



# Revisitando o velho problema do trem relativístico que entra (ou não) em uma garagem

Revisiting the old problem of the relativistic train that enters (or not) in a garage

Fabiana Botelho Kneubil<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Educacional Futuro da Ciência, São Paulo, SP, Brasil.

Recebido em 09 de junho de 2022. Revisado em 20 de setembro de 2022. Aceito em 25 de setembro de 2022.

Este texto discute alguns conceitos da teoria da relatividade restrita, em uma situação bastante conhecida, como a de um trem em movimento entrar em uma garagem menor que seu comprimento em repouso. No contexto da relatividade, sabe-se que existe a contração do espaço, no entanto, quando mudamos de referencial e consideramos um observador no trem, a garagem é que se movimenta e também sofre uma contração, surgindo um aparente paradoxo. A questão é apresentada sob a perspectiva de eventos e tratada com as transformações de Lorentz em dois referenciais diferentes, o que permite detalhar a solução do problema e mostrar que o paradoxo não existe, enaltecendo a consistência da teoria da relatividade. Com isso, exploramos uma série de nuances, normalmente ausentes numa abordagem tradicional, tais como medição do comprimento de corpos em movimento, simultaneidade, inversão de eventos e elementos do cone de luz.

**Palavras-chave:** Relatividade especial, transformações de Lorentz, contração do espaço, causalidade, eventos.

This text discusses some concepts of the special theory of relativity, in a well-known situation, such as a moving train entering in a garage smaller than its length at rest. In the context of relativity, it is known that there is a length contraction, however, when changing the reference frame and considering the observer on the train, the garage moves and also suffers a contraction, resulting in an apparent paradox. The question is presented from the perspective of events and treated with Lorentz transformations in two different frames of reference, which allows a more detailed solution of the problem and shows that the paradox does not exist, highlighting the consistency of the theory of relativity. This way, one explores a series of nuances about relativity, normally absent in a traditional approach, such as measuring the length of moving bodies, simultaneity, inversion of events and elements of the light cone.

**Keywords:** Special relativity, Lorentz transformations, Length contraction, causality, events.

## 1. Introdução

Em 1905, Einstein publicou um artigo de 30 páginas na revista alemã *Annalen der Physik*, intitulado *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, no qual ele apresenta a teoria da relatividade restrita e discute algumas das suas consequências, principalmente, as relacionadas ao espaço e ao tempo. Einstein dedica algumas seções do seu artigo, apresentando questões importantes como a simultaneidade, a relatividade nas medidas do comprimento e do tempo e um conjunto de equações que transformam as coordenadas espaciais e o tempo de um sistema estacionário para outro em movimento uniforme.

A principal motivação deste artigo é resolver um problema de relatividade com uma abordagem que enfatiza as questões colocadas por Einstein em seu trabalho de 1905. As noções de que o espaço contrai e o tempo dilata aparecem com frequência nos ambientes de ensino, de divulgação científica e costumam ser acompanhadas das famosas fórmulas  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$  e

$L = L_0/\gamma$ . Durante a instrução formal, seja na escola básica, seja em cursos introdutórios nas licenciaturas, aprender relatividade parece, muitas vezes, ser a arte de saber onde colocar  $\gamma$  nessas expressões, multiplicando ou dividindo, dependendo do problema tratado. Nas provas de física, se o estudante for esperto o suficiente e souber que a resposta deve ser maior ou menor que o dado inicial, geralmente  $L_0$  ou  $t_0$ , ele coloca  $\gamma$  em cima ou embaixo da equação, sem mobilizar grandes conhecimentos ou um entendimento mais amplo que está por trás da teoria da relatividade. Em diversos livros-texto, adotados nos cursos de graduação ([1–3]), junto com essa abordagem, notamos também uma carência em discussões conceituais acerca das soluções numéricas dos problemas de relatividade.

