Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 415 - 421, (2005)
www.sbfisica.org.br

O potencial efetivo e sua expansão em "loop", interpretação e convexidade

(The effective potential and its loop expansion, its interpretation and its convexity)

Denimar Possa[1], Flávio Pereira e José Alexandre Nogueira

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil
Recebido em 19/5/2005; Aceito em 27/7/2005

Neste trabalho nós mostramos como obter o potencial efetivo a partir do funcional gerador das funções de Green da teoria e qual é sua interpretação. A convexidade do potencial efetivo também é provada.
Palavras-chave: potencial efetivo, expansão em "loop", densidade de energia do vácuo, convexidade do potencial efetivo.

In this work we have showed how the effective potential is obtained from the generating functional for the Green's functions of the theory and what is its interpretation. The convexity of the effective potential has been also proved.
Keywords: effective potential, loop expansion, vacuum energy density, convexity of the effective potential.

1. Introdução

O potencial efetivo é uma importante ferramenta para o estudo da quebra espontânea de simetria, determinação da energia do vácuo (energia de Casimir [1, 2]), na renormalização da massa e da constante de acoplamento, etc. Ele é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo daquele potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop (que coincide com uma expansão em potências de $\hbar$), de modo que ele é dado por uma soma do termo clássico com correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico. Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real e convexa. Entretanto, quando a teoria apresenta, a "tree level", quebra espontânea de simetria, uma ingênua aplicação da expansão em "loop" para a determinação do potencial efetivo, até a primeira ordem em $\hbar$, conduz a um resultado equivocado, isto é, uma função que **não** é o potencial efetivo. A fim de determinarmos o (verdadeiro ou correto) potencial efetivo, um emprego cuidadoso do procedimento usado para sua obtenção deve ser realizado. Nosso objetivo é mostrar como o (verdadeiro) potencial efetivo é obtido para uma teoria com quebra espontânea de simetria. Uma vez que o procedimento usual de determinação do potencial efetivo pode não ser de conhecimento de alguns leitores, optamos por escrever este primeiro artigo mostrando como determinar o potencial efetivo a partir do funcional gerador das funções de Green e demonstrando sua convexidade. Em um segundo artigo, mostramos como determinar o (verdadeiro) potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria usando os resultados deste primeiro artigo.

Uma teoria quântica de campos pode ser definida a partir do chamado *funcional gerador das funções de Green*, $Z[J]$, também conhecido como *amplitude de persistência do vácuo* sob a influência de fontes de campos externos, $J(x)$. Esta abordagem usa o conceito de integrais de trajetória, originalmente introduzido por Feynman, que mostrou que o formalismo de integrais de trajetórias podia ser visto como uma alternativa aos formalismos tradicionais de Heisenberg e Shcroedinger da mecânica quântica [3, 4]. O funcional gerador das funções de Green é a solução da equação de Dyson-Schwinger e pode ser escrito como uma expansão funcional das funções de Green de n-pontos. Através de uma transformação funcional de Legendre encontramos o funcional gerador das funções irredutíveis de uma partícula (1-PI)[2], $\Gamma[\phi_c]$, que é, então, expandido em potências de $\hbar$. Tal funcional é chamado de *ação efetiva*, pois ele contém, além da ação clássica, todas as correções quânticas. Uma expansão alternativa do

[1]E-mail: nogueira@cce.ufes.br.
[2]Diagramas de Feynman que não podem ser divididos em dois cortando-se apenas linhas internas.

funcional gerador 1-PI em potências das derivadas do campo clássico, $\phi_c(x)$, nos fornece o potencial efetivo com o qual podemos obter o vácuo da teoria. Tal como a ação efetiva, o potencial efetivo contém, além do potencial clássico, todas as correções quânticas.

O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção 2 é mostrado como obter o potencial efetivo como uma expansão em ordens de $\hbar$ a partir do funcional gerador das funções de Green; na seção 3 é dada a interpretação do potencial efetivo e na seção 4 a convexidade do potencial efetivo é demonstrada. Os cálculos efetuados são realizados no espaço-tempo euclidiano e não são usados sub-índices na notação para indicar este fato.

2. Expansão em loop para o potencial efetivo

O potencial efetivo pode ser obtido por métodos funcionais, usando-se o formalismo de integrais de trajetórias [5 - 16].

