



Rediscutindo Soluções Numéricas de Equações de Onda

Re-assessing Numerical Solutions to the Wave Equations

Adilson Costa da Silva^{*1}, José Abdalla Helayël Neto²

¹Instituto Militar de Engenharia, Seção de Engenharia Nuclear, Urca, RJ, Brasil

²Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Urca, RJ, Brasil

Recebido em 22 de Março, 2019. Revisado em 14 de Maio, 2019. Aceito em 14 de Maio, 2019.

Nesta contribuição, é nosso principal objetivo apresentar um método numérico de solução da equação de onda, seja esta de origem mecânica ou eletromagnética. Baseando-nos nesta solução, podemos avaliar o comportamento destas ondas sob diferentes aspectos e condições, visto que, as ondas eletromagnéticas conseguem se propagar no vácuo, ou seja, não necessitam de um meio de propagação, enquanto as ondas mecânicas necessitam de um meio de propagação. Neste artigo, o leitor perceberá que a implementação numérica será a mesma tanto para ondas mecânicas quanto para ondas eletromagnéticas. Como iremos avaliar o comportamento de ondas em apenas um meio de propagação, utilizaremos o método de diferenças finitas para discretizar esta equação. Um dos propósitos deste trabalho é incentivar os leitores a utilizarem métodos numéricos de soluções aplicados à Física. Logo, abordamos de forma bastante simples a solução numérica do problema aqui tratado, bem como suas aplicações sob diferentes condições, atendo-nos com cuidado à precisão do método. Para validar a metodologia implementada nesta contribuição, comparamos os resultados obtidos com soluções analíticas disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Ondas mecânicas, ondas eletromagnéticas, método de diferenças finitas, propagação e vibração de ondas.

Numerical solutions to the mechanical and electromagnetic wave equations have been worked out. In terms of numerical solutions, we can evaluate the behavior of these waves under different view points, for the equation that governs these phenomena differ specifically in the propagation speed. Thus, the numerical implementation follows without changes for both the mechanical and electromagnetic waves. As we are interested in evaluating the behavior of the wave solutions in a single propagation medium, we shall make use of the finite difference method to discretize the wave equation. As one of the main goals of this contribution is to encourage readers to use numerical methods to find solutions for physical problems, we shall present in a very simple way the numerical procedures, as well as their applications under different conditions, taking care, however, of the precision of the method. To validate the methodology implemented in our paper, we compare the analytical solutions available in the literature with the results here obtained.

Keywords: Mechanical waves, electromagnetic waves, finite difference method, wave propagation and vibration.

1. Introdução

As ondas, de uma forma geral, constituem um dos principais campos de estudo da Física, e suas aplicações são bastante significativa no mundo em que vivemos atualmente. Para termos uma ideia de sua aplicação, podemos citar o mundo fonográfico da música e sua grande extensão. Também, podemos citar concertos sinfônicos, festivais de música cujo o público chega a centenas de milhares de pessoas, entre outros. O desenvolvimento tecnológico neste caso é tão significativo que gastam-se muito na produção musical de um grupo, bem como, na produção musical de filmes, onde há altos investimentos em acústica de ambientes e studios de produção. Note que não citamos investimentos em softwares e instrumentos musicais que evoluíram bastante ao longo dos anos. Neste caso, estamos falando especificamente de

ondas mecânicas, isto é, ondas que dependem de um meio para se propagar¹. Para abranger mais um pouco sobre este meio, podemos citar os veículos de divulgação, distribuição e reprodução, já que uma vez produzido, a informação contida na onda pode ser transmitida para o mundo inteiro através da internet, rádio, televisão, mídias graváveis que podem ser reproduzidas por meio de CDs, DVDs, pen drives e outros dispositivos que estão atualmente em desenvolvimento.

A aplicação de ondas eletromagnéticas é tão vasta que vai desde a escala atômica, por exemplo, na medicina nuclear, onde são feitos exames para obtenção de imagens por tomografia computadorizada por emissão de pósitrons *PET* [1] já que o corpo do paciente, que é constituído de matéria, apresenta os elétrons que se aniquilam com a antimatéria emitida por um radionuclídeo emissor de pósitrons, gerando assim dois fótons seguindo

*Endereço de correspondência: adilsoncostasilva@gmail.com

¹Ar, água ou em um gás.

os princípios de conservação da carga entre outros. Este procedimento é bastante eficiente na detecção de tumores cerebrais em pacientes com câncer. Para aplicação em grandes escalas, podemos citar a transmissão de sinal via satélites entre outros.

