condições iniciais. Se o estado antes e após a variação das condições iniciais forem ligeiramente diferentes, distanciados por um intervalo de espaço grande, então o sistema apresenta indicio de caos [20, 23, 24].

O estado de um sistema pode ser caracterizados convenientemente por um espaço formado por  $2n$  eixos, onde  $n$  é o número de graus de liberdade com um momento associado a cada um deles, de forma que um estado do sistema possa ser caracterizado por um ponto nesse espaço. Um espaço de fase pode ser denotado por  $\mathcal{F}^{2n}$  [20, 23, 25], onde  $2n$  representa a dimensão desse espaço. Portanto, de forma geral, cada momento em função de sua respectiva coordenada geram  $n$  planos, nos quais temos a presença de curvas formadas ao longo da evolução temporal de  $\mathcal{F}^{2n}$ , as quais são denominadas órbitas do espaço de fase. Para melhor compreensão, vamos tomar o caso particular  $n = 1$ , chamando a coordenada de  $x$  e sua derivada de  $\dot{x}$ . Nesse caso, podemos formar um espaço com os eixos coordenados  $\dot{x}$  versus  $x$  versus  $t$  [20]. O espaço de fase  $\mathcal{F}^2$  será dado pela projeção dos pontos no plano  $\dot{x}$  versus  $x$ . A seção de Poincaré será dada pela coleção dos pontos que interceptam o plano  $\dot{x}$  versus  $x$ , para valores igualmente espaçados do tempo  $t$ . Essas definições podem ser generalizadas para o caso de  $n = 3$ , com espaço de fase  $\mathcal{F}^6$ . Nesse caso, o espaço de fases é o conjunto dos pontos  $\{x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t)\}$ , para coordenadas cartesianas. Podemos definir o vetor de estado como  $G(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t) \ p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$ .

Para o caso de uma partícula carregada sujeita ao campo magnético de um dipolo, cujo momento de dipolo é uma constante na direção do versor  $\hat{z}$ , a hamiltoniana e o momento angular são constantes de movimento. Portanto, o sistema perde o grau de liberdade  $\phi$ , uma vez que  $\phi = c_2$ , onde  $c_2$  é uma constante arbitrária.

Dessa forma, seja o vetor  $\vec{G}(t)$  o estado do sistema, dado na forma matricial

$$\vec{G}(t) = [r(t) \ z(t) \ p_r(t) \ p_z(t)]^T, \quad (35)$$

associado ao sistema dinâmico (27), temos que o sistema dinâmico está relacionado com o vetor estado pela taxa temporal de variação,

$$\frac{d}{dt}\vec{G}(t) = \vec{\mathcal{K}}(r, z, p_r, p_z), \quad (36)$$

ou explicitamente,

$$\vec{\mathcal{K}}(r, z, p_r, p_z) = \begin{cases} \frac{1}{M}p_r \\ \frac{1}{M}p_z \\ \frac{c_2^2}{Mr^3} + 3Mc_1^2 \frac{r^3}{R^8} + \\ -Mc_1^2 \frac{r}{R^6} - 3c_2c_1 \frac{r}{R^5} \\ 3Mc_1^2 \frac{r^2z}{R^8} - 3c_2c_1 \frac{z}{R^5} \end{cases} \quad (37)$$

Para a verificação do caos no movimento bidimensional e tridimensional, vamos utilizar dois fortes métodos: um mapeamento dos estados do sistema dinâmico (36) através das seções de Poincaré e o distanciamento de dois estados pelos expoentes de Lyapunov [20, 23, 25].

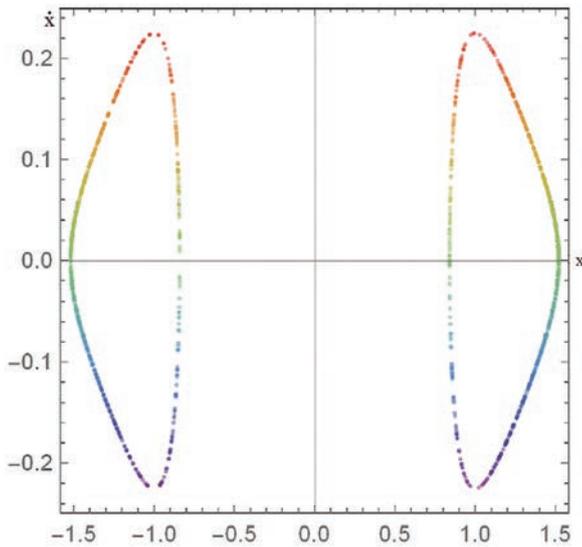
##### 4.1. Movimento bidimensional

Nesta subseção vamos tratar a estabilidade do sistema para dois casos dentro do problema bidimensional, onde o primeiro é o movimento da partícula carregada considerando um momento de dipolo constante e o segundo sendo introduzido uma perturbação temporal na qual o dipolo passa a ser oscilante no tempo.