O funcional gerador das funções de Green conexas $W[J]$ é dado por[3]

$$Z[J] = \exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \frac{\langle 0^+|0^-\rangle_J}{\langle 0^+|0^-\rangle}, \qquad (1)$$

onde $\langle 0^+|0^-\rangle_J$ é a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa $J(x)$ e $Z[J]$ é o funcional gerador das funções de Green (conexas e desconexas). No formalismo de integrais de trajetória, a expressão acima é representada por

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \mathcal{N}\int D\phi \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x)\right]\right\}, \qquad (2)$$

onde

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + V(\phi(x))\right\}, \qquad (3)$$

é a ação clássica, $\mathcal{N}$ é um fator de normalização, e $\mathcal{D}\phi$ formalmente indica integração sobre um espaço de funções dos campos $\phi(x)$ de dimensão infinita, isto é, a medida de volume funcional.

O campo clássico $\phi_c(x)$ é definido como o valor esperado do vácuo na presença de uma fonte externa $J(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+|\hat{\phi}|0^-\rangle_J}{\langle 0^+|0^-\rangle_J}. \qquad (4)$$

O vácuo quântico pode ser obtido tomando-se o limite $J \longrightarrow 0$ na Eq. (4), sendo que este pode ser diferente do vácuo clássico.

O funcional gerador das funções de Green 1-PI (irredutíveis de uma partícula) é um funcional de $\phi_c(x)$, e não de $J(x)$, e pode ser obtido a partir de uma transformada funcional de Legendre como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x), \qquad (5)$$

de forma que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(x). \qquad (6)$$

Quando $J(x) \longrightarrow 0$, $\phi_c(x)$ torna-se uma constante, devido à invariância translacional do vácuo, dada por $\langle\phi\rangle$, de modo que $\langle\phi\rangle$ é a solução da equação

$$\left.\frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c}\right|_{\langle\phi\rangle} = 0. \qquad (7)$$

Note que o vácuo quântico $< \phi >$ é ponto estacionário de Γ, o que sugere o nome ação efetiva para este funcional. Ainda pode-se mostrar que, no limite $\hbar \to 0$, $\Gamma[\phi_c]$ torna-se a ação clássica. A ação efetiva Γ gera as funções de Green 1-PI, também conhecidas como funções vértice de n-pontos, $\Gamma^{(n)}(x_1, ..., x_n)$, e pode ser escrita em termos da seguinte expansão funcional

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1...d^4x_n\Gamma^n(x_1, ..., x_n) \phi_c(x_1)...\phi_c(x_n). \qquad (8)$$

A expressão (8) é não local. Para dar uma aparência "quase-local" a $\Gamma[\phi_c]$ pode-se expandir cada campo $\phi_c(x_i), i \neq 1$, em torno do ponto x_1 comum a cada integrando, obtendo-se

$$\phi_c(x_i) = \phi_c(x_1) + (x_i - x_1)^\mu\partial_\mu\phi_c(x_1) + \frac{1}{2}(x_i - x_1)^\mu(x_i - x_1)^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi_c(x_1) + ... \qquad (9)$$

Integrando sobre $x_{i\neq 1}$ e colocando os termos de derivadas de ϕ_c em potências crescentes, pode-se escrever a ação efetiva na forma

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x \left[-U + \frac{1}{2}A\partial_\mu\phi_c(x)\partial^\mu\phi_c(x) + ...\right], \qquad (10)$$

onde os coeficientes U e A são funções de $\phi_c(x)$.

No caso em que o campo clássico é uniforme, isto é, $\phi_c(x) = \phi_c$ (uma constante), todos os termos na expansão (10) se anulam, exceto o primeiro, de maneira que

$$\Gamma[\phi_c] = -\Omega U(\phi_c) = -\Omega V_{ef}(\phi_c), \qquad (11)$$

[3] Nós usamos $\hbar = c = 1$, contudo, mantemos $\hbar$ para marcar as correções quânticas.

onde Ω é o volume do espaço-tempo euclidiano[4]. Desta forma a função[5] $U(\phi_c)$ é a generalização quântica do potencial clássico e é denominada potencial efetivo V_{ef}.

A expansão em "loop" até primeira ordem em $\hbar$ para $W[J]$ pode ser obtida da Eq. (2), através do método do ponto de sela. Definindo

$$S[\phi, J] = S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x), \tag{12}$$

o ponto de sela ϕ_0 é aquele em que $S[\phi, J]$ é estacionária, isto é,

$$\left.\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} = 0. \tag{13}$$

Isto significa que $\phi_0(x)$ é uma função de x e também um funcional de $J(x)$.