O objetivo de apresentar uma solução numérica visa descrever o fenômeno físico com uma abordagem bastante simples e precisa. Uma das grandes vantagens em utilizar soluções numéricas deve-se ao fato de que há muitos problemas em aberto que não possuem soluções analíticas, de forma que a abordagem numérica é que nos permite contornar esta dificuldade. Uma outra vantagem é que é sempre possível simplificar o problema proposto, tornando nulos alguns termos da equação, sem a necessidade de reescrever o código desenvolvido para o caso geral. É importante que o leitor tenha a ideia de que há um preço a pagar pelo uso de soluções numéricas devido ao esforço computacional gasto na solução do problema a serem tratados. Porém, com os avanços na área de tecnologia da informação, os tempos de simulação para diferentes tipos de casos/problemas estão sendo reduzidos e tornando cada vez mais viável o uso de soluções numéricas.

Apresentaremos uma visão geral do problema e as simulações para cada caso de interesse.

Consideremos uma corda presa em suas extremidades na horizontal, sendo deslocada da posição de equilíbrio. Seja L o comprimento da corda. Para descrever o movimento dessa corda em torno da posição de equilíbrio, vamos utilizar apenas um elemento de corda de massa Δm . Como essa corda está sendo tensionada pela ação das forças T_1 e T_2 , conforme mostra a Fig.1, podemos aplicar a segunda lei de Newton a esse elemento de corda e obter, assim, a equação que governa a propagação de onda dessa corda, tal que,

$$T_2 \cos \theta_2 \hat{i} - T_1 \cos \theta_1 \hat{i} + T_2 \sin \theta_2 \hat{j} - T_1 \sin \theta_1 \hat{j} = \Delta m a \hat{j}, \tag{1}$$

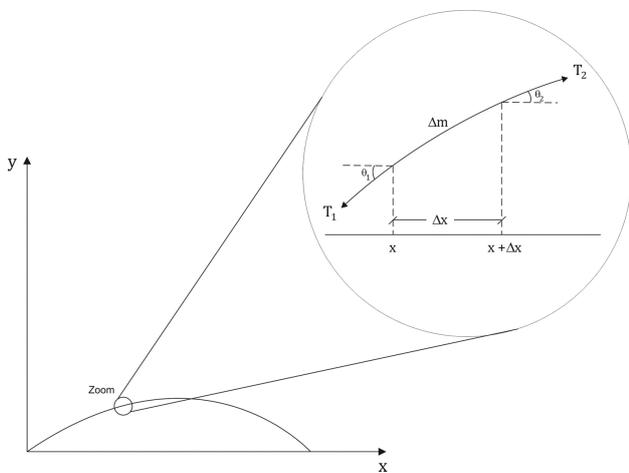


Figura 1: Elemento de corda esticada.

onde Δm é o elemento de corda. Como a aceleração tem apenas componente ao longo do eixo- y , podemos escrever a seguinte relação para a projeção ao longo do eixo- x ,

$$T_2 = \frac{T_1 \cos \theta_1}{\cos \theta_2}.$$

Substituindo na Eq.(1), resulta que

$$T_1 \left(\tan \theta_2 - \tan \theta_1 \right) = \frac{\Delta m a}{\cos \theta_1},$$

como estamos lidando com pequenos ângulos, podemos aproximar $\cos \theta_1 \simeq 1$ e usando, a relação entre massa e densidade, temos que, para um pequeno elemento da corda, $\Delta m = \mu \Delta x$. Para simplificar a notação, definiremos a tensão na corda $T \equiv T_1$. Logo, com essas relações a equação pode ser escrita como,

$$\frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{\Delta x} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

A derivada de uma função descreve a inclinação da reta tangente no ponto; logo, a tangente no ponto, dada pela derivada da função, lê-se:

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Então, se aplicarmos o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ na equação acima, obtém-se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \right) = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

resultando assim na equação de onda mecânica dada por,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \tag{2}$$

onde v é a velocidade de propagação da onda mecânica, que depende da densidade linear da corda μ e da tensão da corda T , definida como $v \equiv \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. É importante que o leitor observe que há diferentes tipo de ondas, isto é,

- **Ondas mecânicas:** São as mais conhecidas, visto que podem ser observadas no nosso cotidiano; por exemplo, as ondas do mar, sonoras, sísmicas, entre outras. Estas ondas dependem de um meio material para se propagar e são governadas pelas leis de Newton.
- **Ondas eletromagnéticas:** Apesar de utilizarmos com frequência, por exemplo, microondas, telefonia celular, transmissão de rádio, telecomunicações, medicina e termos experiências cotidianas com a luz visível, estas ondas são menos intuitivas e pouco conhecidas e até por alguns estudantes. As ondas eletromagnéticas não precisam de um meio material para se propagar; propagam-se no vácuo com a máxima velocidade de sinalização, dada por $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ (c é a constante fundamental da Física que representa a velocidade da luz no vácuo).