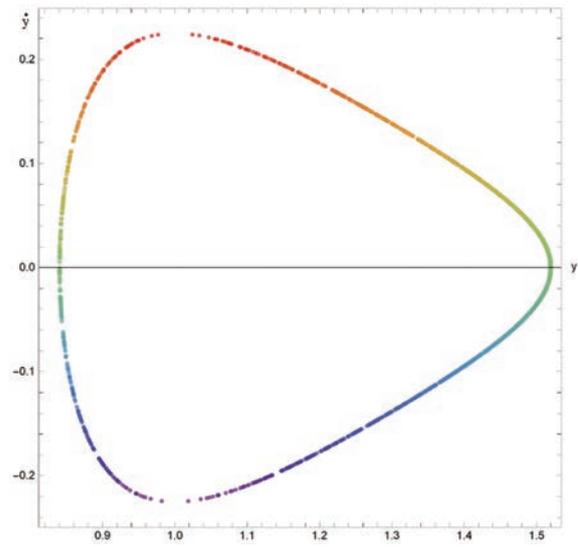
Quando consideramos o caso bidimensional, as equações que descrevem o movimento de uma partícula carregada sujeita ao campo magnético de um dipolo são as (33) e (34). Nas seções anteriores foi considerado um momento de dipolo constante, através do qual recaímos em um problema de Störmer. No entanto, se consideramos um momento de dipolo oscilante como uma perturbação temporal nas coordenadas  $x$  e  $y$  a estabilidade das órbitas pode alterar drasticamente. Além disso, podemos ainda considerar uma perturbação na coordenada  $z$ , a qual é relativamente mais simples de definir a estabilidade nesse caso do que uma perturbação nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

Considere que no sistema formado pelas equações (33) e (34) é introduzido uma perturbação ínfima na direção perpendicular ao plano do movimento da forma  $z = z_0 + \Delta z$ , onde  $\Delta z \ll 1$ . Dessa forma, as equações no sistema tridimensional formado pelas equações (16), (17) e (18), fazendo a seguinte substituição  $z \rightarrow \Delta z$  e  $z_0 = 0$  (plano escolhido anteriormente). Com esse sistema de equações constata-se que para  $x(0) = 4$ ,  $\dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 1$  não temos um movimento oscilatório em torno do plano  $z_0 = 0$ , o que caracteriza que o sistema (33) e (34) é instável por pequenas perturbações na direção  $z$ .

Para o caso bidimensional onde o momento de dipolo é constante, isto é, o problema de Störmer para um



**Figura 9:** seção de Poincaré para o plano  $\dot{x}$  versus  $x$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $y(t) = 0$ , com condições iniciais  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 75000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



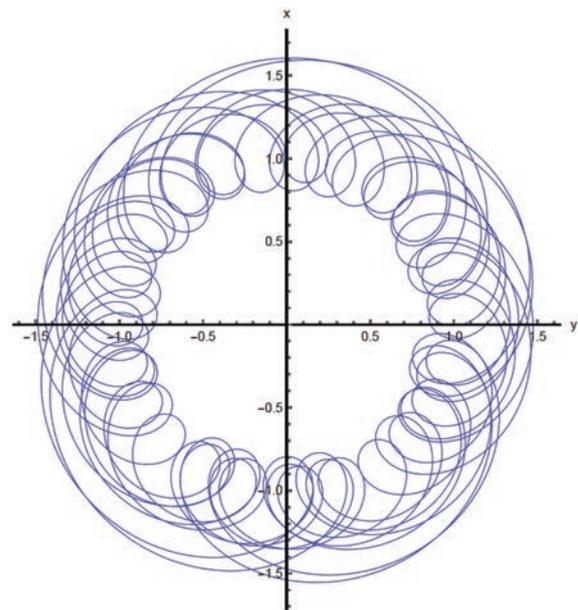
**Figura 10:** seção de Poincaré para o plano  $\dot{y}$  versus  $y$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $x(t) = 0$ , com condições iniciais  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 75000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

plano fixo, em que o movimento da partícula se restringe ao plano equatorial, onde  $z(t) = 0$ , a modelagem da dinâmica é feita em termos das equações diferenciais (33) e (34). Nesse caso é possível concluir antecipadamente a não existência de caos. O espaço de fase para o movimento bidimensional possui dois graus de liberdade,  $\mathcal{F}^{2n} = \mathcal{F}^4$ . No entanto, dado que a hamiltoniana e o momento angular para esse sistema são conservados, então a dimensionalidade do espaço de fase diminui duas dimensões, de forma que  $\mathcal{F}^{2n} = \mathcal{F}^2$ . Nesse caso, o teorema de integrabilidade de Arnold–Liouville [25] para sistemas hamiltonianos garante a não existência de caos.