Expandindo-se $S[\phi, J]$ em torno de ϕ_0, obtém-se

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \int d^4x[\phi(x) - \phi_0(x)] \left.\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_0} + \frac{1}{2}\int d^4x d^4y[\phi(x) - \phi_0(x)] \left.\frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + ... \tag{14}$$

Usando a Eq. (13), a Eq. (14) se torna

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2}\int d^4x d^4y[\phi(x) - \phi_0(x)] \left.\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + ... \tag{15}$$

A derivação funcional da ação S determina o operador

$$m(x, y) = \left.\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi_0} = [-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\delta(x-y). \tag{16}$$

Substituindo $\eta(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$, a Eq. (15) se torna

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2}\int d^4x\eta(x)[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\eta(x) + ... \tag{17}$$

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (2), e desprezando os termos de maior ordem, obtém-se

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[\phi_0, J]\right\} \int(D\eta)\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int d^4x\eta[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\eta\right\}. \tag{18}$$

A integral gaussiana resultante pode ser formalmente realizada com o uso da fórmula

$$\int(D\eta)\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int d^4x\eta(x)A\eta(x)\right\} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Assim, a Eq. (18) se torna

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[\phi_0, J]\right\} \left[\det\left[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)\right]\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Desta forma o funcional gerador das funções de Green conexas fica dado por

$$W[J] = -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2}\ln[\det(A)] + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{21}$$

Não é difícil mostrar que os termos desprezados na Eq. (17) são de $\mathcal{O}(\hbar^2)$, basta reescalonar o campo $\phi = \hbar^{\frac{1}{2}}\phi$.

Para encontrar a expansão em "loop" de $\Gamma[\phi_c]$, substitui-se o resultado da Eq. (21) na Eq. (5), de modo que

$$\Gamma[\phi_c] = -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2}\ln\det[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)] - \int d^4x J(x)\phi_c(x). \tag{22}$$

Substituindo o resultado da Eq. (21) na Eq. (4), tem-se

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \mathcal{O}(\hbar). \tag{23}$$

O resultado acima mostra que $\phi_c(x)$ é igual a $\phi_0(x)$ em $\mathcal{O}(\hbar^0)$. Portanto, pode-se escrever $\phi_c(x)$ da seguinte forma

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \hbar\phi_1(x) + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{24}$$

Com a expansão (24) para $\phi_c(x)$ pode-se relacionar $S[\phi_c]$ com $S[\phi_0]$ através de

$$S[\phi_c] = S[\phi_0 + \hbar\phi_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)],$$

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar\int \phi_1(x) \left.\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi}\right|_{\phi_0} d^4x + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{25}$$

[4]Note que, quando $\phi_c(x)$ é uniforme, $J(x)$ também é uniforme e que para cada valor de J constante existe um correspondente valor constante de ϕ_c.

[5]Note que agora $U(\phi_c)$ é uma função ordinária da variável ϕ_c.

Usando as Eqs. (12) e (13), obtém-se

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar \int \phi_1(x) J(x) d^4x + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (26)$$

Substituindo o resultado da Eq. (26) na Eq. (22), tem-se

$$\Gamma[\phi_c] = -S[\phi_c] - \frac{\hbar}{2} \ln \det[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_c)]. \quad (27)$$

Tomando o limite $J \to 0$, $\phi_c(x)$ torna-se uma constante ϕ_c, e usando a Eq. (10), obtém-se

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \det[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_c)]. \quad (28)$$

Usando-se a relação

$$\ln \det[m(x,y)] = tr \ln[m(x,y)], \quad (29)$$

no resultado (28), obtém-se

$$V_{ef}(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln\left[k^2 + V''(\phi_c)\right], \quad (30)$$

onde k é o quadri-momento.

Como pode ser visto a integral da equação acima é claramente divergente e, portanto, é necessário um procedimento de regularização para isolar as divergências. Um procedimento de regularização comumente usado é o de *Cut-off*. Tal procedimento conduz ao aparecimento de pólos que devem ser eliminados pela prescrição de renormalização (absorvidos nos parâmetros livres da teoria). Entretanto, a determinação do potencial efetivo usando o método da função zeta é mais vantajoso, pois conduz a um resultado finito, sem a aparente necessidade de subtração de qualquer pólo ou a adição de contra-termos. A própria continuação analítica realizada para restabelecimento da teoria original é a prescrição de renormalização que elimina os pólos [17].