- **Ondas de matéria:** São ondas mais restritas que se revelam em escalas atômica e subatômica cujos estudos são realizados em experimentos de alta precisão que permitem detectá-las. Estão associadas a partículas subatômicas, como os elétrons, prótons, nêutrons e neutrinos, por exemplo. São classificadas desta forma devido ao seu comportamento *dual*, ora se comportam como partículas, ora como ondas.

Neste artigo, buscaremos soluções analíticas e numéricas tanto para ondas mecânicas, bem como, ondas eletromagnéticas. Há muitas formas de obter a solução da equação Eq.(2). Na literatura [2], a solução da equação de onda é dada por,

$$y(x, t) = y_m \sin(\kappa x - \omega t + \phi), \tag{3}$$

onde $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o vetor de onda, λ é o comprimento de onda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular e T é o período da onda, ou seja, o tempo necessário para que a onda percorra uma distância igual ao seu comprimento de onda, λ . Para a obtenção de soluções ondulatórias, adotaremos o método de separação de variáveis para ondas estacionárias, onde as condições de contorno são especificadas. Apresentaremos a solução numérica para o caso geral, isto é, aquela que pode ser aplicada tanto para ondas mecânicas, bem como, para ondas eletromagnéticas.

2. Solução Numérica da Equação de Onda

Apresentaremos uma solução numérica para equação de onda mecânica ou eletromagnética unidimensional, dada pela Eq.(2). Para isso, usaremos a notação $\psi(x, t)$ para representar a função de onda, visto que é uma notação mais geral. Desta forma, a Eq.(2) em função desta nova notação assume a seguinte forma,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t). \tag{4}$$

Para discretizar esta equação, usaremos a série de Taylor² [3, 4], de modo que, a expansão em torno do ponto Δt é dado por

$$\begin{aligned} \psi(x, t \pm \Delta t) &= \psi(x, t) \pm \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) \pm \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \psi(x, t) + \dots, \end{aligned}$$

analogamente, para pontos em torno de Δx , temos

$$\begin{aligned} \psi(x \pm \Delta x, t) &= \psi(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \pm \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi(x, t) + \dots \end{aligned}$$

²Utiliza o mesmo conceito do Método de Diferenças Finitas

Como a equação de onda é uma equação de 2ª ordem tanto no espaço, quanto no tempo, podemos truncar a série na segunda derivada. Combinando as expressões, temos que suas derivadas ficam expressas da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \frac{\psi(x, t - \Delta t) - 2\psi(x, t) + \psi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2},$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = \frac{\psi(x - \Delta x, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2}.$$

Substituindo estas expressões na Eq.(4), temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v^2} \frac{\psi(x, t - \Delta t) - 2\psi(x, t) + \psi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} \\ &= \frac{\psi(x - \Delta x, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Iremos redefinir os parâmetros de modo a simplificar a notação, tal que, $\psi_{x,t\pm 1} \equiv \psi(x, t \pm \Delta t)$, $\psi_{x\pm 1,t} \equiv \psi(x \pm \Delta x, t)$ e $k \equiv \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$. Fazendo algumas manipulações algébricas, temos

$$\psi_{x,t+1} = k(\psi_{x-1,t} + \psi_{x+1,t}) + 2\psi_{x,t}(1 - k) - \psi_{x,t-1}. \tag{5}$$

A Eq.(5) representa a solução numérica da equação de onda obtida de forma bastante simples, visto que estamos assumindo que a propagação da onda ocorrerá em apenas um meio. É importante destacar que, se levarmos em conta a transmissão de uma onda entre meios distintos, podemos obter a solução numérica para este caso utilizando técnicas de integração entre meios distintos para tratar a descontinuidade entre os dois meios. Para baixas velocidades $v \ll c$, isto é, por exemplo, a velocidade do som $v = 343 \text{ m/s}$, teremos o comportamento de uma onda mecânica se propagando em um meio que pode ser o ar. Para altas velocidades, $v = c$ onde c é a velocidade da luz no vácuo, teremos o comportamento de uma onda eletromagnética se propagando com velocidade constante. A Eq.(5) é uma equação progressiva no tempo, onde podemos calcular a função de onda $\psi_{x,t}$ em função da condição inicial $\psi_{x,o}$ e de sua derivada inicial $\dot{\psi}_{x,o}$. Usando a série de Taylor [4], podemos determinar a função de onda num instante t , sendo