Portanto, movimentos cujo espaço de fase possui duas dimensões são estáveis a variação das condições iniciais. Nós podemos verificar essa conclusão através das seções de Poincaré. Considere um plano no paralelo a  $\dot{x}$  versus  $x$  e outro paralelo a  $\dot{y}$  versus  $y$ , nos respectivos pontos  $y(t) = 0$  e  $x(t) = 0$ , que registrem um ponto toda vez que forem interceptados pelas curvas do espaço de fase ao longo de seu desenvolvimento temporal. Dadas as condições iniciais  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 225$  e parâmetro  $c_1 = 1$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 75000$ , temos as seções de Poincaré ilustradas nas Figuras 9 e 10.

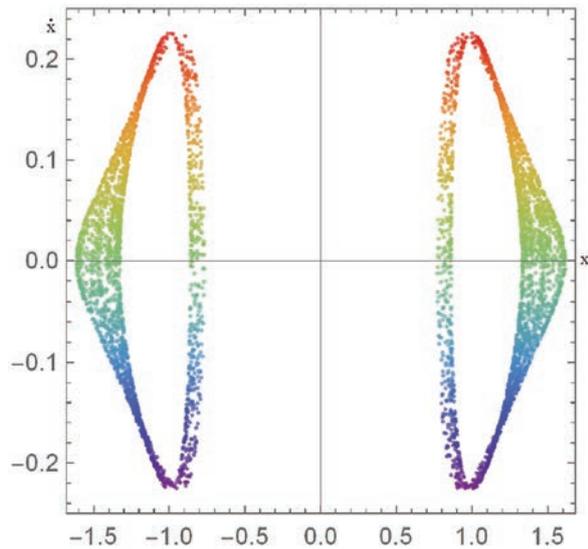
As Figuras 9 e 10 representa as seções de Poincaré para a evolução temporal das órbitas do espaço de fase  $\dot{x}(x)$  e  $\dot{y}(y)$ . Os pontos exibidos nas figuras se distribuem em curvas suaves, característica de uma órbita no espaço de fase de um movimento periódico. A composição de pontos em um curva simples, indicam que o sistema é estável.

Para o caso em que consideramos uma perturbação nas coordenadas  $x$  e  $y$ , é interessante analisar que a

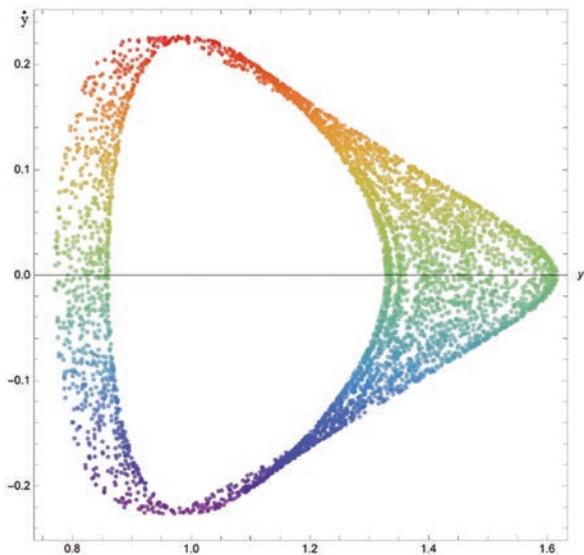


**Figura 11:** trajetória bidimensional feita a perturbação temporal  $c_1 \Rightarrow c_1 + 0.2 \cos(0.02\pi t)$ , com condições iniciais  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 750$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

estabilidade do sistema pode ser facilmente quebrada por uma simples perturbação temporal. Considere que  $c_1$  seja calibrado em  $c_1 \Rightarrow c_1 + 0.2 \cos(0.02\pi t)$ . Nesse caso,  $c_1$  está sendo calibrado com um fator temporal associado a um dipolo oscilante  $\vec{m} = (m + 0.2 m \cos(0.02\pi t)/c_1) \hat{k}$ , onde  $m$  é uma constante. A trajetória com as mesmas condições iniciais da ilustrada na Figura 8 passa ser conforme mostra a Figura 11.



**Figura 12:** seção de Poincaré para o plano  $\dot{x}$  versus  $x$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $y(t) = 0$ , com condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 75000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 13:** seção de Poincaré para o plano  $\dot{y}$  versus  $y$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $x(t) = 0$ , com condições iniciais  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0.01$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 225$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 75000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

Projetando uma seção de Poincaré no espaço de fase  $\dot{x}$  versus  $x$ , no ponto  $y(t) = 0$ , e outra paralela ao espaço de fase  $\dot{y}$  versus  $y$  no ponto  $x(t) = 0$ , obtemos as Figuras 12 e 13. Note que a distribuição dos pontos nessas seções formam uma curva irregular, o que ocorre em seções de Poincaré para um espaço de fase disforme e com curvas complexas. Essa característica é um indicio de que esse movimento é caótico.