A função zeta generalizada associada ao operador real, elíptico e auto-adjunto $M = \frac{m}{\mu^2}$, é definida a partir dos autovalores $\{\lambda_i\}$ de m através da relação

$$\zeta_M(s) = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu^2}\right)^{-s}, \quad (31)$$

onde μ é um parâmetro de escala com dimensão de massa, introduzido para que a função zeta seja adimensional para todo s. Com o uso da relação

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M}{ds}(0) = -\zeta_m(0) \ln \mu^2 - \frac{d\zeta_m}{ds}(0), \quad (32)$$

o potencial efetivo pode ser expresso, em $\mathcal{O}(\hbar)$, como

$$V_{ef}(\phi_c) = V(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega}\left(\frac{d\zeta_m}{ds}(0) + \zeta_m(0)\ln \mu^2\right). \quad (33)$$

O interessante no uso da função zeta é que a expressão (33) é finita, e não ocorre a necessidade de subtração de pólos nem a adição de contratermos infinitos, como já havia-se dito. Contudo, uma renormalização finita é necessária para que ocorra o ajuste dos parâmetros livres da teoria aos valores observados. Isto é feito através das condições de renormalização

$$\left.\frac{d^2V_{ef}}{d\phi_c^2}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = m_R^2 \quad (34)$$

e

$$\left.\frac{d^4V_{ef}}{d\phi_c^4}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = \lambda_R. \quad (35)$$

3. A interpretação do potencial efetivo

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados $\{\phi\}$, minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano $\hat{H}$. Assim,

$$V_{EF}(\phi_c) = MIN_{\{\phi\}}\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle, \quad (36)$$

tal que ϕ_c seja o valor esperado do operador de campo $\hat{\phi}$ calculado neste estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle\phi|\hat{\phi}|\phi\rangle. \quad (37)$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [18, 19].

Agora, deseja-se mostrar que $V_{ef}(\phi_c)$ obtido da Eq. (11) é o potencial efetivo como definido rigorosamente acima [7].

De início, seja $\hat{H}$ o operador hamiltoniano de um sistema quântico. O estado $|\phi_a\rangle$ que minimiza $\langle\phi_a|\hat{H}|\phi_a\rangle$ e sujeito ao vínculo $\langle\phi_a|\hat{A}|\phi_a\rangle = \bar{a}$, para algum operador $\hat{A}$ hermitiano, pode ser obtido, introduzindo-se os multiplicadores de Lagrange E e J, de

$$\delta\langle\phi_a|\hat{H} - J\hat{A} - E|\phi_a\rangle = 0. \quad (38)$$

Isto implica que

$$(\hat{H} - J\hat{A} - E)|\phi_a\rangle = 0. \quad (39)$$

Assim,

$$\hat{H}_J|\phi_a(J)\rangle = (\hat{H} - J\hat{A})|\phi_a\rangle = E(J)|\phi_a(J)\rangle, \quad (40)$$

e $\hat{H}_J$ é a hamiltoniana perturbada pela fonte J e $|\phi_a(J)\rangle$ é auto-estado de $\hat{H}_J$ com auto-valor $E(J)$. Note que $|\phi_a(J)\rangle$ significa que o estado $|\phi_a\rangle$ é função de J. Uma vez que $\hat{H}$ não é função de J, temos que

$$\bar{a} = -\frac{\partial E(J)}{\partial J}, \quad (41)$$

e desta forma,

$$\langle\phi_a(J)|\hat{H}|\phi_a(J)\rangle = E(J) - J\frac{\partial E(J)}{\partial J}. \quad (42)$$

Considere, agora, que o estado de vácuo de um sistema quântico de campos, no interior de um volume V_{ol}, seja adiabaticamente perturbado pela presença de uma fonte uniforme (isto é, não dependente de x), que permanece por um intervalo de tempo τ. O estado de vácuo, então, evolui adquirindo um fator de fase que permanece mesmo após a fonte ser removida. Portanto,

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E(J)\tau\right\}. \tag{43}$$

Note que se não existisse a presença da fonte, os estados $|0^-\rangle$ e $|0^+\rangle$ seriam fisicamente indistinguíveis e, portanto,

$$\langle 0^+|0^-\rangle = 1, \tag{44}$$

para estados normalizados.