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \Delta t) &= \psi(x, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) + \Theta(\Delta t^2), \end{aligned}$$

onde $\Theta(\Delta t^2)$ representa a ordem do erro de truncamento da série de Taylor. Como estamos querendo avaliar a onda num instante $t = 0$, temos que $\dot{\psi}(x, 0) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, 0)$ e que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, 0) = v^2 \nabla^2 \psi(x, 0)$. Substituindo essas relações na equação acima, vem

$$\psi_{x,1} = \psi_{x,o}(1 - k) + \Delta t \dot{\psi}_{x,o} + \frac{k}{2}(\psi_{x-1,o} + \psi_{x+1,o}). \quad (6)$$

Por ser um método explícito [5], o método é estável desde que satisfaça a seguinte condição de estabilidade,

$$\frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (7)$$

isso implica dizer que, dependendo da velocidade de propagação da onda, as relações entre os intervalos espaciais Δx e temporais Δt , serão diferentes de modo a satisfazer esta condição. Isso pode ser observado para análise de ondas eletromagnéticas, devido à velocidade da luz ser bastante significativa. A solução numérica será estável desde de que os erros ou perturbações na solução não cresçam de forma significativa, isto é, não se acumulem a ponto de a solução numérica divergir, comprometendo assim sua solução. Note que a solução numérica deste método é marchante, isto quer dizer que erros em instante de tempos anteriores podem ser acumulados com o passar do tempo. Se esses erros forem significativos, a solução numérica irá se afastar da solução analítica. Desta forma, a estabilidade do método está diretamente relacionada com o crescimento/diminuição dos erros introduzidos nos cálculos. Outro fator importante é que quando lidamos com métodos de diferenças finitas, associamos a precisão e acurácia do método com o tamanho da malha. Logo, se a malha for muito pequena, mais preciso é o método. Nesta solução, levamos também em conta a condição de estabilidade, isto é, a relação entre a velocidade de propagação e as malhas espaciais e temporais.

É importante destacar que uma vez definido as condições iniciais do problema, a solução numérica irá evoluir rapidamente para a solução do problema. Para validar o método proposto iremos comparar a solução numérica com soluções analíticas de referência. Para análise de propagação de onda, devemos levar em conta que como a velocidade da onda é constante, sua localização é dada por $x(t) = x_o + vt$.

3. Análise de Resultados

Apresentaremos os resultados obtidos pela solução numérica e compararemos com os resultados obtidos por soluções analíticas para validar a metodologia implementada neste artigo.

A solução da equação de onda para uma corda vibrando, pode ser obtida usando o Método de Separação de Variáveis [6], tal que $\psi(x, t) = \phi(x)T(t)$. Substituindo essa relação na Eq.(4) resulta que

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right], \quad (8)$$

onde os coeficientes A_n e B_n são obtidos impondo condições iniciais para a função de onda, bem como, para sua derivada, tal que

$$A_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \dot{\psi}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

onde L é o comprimento da corda. Para validar assumiremos que

$$\psi(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

$$\dot{\psi}(x, 0) = 0.$$

A solução dada pela Eq.(8) pode ser reescrita da seguinte forma³

$$\psi(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi vt}{L}\right), \quad (9)$$

A Tab. 1 mostra a comparação dos resultados obtidos pela solução analítica, dada pela Eq.(9) com a solução numérica, dada pela Eq.(5) para as seguintes condições: $L = 1 \text{ m}$, $v = 1 \text{ m/s}$ e $t = 0.5 \text{ s}$.

É importante observar que os resultados são precisos e acurados, pois os erros relativos percentuais ficam em torno de 0.15%, com erro máximo de aproximadamente 1%. Estamos considerando uma malha de discretização de 0.1 m que é bem grande. O objetivo é mostrar que os métodos numéricos podem ser utilizados para resolver diferentes tipos de problemas, com uma implementação bastante simples, de modo que, qualquer aluno interessado em programação e cálculo numérico possa implementar esse código usando uma linguagem de programação de sua preferência. Este programa foi desenvolvido usando a plataforma Visual Studio com compilador da Intel para o Fortran 90. No Apêndice, adicionamos o algoritmo do programa usado neste artigo.