As Figuras 12 e 13 apresentam indicio de caos. Porém, quando as condições iniciais são variadas, a área sobre a qual os pontos se distribuem se mantém. Esta observação sugere que o volume do espaço de fase se conserva, conforme a sua evolução temporal. De fato, o volume é conservado e isso pode ser concluído a partir da natureza conservativa da energia mecânica. Vamos investigar isso aplicando a divergência no vetor estado do sistema, obtemos uma poderosa equação para análise do espaço de fase [11, 22, 24, 26],

$$\nabla \cdot \vec{G}(t) = \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \sum_i \lambda_i, \quad (38)$$

onde  $U$  é o volume do espaço de fase e  $\lambda_i$  é o expoente de Lyapunov.

A equação (38) é uma relação da evolução temporal do volume do espaço de fase, o fluxo de fase e a somatória dos expoentes de Lyapunov. Imediatamente, podemos perceber que essa equação pode fornecer a informação de que o espaço de fase pode estar se contraindo ou expandindo, dependendo do sinal da derivada temporal, e no caso em particular em que a derivada temporal for nula, o volume se conserva. Algumas referencias como [23] dão destaques para os casos em que  $dU/dt = 0$ , o sistema é conservativo, e  $dU/dt < 0$ , o sistema é dissipativo e o espaço de fase se contrai tendo a subespaços Atratores. No trabalho [22], os autores analisam a dinâmica de uma partícula carregada em um movimento caótico, onde  $dU/dt > 0$  e o sistema é dissipativo. Portanto, dentre essas três possibilidades, apenas os sistemas conservativos apresentam taxa de variação temporal nula do volume do espaço de fase, ou seja, sendo o único caso onde o volume do espaço de fase se mantém constante.

Portanto, o volume do espaço de fase para uma partícula sujeita ao campo magnético de um dipolo é constante, para qualquer momento de dipolo na direção  $\hat{k}$ , já que sobre essa condição a energia cinética se anula, a hamiltoniana é contante e o sistema é conservativo.

Por outro lado, usando o método numérico abordado no trabalho [27], com as condições iniciais  $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) \rightarrow (0, 1, 0, 0.225, 0)$ , determinamos os expoentes máximos de Lyapunov em  $\lambda_i = (0.00525926, 0.00132324, 1.5509726083176853 \times 10^{-11}, -0.0065825)$ . Dado que o terceiro expoente máximo de Lyapunov é da ordem de  $10^{-11}$ , vamos considerá-lo desprezível. Dessa forma, restam três expoentes e a somatória  $\sum_i \lambda_i = 2.90596 \times 10^{-12}$ . O valor da soma dos expoentes máximos de Lyapunov é desprezível por ser da ordem de  $10^{-12}$ . Mas, vimos que o volume do espaço de fase desse sistema não é dissipativo. Portanto, podemos considerar  $\sum_i \lambda_i = 0$ , com um erro numérico da ordem de  $10^{-12}$ .

Portanto, podemos concluir que sistemas compostos por uma partícula carregada sujeita ao campo magnético de um dipolo com um momento de dipolo constante não tem possibilidade de existência de caos, pelo teorema

de Arnold–Liouville, ao passo em que introduzindo uma perturbação temporal oscilante nas coordenadas  $x$  e  $y$  os resultados mostram que o sistema se torna caótico.

### 4.2. Movimento tridimensional

No movimento tridimensional, consideramos a dinâmica no plano equatorial e no plano meridiano. Nesse caso, temos três graus de liberdade  $(r, \phi, z)$ . O espaço de fase, a priori, está contido por um espaço  $\mathcal{F}^{2n} = \mathcal{F}^6$ , com seis dimensões. No entanto, a dimensionalidade do espaço de fase cai para  $\mathcal{F}^4$ , dado que a hamiltoniana e o momento angular são constantes de movimento. Portanto, existe a possibilidade desse sistema apresentar caos dado que o teorema de Arnold–Liouville só garantem a estabilidade de sistemas cujo espaço de fase possui duas dimensões ou menos.