O resultado da Eq. (43) foi obtido no espaço-tempo de Minkowski. Assim, realizando-se uma rotação de Wick [6-10, 14], tem-se

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon(J)\Omega\right\}. \tag{45}$$

Comparando o resultado acima com a Eq. (1), obtém-se

$$W[J] = -\varepsilon(J)\Omega. \tag{46}$$

Portanto, $W[J]$ é identificado com a energia na presença da fonte J.

O resultado da Eq. (46) mostra que a transformada funcional de Legendre, Eq. (5), é a generalização quântica de campos da Eq. (42) e que $V_{ef}(\phi_c)$ assim obtido é o potencial efetivo $V_{EF}(\phi_c)$.

Quando a fonte é uniforme, $\phi_c(x)$ também é uniforme, ϕ_c, e a Eq. (5) fica dada por

$$V_{ef}(\phi_c) = \varepsilon(J) + J\phi_c. \tag{47}$$

Desta forma, $V_{ef}(\phi_c)$ á densidade de energia do sistema independente da fonte.

4. Convexidade do potencial efetivo

O funcional gerador das funções de Green conexas no espaço-tempo euclidiano está relacionado à energia do sistema perturbado pela fonte, como já vimos, através de

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[J]} = e^{-\frac{1}{\hbar}E(J)\tau}, \tag{48}$$

onde $E(J)\tau = \Omega\varepsilon(J)$, sendo $\varepsilon(J)$ a densidade de energia. Assim, das Eqs. (2) e (48), tem-se que

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon\Omega\right\} = \int (\mathcal{D}\phi)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - \int J(x)\phi(x)d^4x\right]\right\}. \tag{49}$$

Considerando uma fonte uniforme J na Eq. (49), tem-se

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon\Omega\right\} = \int (\mathcal{D}\phi)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - J\int \phi(x)d^4x\right]\right\}. \tag{50}$$

Da Eq. (47), obtém-se

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial J} = -\phi_c \tag{51}$$

e

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial\phi_c} = J. \tag{52}$$

A diferenciação da Eq. (50) com relação a J resulta em

$$-\frac{\Omega}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial J}e^{\frac{W[J]}{\hbar}} = \int (\mathcal{D}\phi)\left[\frac{1}{\hbar}\int d^4x\phi(x)\right] \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - J\int d^4x\phi(x)\right]\right\}, \tag{53}$$

e a derivada segunda é dada por

$$-\frac{\Omega}{\hbar}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial J^2}e^{\frac{W[J]}{\hbar}} + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial J}\right)^2 e^{\frac{W[J]}{\hbar}} = \int (\mathcal{D}\phi)\left[\frac{1}{\hbar}\int d^4x\phi(x)\right]^2 \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - J\int d^4x\phi(x)\right]\right\}. \tag{54}$$

Substituindo a Eq. (53) na Eq. (54), esta última se torna

$$-\frac{\Omega}{\hbar}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial J^2} = \frac{1}{e^{\frac{W[J]}{\hbar}}}\int \mathcal{D}\phi\left[\frac{1}{\hbar}\int d^4x\phi(x)\right]^2 e^{-\frac{S[\phi,J]}{\hbar}} + -\left[\frac{1}{e^{\frac{W[J]}{\hbar}}}\int \mathcal{D}\phi\left[\frac{1}{\hbar}\int d^4x\phi(x)\right]e^{-\frac{S[\phi,J]}{\hbar}}\right]^2. \tag{55}$$

Sendo o valor médio esperado dado por

$$\langle F[\phi]\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi]e^{-\frac{S[\phi,J]}{\hbar}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S[\phi,J]}{\hbar}}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi]e^{-\frac{S[\phi,J]}{\hbar}}}{e^{\frac{W[J]}{\hbar}}}, \tag{56}$$

a Eq. (55) pode ser expressa como

$$-\hbar\Omega\frac{\partial^2\varepsilon(J)}{\partial J^2} = \left\langle\left[\int d^4x\phi(x)\right]^2\right\rangle - \left\langle\left[\int d^4x\phi(x)\right]\right\rangle^2. \tag{57}$$

Uma vez que

$$\langle F^2\rangle \geq \langle F\rangle^2 \tag{58}$$

e

$$\langle F^2 \rangle \geq 0, \tag{59}$$

para qualquer F real, a Eq. (57) implica em

$$-\hbar\Omega \frac{\partial^2 \varepsilon(J)}{\partial J^2} \geq 0, \tag{60}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(J)}{\partial J^2} \leq 0. \tag{61}$$

O resultado da Eq. (61) mostra que ε é uma função côncava de J. Da Eq. (46) resulta que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \geq 0, \tag{62}$$

ou seja, $W[J]$ é convexo.