Para comprovar a acurácia da solução numérica, refinamos a malha espacial e mantemos a malha temporal, de modo que, $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ e $\Delta t = 0.05 \text{ s}$. Como a condição de estabilidade prever que a razão $\frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1$; logo, podemos definir a velocidade de propagação $v = 1 \text{ m/s}$ para satisfazer esta condição. Neste caso, as simulações

³É importante destacar que a Eq.(9) está de acordo com a Eq.(3). Para verificarmos, vamos fazer uso da seguinte propriedade trigonométrica, tal que, $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$.

Fazendo $a = \frac{\pi x}{L}$ e $b = \frac{\pi vt}{L}$, a função de onda pode ser reescrita como $\psi(x, t) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x + \pi vt}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x - \pi vt}{L}\right)$. A Eq.(9) representa o modo fundamental, isto é, $n = 1$. Sendo assim, o comprimento da corda é dado por $L = \frac{\lambda}{2}$. Fazendo uso das definições do vetor de onda κ , da frequência angular ω e da relação $\omega = \kappa v$, temos que, a função de onda é dada por $\psi(x, t) = \frac{1}{2} \sin(\kappa x + \omega t) + \frac{1}{2} \sin(\kappa x - \omega t)$.

Tabela 1: Comparação de resultados entre a solução numérica e analítica para $\psi(x, t)$

Tempo (s)	Função	$x = 0.2 \text{ m}$	$x = 0.4 \text{ m}$	$x = 0.6 \text{ m}$	$x = 0.8 \text{ m}$
0.0	$\psi_a(x, t)$	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
	$\psi_n(x, t)$	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.1	$\psi_a(x, t)$	0.5590	0.9045	0.9045	0.5590
	$\psi_n(x, t)$	0.5592	0.9048	0.9048	0.5592
0.2	$\psi_a(x, t)$	0.4755	0.7694	0.7694	0.4755
	$\psi_n(x, t)$	0.4762	0.7705	0.7705	0.4762
0.3	$\psi_a(x, t)$	0.3455	0.5590	0.5590	0.3455
	$\psi_n(x, t)$	0.3469	0.5613	0.5613	0.3469
0.4	$\psi_a(x, t)$	0.1816	0.2939	0.2939	0.1816
	$\psi_n(x, t)$	0.1838	0.2974	0.2974	0.1838

$\Delta x = 0.1 \text{ m}, \Delta t = 0.05 \text{ s}$
 $\psi_a(x, t)$ - Analítico $\psi_n(x, t)$ - Numérico

numéricas mostraram que os resultados numéricos são idênticos aos resultados analíticos apresentados na Tab. 1. Isso comprova que, com uma malha bastante refinada, a aproximação da derivada da função onda pelo método de diferenças finitas é válido. Em consoante, temos que a relação entre Δx , Δt e v atendem o critério da condição de estabilidade, impedindo que a solução numérica acumule erros de truncamento.

Apresentaremos alguns resultados obtidos pela solução numérica para função de onda, dada pela Eq.(5). A Fig. 2 mostra os resultados obtidos pela simulação numérica assumindo que $\psi_{x,o} = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ e $\dot{\psi}_{x,o} = 0$. As malhas espaciais e temporais são definidas, tais que, $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ e $\Delta t = 0.05 \text{ s}$, onde a velocidade de propagação $v = 1 \text{ m/s}$, o tamanho da região $L = 10 \text{ m}$ e o tempo de simulação $t = 15 \text{ s}$.

A Fig. 3 mostra os resultados obtidos pela simulação numérica assumindo que a função de onda e sua deriva inicial sejam, respectivamente, $\psi_{x,o} = x$ e $\dot{\psi}_{x,o} = 0$. As malhas espaciais e temporais são definidas, tais que, $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ e $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, onde a velocidade de propagação $v = 1 \text{ m/s}$, o tamanho da região $L = 10 \text{ m}$ e o tempo de simulação $t = 10 \text{ s}$.

Conforme mencionado anteriormente, a solução numérica dada pela Eq.(5) pode ser aplicado tanto para equação de onda mecânica e/ou eletromagnética. A principal diferença está na velocidade e no meio de propagação. A Fig. 4 mostra os resultados obtidos pela simulação numérica da propagação de um sinal/onda eletromagnética no vácuo. Neste caso, tomamos a velocidade de propagação $v = c$, o tamanho da região $L = 100 \text{ m}$ e o tempo de simulação $t = 10^{-6} \text{ s}$. As malhas espaciais e temporais são definidas, tais que, $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ e $\Delta t = 10^{-10} \text{ s}$. As condições iniciais são tais que

$$\psi_{x,o} = \begin{cases} x\Delta x & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 5\Delta x & , \quad 5 \leq x \leq 10 \\ (15 - x)\Delta x & , \quad 11 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

$$\dot{\psi}_{x,o} = \begin{cases} x^2\Delta x & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 25\Delta x & , \quad 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

As notações de tempo apresentada nos gráficos são da seguinte forma, $t = 1E - 8s = 1.0 \times 10^{-8} \text{ s}$.