Para verificação do caos, vamos reescrever a equação (27), em coordenadas cartesianas, como um sistema dinâmico. Seja  $\vec{K}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  o sistema dinâmico com as variáveis  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  equivalente ao sistema de equações diferenciais (27) e seja  $\vec{G}(t)$  o vetor estado desse sistema, dado matricialmente na forma

$$\vec{G}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t) \quad v_x(t) \quad v_y(t) \quad v_z(t)]^T. \quad (39)$$

Então, o sistema dinâmico  $\vec{K}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  é dado pela derivada temporal de primeira ordem do vetor estado, em termos das coordenadas da posição, velocidades e suas derivadas de primeira ordem, isto é

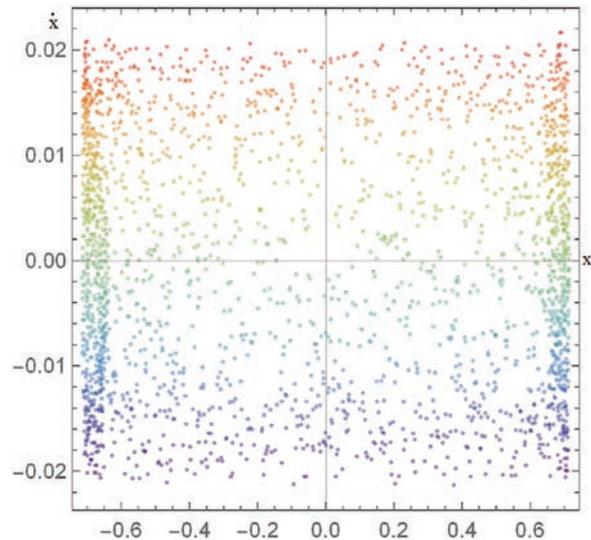
$$\vec{K}(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{d}{dt} \vec{G}(t), \quad (40)$$

ou explicitamente,

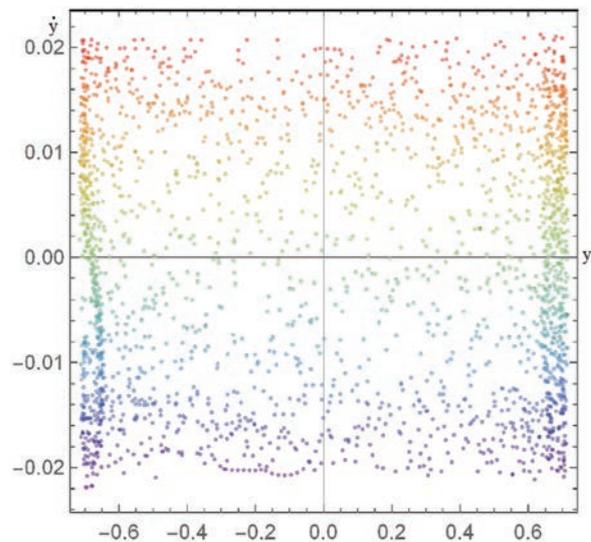
$$\vec{K}(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\omega_0 \frac{[v_y(x^2+y^2-2z^2)+3v_zzy]}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \omega_0 \frac{[v_x(x^2+y^2-2z^2)+3v_zzx]}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ -\frac{3\omega_0z(v_yx-v_xy)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{cases} \quad (41)$$

Para uma análise da sensibilidade do sistema, vamos representar três planos do espaço de fase:  $\dot{x}$  versus  $x$ ,  $\dot{y}$  versus  $y$  e  $\dot{z}$  versus  $z$ . Considere uma seção de Poincaré para cada plano, representando a evolução temporal das órbitas do espaço de fase, por meio dos pontos gerados pela interseção do plano com essas curvas, onde usamos as condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5, z(0) = 0, v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.01$ . O resultado são as seções mostradas nas Figuras 14, 15 e 16.

As seções de Poincaré, ilustradas nas Figuras 14, 15 e 16, mostram que os pontos estão distribuídos de forma totalmente irregular. Os planos do espaço de fase representado pelas seções de Poincaré  $\dot{x}$  versus  $x$  e  $\dot{y}$  versus  $y$ ,

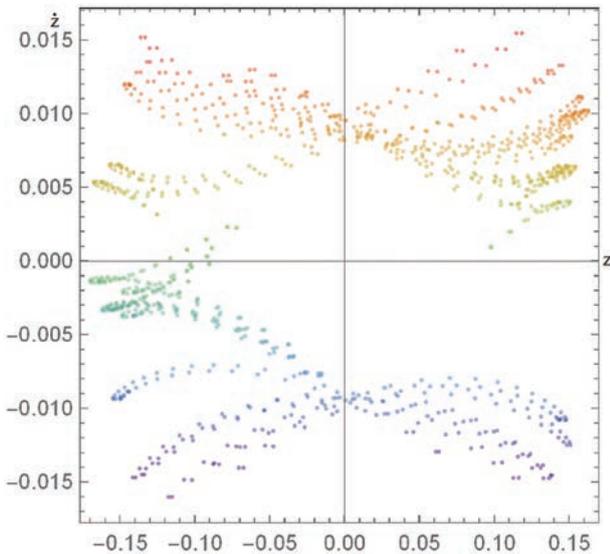


**Figura 14:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\dot{x}$  versus  $x$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(z, y) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5, z(0) = 0, v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.01$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 100000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 15:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\dot{y}$  versus  $y$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(z, x) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5, z(0) = 0, v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.01$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 100000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