O objetivo deste texto é revisar os conceitos da relatividade, discutindo um problema bastante conhecido, empregando a noção de *evento* e das relações entre eles, advindas das transformações de Lorentz. O problema em questão é o de um trem, cujo comprimento em repouso é maior do que o de uma garagem, poder entrar inteiramente no interior dela, de modo que a sua

\* Endereço de correspondência: [fkneubil@gmail.com](mailto:fkneubil@gmail.com)

porta seja fechada. No contexto da relatividade, sabemos que isto é possível devido à contração do comprimento do trem, para quem está em repouso na garagem. No entanto, ocorre um aparente paradoxo, na medida em que consideramos o observador no referencial do trem e não mais da garagem, pois para ele, a garagem também contrai. Apresentamos o problema em dois referenciais diferentes, algo que normalmente os livros-texto não fazem, e mostramos os enredos em cada um deles, que só podem ser entendidos com o uso dos eventos e das transformações de Lorentz (TL). A vantagem de usar as TL é que elas permitem seguir um passo-a-passo lógico e minucioso da solução desse paradoxo e evidenciam que ele, de fato, não existe, ressaltando a consistência da teoria.

Este problema também é conhecido como o problema da vara (ou escada) e do celeiro ([4–6]) e iniciamos o texto discorrendo, nas duas primeiras seções (2 e 3), sobre os eventos, as transformações de Lorentz e, principalmente, como medir comprimento de objetos em movimento na relatividade. Na sequência, seção 4, tratamos o problema com as TL e exploramos melhor as consequências da visão do mundo trazida pela teoria, que vão além da mera contração do espaço.

## 2. Eventos e as Transformações de Lorentz

Em problemas de geometria lidamos com posições de pontos no espaço, que podem ser medidas a partir de um referencial. O espaço em si não é mensurável, mas a posição de um ponto qualquer é. Por exemplo, a Fig. 1(a) mostra um lápis cuja ponta está no ponto P, descrito com o auxílio de um sistema de eixos, em três dimensões  $xyz$ .

A introdução da dimensão do tempo em um problema transforma a geometria em cinemática, que também envolve o uso de referenciais. Este fato já era conhecido na física clássica mas, nos primórdios da relatividade de Einstein, Minkowski ressaltou que o tempo era algo especialmente importante e que as diferentes observações

precisavam levar em conta o instante em que são feitas. Em 1908, ele afirmou que

*Os objetos da nossa percepção incluem invariavelmente lugares e tempos em combinação. Ninguém jamais percebeu um lugar a não ser em um tempo, ou um tempo a não ser em um lugar. ([7], p. 76)*

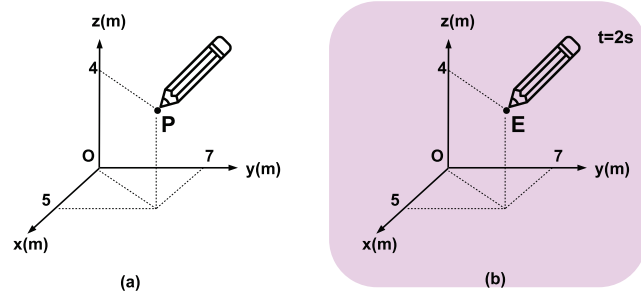
Isso levou a física definir *um evento* como *um acontecimento* que ocorre em *um único ponto* do espaço e em *um único instante*, como sugere a Fig. 1(b), que mostra o evento E, representando a ponta do lápis tocando o ponto P num instante  $t$ . A diferença fundamental entre as noções de ponto na geometria e de evento, na cinemática, é a presença do tempo. O evento tem quatro dimensões e é descrito com as coordenadas  $[x, y, z; t]$ . Tal como qualquer ponto na geometria, a descrição do evento depende do sistema de eixos, pois se este for mudado, os valores das coordenadas se alteram.