Como a onda se move com alta velocidade, ajustamos as malhas espaciais e temporais para satisfazerem a condição de estabilidade. Note que os intervalos de tempo são bastante curtos, pois em 1 s este sinal/onda percorre uma distância de 300 mil km . Logo, guardar todos esses

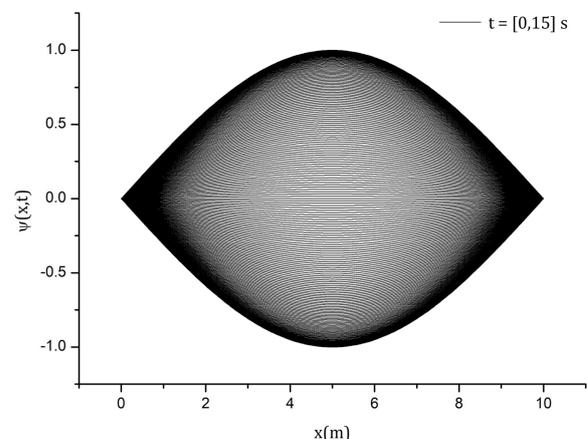
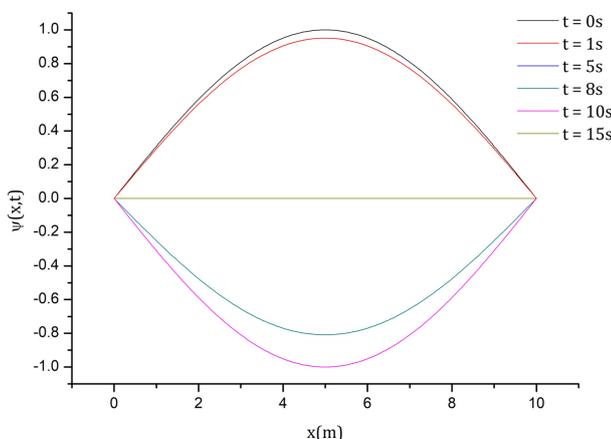


Figura 2: Solução numérica da equação de onda mecânica e estacionária para alguns instantes de tempo para função de onda inicial trigonométrica.