aparentemente não possuem nenhuma curva suave em suas respectivas seções de Poincaré, indicando um espaço de fase disforme e preenchidos por curvas complexas. Esse é um indicio de caos no sistema. Por outro lado, embora a seção de Poincaré ilustrando os pontos do espaço de fase gerado por  $\dot{z}(z)$ , posicionada no ponto  $x = y = 0$ , mostre curvas irregulares, devemos considerar que



**Figura 16:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\dot{z}$  versus  $z$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.01$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 100000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .

as trajetórias no plano meridiano são suficientemente complexas, tal como mostra a Figura 7, para que seja de se esperar um espaço de fase disforme. Nesse caso, temos indício de caos nas variáveis  $(x(t), y(t))$  e uma investigação mais profunda é necessária para definirmos a estabilidade da variável  $z(t)$ . Tal investigação pode ser executada por intermédio da observação dos estados do sistema quando as condições iniciais são variadas, ou seja, a investigação da estabilidade do sistema. Considere, portanto, a variação  $\dot{z}(0) = 0.01 \rightarrow \dot{z}(0) = 0.1$ , o que resulta nas seções de Poincaré mostradas nas Figuras 17, 18 e 19.

Para o caso tridimensional, temos o equivalente a relação (38),

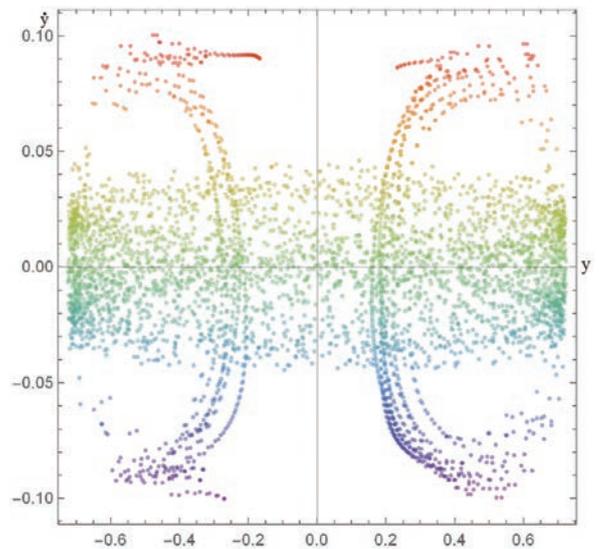
$$\nabla \cdot \vec{G}(t) = \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \sum_i \lambda_i, \quad (42)$$

através da qual podemos verificar a conservação do volume do espaço de fase.

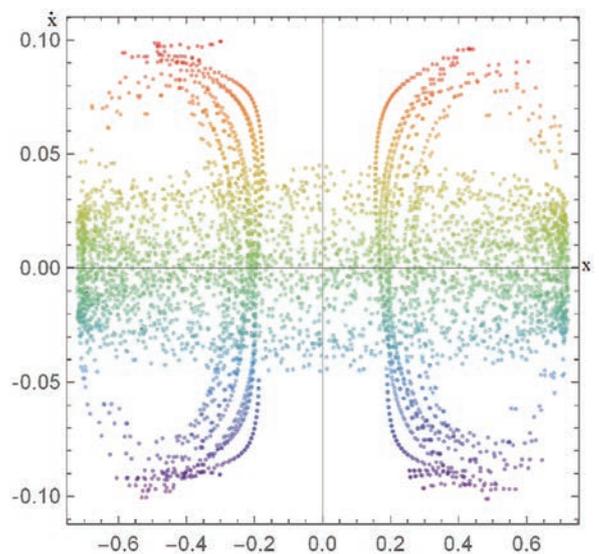
Usando as condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.01$ , um intervalo de tempo  $\Delta t = 0.1$  e um número de passos  $k = 3000$ , calculamos numericamente os expoentes máximos de Lyapunov  $\lambda = (0.00783882, 0.0057872, 0.0025664, -0.00113594, -0.0060048, -0.00905169)$ . Dos seis expoentes, três são positivos e identificam o caos no sistema. A somatória resulta  $\sum_i \lambda_i = -8.43076 \times 10^{-16}$ . Em nossas simulações numéricas, constatamos que quanto maior o número de passos, mais próximo de zero é o valor da soma dos expoentes. Isso está de acordo com o fato de que a hamiltoniana desse sistema dinâmico é uma constante, isto é, o espaço de fase é constante no

tempo e  $\sum_i \lambda_i = 0$ , com um erro numérico da ordem de  $10^{-16}$ .