Agora, usando as Eqs. (51) e (52), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial j} \tag{63}$$

e

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2} = \frac{\partial J}{\partial \phi_c}. \tag{64}$$

Destas últimas duas equações segue que

$$\left(\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2}\right) = -1. \tag{65}$$

Da Eq. (61) conclui-se que

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2}(\phi_c) \geq 0, \tag{66}$$

e, portanto, o potencial efetivo é uma função convexa.

A demonstração acima é fortemente baseada na Ref. [7]. Uma demonstração menos rigorosa da convexidade do potencial efetivo pode ser feita [20, 21].

O propagador, ou a função de Green conexa de dois pontos, é obtido de

$$G(x,y) = \Delta(x,y) = \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right|_{J=0}. \tag{67}$$

Usando a Eq. (4) na Eq. (67), tem-se

$$\Delta(x,y) = \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta J(y)}. \tag{68}$$

A função vértice de dois pontos é obtida de

$$\Gamma(x,y) = \Pi(x,y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(y)}. \tag{69}$$

Usando a Eq. (6) na Eq. (69), tem-se

$$\Pi(x,y) = -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi_c(y)}. \tag{70}$$

Usando as Eqs. (68) e (70), tem-se

$$\int G(x,z)\Gamma(z,y)dz = -\int \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta \phi_c(y)}dz = -\delta(x-y). \tag{71}$$

O resultado acima mostra que Δ e Π são um o inverso do outro.

No caso em que J e ϕ_c são uniformes, pode-se escrever

$$\Delta = \frac{d^2 W(J)}{dJ^2} = \frac{d\phi_c(J)}{dJ}, \tag{72}$$

e

$$\Pi = \frac{d^2 \Gamma(\phi_c)}{d\phi_c^2} = \frac{dJ(\phi_c)}{d\phi_c}. \tag{73}$$

Desta forma,

$$\Pi = -\Delta^{-1}. \tag{74}$$

Se não existem táchions na teoria,

$$\Delta^{-1} = M_R^2 \geq 0, \tag{75}$$

onde M_R é a massa renormalizada. Assim,

$$\frac{d^2 W}{dJ^2} \geq 0. \tag{76}$$

Portanto, $W[J]$ é convexa.

Da Eq. (74), tem-se que

$$\frac{d^2\Gamma}{d\phi_c^2} = -\Omega \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} = -\Delta^{-1}, \tag{77}$$

$$\frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} = \Delta^{-1} \geq 0. \tag{78}$$

Portanto, $V_{ef}(\phi_c)$ é uma função convexa de ϕ_c.

Referências

[1] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **22**, 122 (2000).

[2] J.J.P. Sobrinho e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, 401 (2001).

[3] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).

[4] M. Nussenzveig, *Integrais de Trajetória*, curso ministrado na I Escola de Verão de Partículas e Campos.

[5] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975).

[6] P. Ramond, *Field Theory A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).

[7] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[8] K. Huang, *Quarks Leptons & Gauge Fields* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).

[9] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[10] J.V. Narlikar and T. Padmanabhan, *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).

[11] R. Jackiw, Phys. Rev. **D 9**, 1686 (1974).

[12] Ashok Das, *Field Theory a Path Integral Approach* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993).

[13] L.V. Belvedere, *Integrais de Trajetórias*, apostila da Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física.

[14] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlarg, Berlin, 1996).

[15] L.S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[16] S.Y. Lee and A.M. Sciaccaluga, Nucl. Phys. **B 96**, 435 (1975).

[17] J.A. Nogueira e A. Maia Jr., Rev. Bras. Ens. Fís. **24**, 306 (2002).

[18] T.L. Curtright and C.B. Thorn, J. Math. Phys. **25**, 541 (1984).

[19] K. Cahill, Phys. Rev. **D 52**, 4704 (1995).

[20] P.H. Frampton, *Gauge Field Theories* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, Menlo Park, California, 1987).

[21] R.W. Haymaker and J. Perez-Mercader, Rev. **D 27**, 4704 (1983).