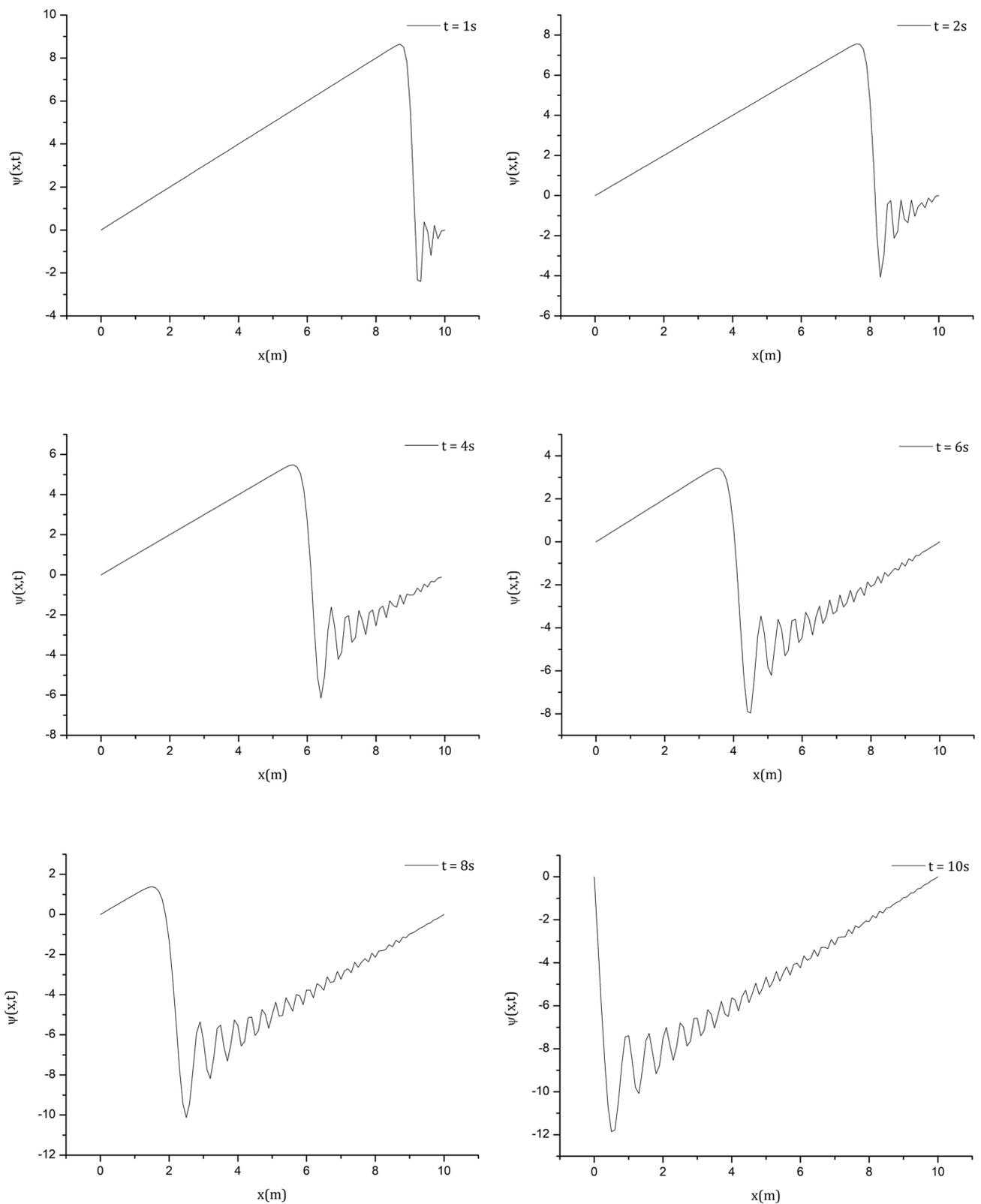


Figura 3: Solução numérica da equação de onda mecânica e estacionária para alguns instantes de tempo para função de onda inicial linear.