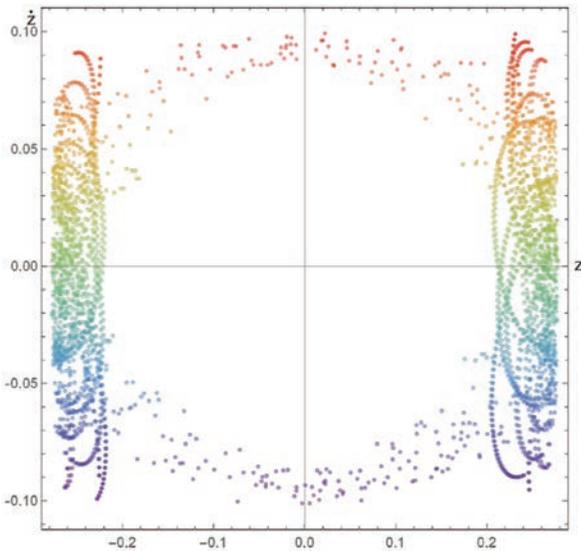
Além disso, outra constatação interessante foi o fato que os expoentes de Lyapunov apresentam oscilações até próximo dos 1500 passos do cálculo numérico. O gráfico dos expoentes de Lyapunov em função do valor dos passos  $k$  está ilustrado na Figura 20.



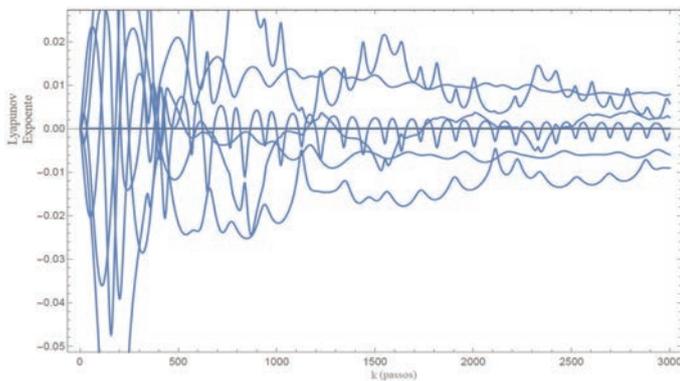
**Figura 17:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\dot{y}$  versus  $x$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(z, y) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.1$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 50000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 18:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\dot{x}$  versus  $y$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(z, x) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.1$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 50000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 19:** seção de Poincaré para o plano gerado por  $\hat{z}$  versus  $z$ , onde cada ponto é gerado no evento caracterizado por  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , com condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0.5$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$  e  $v_z(0) = 0.1$ , ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t = 50000$ , sendo o tempo inicial  $t_0 = 0$ .



**Figura 20:** gráfico que representa o espectro de Lyapunov, condições iniciais  $x(0) = y(0) = 1$ ,  $z(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0.015$ , um intervalo de tempo  $\Delta t = 0.1$  e um número de passos  $k = 3000$ .

Observa-se pelo gráfico da Figura 20 que os expoentes de Lyapunov apresentam uma oscilação entre valores positivos e negativos antes de convergirem para os valores do número máximo de passos especificados, no qual temos três expoentes positivos e três negativos. As oscilações drásticas que encerram após  $k = 1500$  ciclos caracterizam um comportamento transiente nos expoentes de Lyapunov. Portanto, os resultados mostram pelo menos três expoentes positivos, caracterizando o caos para esse sistema.

### 5. Conclusão

Neste artigo foi realizado um estudo das regiões de confinamento descritas por uma partícula carregada

submetida ao campo magnético de um dipolo. Analisou-se as trajetórias tridimensional, através das coordenadas cartesianas pela segunda lei de Newton e cilíndricas pela hamiltoniana do movimento, e o caso particular para trajetórias bidimensionais da partícula, para diferentes condições iniciais. Constatamos que a dinâmica tridimensional apresenta caos, enquanto que a dinâmica bidimensional é estável mas se tornar caótica para um momento de dipolo oscilante no tempo.

Foi analisado as equações de movimento para o sistema de uma partícula deslocando-se sobre a região de defluência do campo magnético de um dipolo. Verificou-se que as trajetórias de confinamento são descritas pela partícula a uma determinada distância do eixo  $z$ , limitada por um plano que acompanha o movimento ao redor desse eixo paralelamente, a distância entre o eixo  $z$  e a órbita da partícula é menor quanto menores forem as condições iniciais para as coordenadas  $x$  e  $y$ . No entanto, embora as trajetórias possam ser construídas a partir de condições iniciais tão menores quanto se queira, fisicamente existem um limite que não pode ser ultrapassado (no caso da partícula movendo-se ao redor do planeta Terra o limite é o próprio raio do planeta, se for um aparato experimental o limite é a fonte e assim por diante). Além disso, constatou-se que a energia mecânica do sistema é uma constante, o que resulta em uma hamiltoniana constante no tempo, a qual é independente do ângulo entre o vetor posição da partícula e o eixo equatorial nas coordenadas cilíndricas. Portanto, o momento angular é constante e isso elimina uma equação do sistema dinâmico resultante da hamiltoniana.

Verificou-se também a estabilidade do movimento no plano equatorial e o caos no movimento descrito pelo plano meridional. O plano equatorial permanece fixo enquanto a partícula descreve uma trajetória restrita a esse plano, no caso particular em que  $z(t) = 0$ . Nesse caso, constatou-se que o sistema é estável pelo teorema de Arnold–Liouville e que qualquer perturbação temporal pode reconduzir a estabilidade do sistema tornando-o caótico. Além disso, observou-se que a dinâmica no plano meridional é caótica através das seções de Poincaré e dos expoentes de Lyapunov. Verificou-se que, nesse caso, os pontos ilustrados nas seções de Poincaré, em todos os plano do espaço de fase analisados, se distribuem em curvas irregulares e que a soma dos expoentes de Lyapunov é igual a zero, sendo três expoentes positivos no total de seis. Portanto, o sistema com  $z(t) \neq 0$ , em que cuja a equação resulta da hamiltoniana, é caótico, com um volume de espaço de fase constante e conservativo.

### Agradecimentos

Os autores agradecem (i) ao professor Marcus A. M. de Aguiar, pela dica sobre o teorema Arnold–Liouville, e (ii) ao CNPq pela bolsa PIBIC e financiamento parcial do trabalho.

## Referências

- [1] H. Saitoh, Z. Yoshida, Y. Yano, M. Nishiura, Y. Kawazura, J.H. Stanja e T.S. Pedersen, *Phys. Rev. E* **94**, 043203 (2016).
- [2] Z. Yoshida, H. Saitoh, J. Morikawa, Y. Yano, S. Watanabe e Y. Ogawa, *Phys. Rev. E* **104**, 235004 (2010).
- [3] M. Takahashi e H. Koyama, *The Astrophysical Journal* **693**, 1 (2009).
- [4] M.K. Öztürk, *Am. J. of Phy.* **80**, 5 (2012).
- [5] C. Störmer, *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity* **37**, 375 (1932).
- [6] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New Jersey, 1999), 3<sup>a</sup> ed.
- [7] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Elsevier, New Jersey, 1999), 3<sup>a</sup> ed.
- [8] K.D. Machado, *Teoria do electromagnetismo* (Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2006), v. 2, 1<sup>a</sup> ed.
- [9] J.E. García-Farieta e A. Hurtado, *Revista Mexicana de Física E* **65**, 64 (2019).
- [10] R.S. Dutra, D.S.R. Ferreira, A.S.M. Gonçalves e G.M. Carvalho, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **42**, e20190164 (2020).
- [11] O.F.A. Bonfim, D.J. Griffiths e S. Hinkley, *Int. J. Bifurcation Chaos.* **10**, 1, 265 (2000).
- [12] T. Furukawa, K. Takizawa, D. Kuwahara e S. Shinohara, *Physics of Plasmas* **24**, 4 (2017).
- [13] J.A. Heras, *Am. J. Phys.* **75**, 176 (2007).
- [14] J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison Wesley, Boston, 1992), 4<sup>a</sup> ed.
- [15] K.D. Machado, *Teoria do electromagnetismo* (Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2006), v. 3, 1<sup>a</sup> ed.
- [16] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier, Amsterdã, 2005), 6<sup>a</sup> ed.
- [17] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [18] R. Dilão e R. Alves-Pires, em: *Differential Equations, Chaos and Variational Problems*, editado por V. Staicu (Birkhäuser, Basel, 2007).
- [19] N.A. Lemos, *Mecânica analítica* (Livraria da Física, São Paulo, 2007), 2<sup>a</sup> ed.
- [20] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Cassical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks Cole, California, 2003), 5<sup>a</sup> ed.
- [21] D.J. Griffiths, *Am. J. of Phys.* **60**, 979 (1992).
- [22] D.W.M. Pastana e M.E. Rodrigues, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **43**, e20210003 (2021).
- [23] W. Greiner, *Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics* (Springer, New York, 2010), 2<sup>a</sup> ed.
- [24] L.J.B. Quaresma e M.E. Rodrigues, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **41**, 2 (2019).
- [25] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics* (Springer, New York, 1989), 2<sup>a</sup> ed.
- [26] W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, New York, 1998).
- [27] M. Sandri, *The Mathematical Journal.* **6**, 78 (1996).