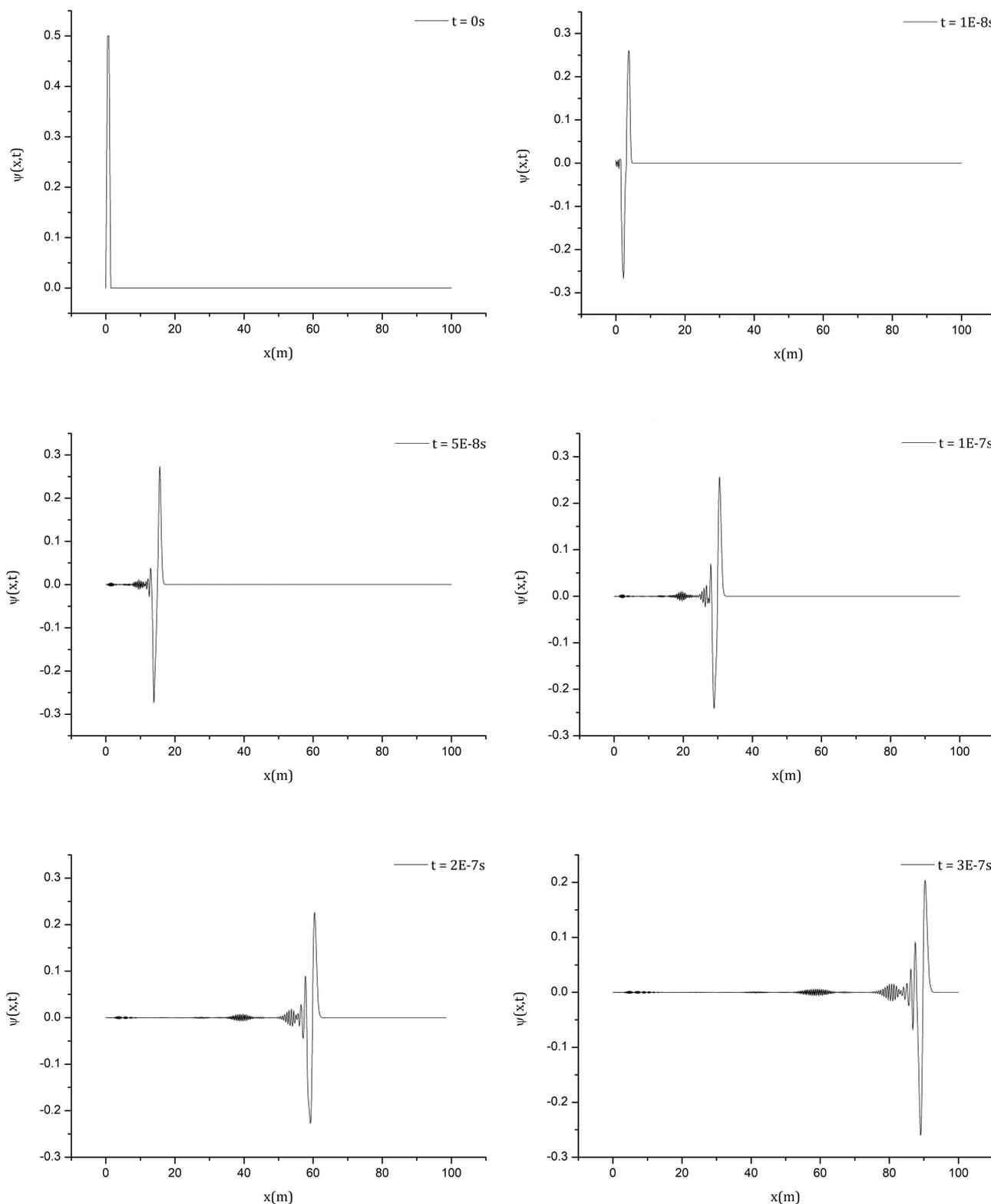


Figura 4: Solução numérica da equação de onda eletromagnética se propagando no tempo.

dados em arquivos se torna inviável. É importante que o leitor compreenda essas escalas de tempo e espaço para que a simulação possa ser realizada. O gráfico ilustra de forma clara essas relações.

4. Conclusões

Sabemos que aplicação e compreensão de ondas mecânicas e eletromagnéticas é de vital importância para o desenvolvimento científico e tecnológico; por isso, estudos

voltados à análise desses fenômenos é de extrema importância. Neste sentido, buscamos apresentar uma solução numérica que visa descrever o fenômeno físico com uma abordagem bastante simples e precisa. As vantagens em utilizar soluções numéricas foram discutidas ao longo deste artigo, visando mostrar ao leitor sob quais aspectos é viável utilizar soluções numéricas em confronto com as soluções analíticas, que nem sempre é possível obtê-las. No entanto, é sempre possível obter uma solução numérica, permitindo assim, contornar o problema. Uma outra vantagem é que sempre é possível simplificar o problema proposto sem a necessidade de reescrever o código desenvolvido para o caso geral.

A solução numérica apresentada neste artigo pode ser aplicada tanto para ondas mecânicas, bem como, ondas eletromagnéticas. Isso implica dizer que o código desenvolvido para ambos os casos é o mesmo. A abordagem deste artigo visa mostrar de forma simples a resolução do problema sob o ponto de vista de métodos numéricos, bem como, mostrar aos leitores a importância de validar sua solução numérica. Discutimos a importância de termos uma malha refinada para obtermos resultados mais precisos, assim como, atender os critérios de estabilidade do método proposto para que a solução numérica não se afaste de forma significativa da solução analítica/exata do problema.

Neste trabalho, utilizamos o método de diferenças finitas para discretizar as equações de onda mecânica e eletromagnética. A solução numérica desta equação, permite avaliar o comportamento dessas ondas sob diferentes aspectos e condições, isto é, se propagando no vácuo, bem como, vibrando ou se propagando em algum meio (ar, água, gás). Os resultados obtidos para a validação do método proposto foram bastante satisfatórios, permitindo assim aplicar esta metodologia de cálculo para avaliar o fenômeno físico.

Buscamos uma abordagem simples e precisa, pois o nosso principal objetivo é trazer uma física que seja acessível a todos os estudantes.

Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online: Apêndice.

Referências

- [1] A.C.B. Machado, V. Pleitez e M.C. Tijero, *Rev. Bras. Ensino Física* **28**, 407 (2006).
- [2] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física - Volume 2* (Editora LTC, São Paulo, 2016).
- [3] C. Scherer, *Métodos Computacionais da Física* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010).
- [4] S. Nakamura, *Computational Method in Engineering and Science* (John Wiley and Sons, Nova Jersey, 1977).
- [5] A.O. Fortuna, *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos* (Editora Edusp, São Paulo, 2000).
- [6] G.M. Ortigoza Capetillo, *Rev. Mexicana de Física* **53**, 56 (2007).