De modo geral, referenciais são instrumentos matemáticos, inventados para nos auxiliar a pensar os problemas físicos e não existem no mundo; são apenas ferramentas bastante úteis para descrevê-lo. Neste sentido, a descrição de qualquer evento envolve uma arbitrariedade e, portanto, é relativa. No entanto, o evento também tem um aspecto absoluto, que é a sua ocorrência. Se um fato ocorre em um referencial, ele deve ocorrer em todos os demais. Por isso, o tratamento de eventos na física precisa levar em consideração suas facetas absoluta e relativa, que são antagônicas e complementares.

A teoria da Relatividade Restrita de Einstein trata de situações que envolvem referenciais com movimento relativo uniforme. Neste caso, tal como os eventos, os fenômenos físicos também exibem facetas absolutas e relativas. O propósito da teoria é extrair leis físicas universais do emaranhado de informações, obtidas a partir de referenciais particulares. Essa ideia está incorporada no primeiro princípio da teoria, que determina que todos os referenciais são equivalentes do ponto de vista físico. Consequentemente, as leis físicas devem ser absolutas, pois não podem depender deles. Já o segundo princípio é mais operacional e afirma que o módulo  $c$  da velocidade da luz é o mesmo em todos os referenciais. É ele que estabelece a forma das transformações de Lorentz, necessárias para resolver problemas de cinemática relativística.

Passamos agora a apresentar as transformações de Lorentz que serão empregadas no problema da garagem. Para tanto, consideramos dois referenciais que se movem com velocidade relativa  $\vec{v}$  constante e os representamos com nome de pessoas, por exemplo, João, Maria, Pedro, Ana e etc.<sup>1</sup>

Um problema físico consiste em uma sucessão de eventos,  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , que em cada referencial são descritos



**Figura 1:** (a) descrição do ponto P na geometria:  $(x_P, y_P, z_P) = (5 \text{ m}, 7 \text{ m}, 4 \text{ m})$ ; (b) descrição do evento E na cinemática, onde a área colorida representa a presença do tempo neste referencial:  $(x_E, y_E, z_E; t_E) = (5 \text{ m}, 7 \text{ m}, 4 \text{ m}; 2 \text{ s})$ .

<sup>1</sup> Mesma atitude adotada por [8]. A razão pedagógica para não usarmos os tradicionais  $S$  e  $S'$ , presentes nos livros-texto, é que intuitivamente tendemos a atribuir  $S'$  ao referencial em movimento e nós, 'em repouso', ficamos em  $S$ . Esta postura carrega

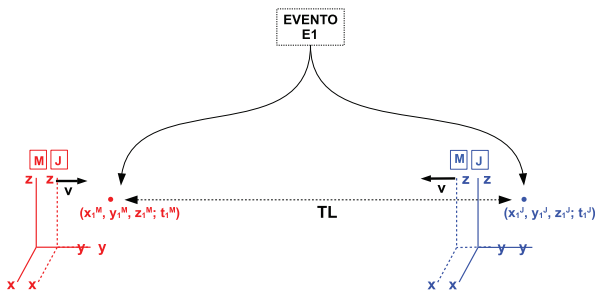


Figura 2: Descrição de um mesmo evento em dois referenciais.

por coordenadas diferentes. Assim, dois observadores, João e Maria, descrevem o *mesmo evento*  $E_1$  em seus referenciais por meio de coordenadas diferentes. Para enfatizar as duas descrições do mesmo evento, usamos a seguinte notação

$$\text{evento } E_1 \begin{cases} S^M : [x_1^M, y_1^M, z_1^M; t_1^M] \\ S^J : [x_1^J, y_1^J, z_1^J; t_1^J]. \end{cases}$$

Mostramos esta ideia na Fig. 2, onde o mesmo evento  $E_1$  é descrito em  $S^M$  e  $S^J$  pelo seu conjunto de coordenadas. Nesse texto usamos uma convenção para os referenciais, na qual  $S^J$  se desloca ao longo do eixo  $y$  com velocidade constante  $v$  para a direita em relação a  $S^M$  e,  $S^M$  se move com a mesma velocidade em módulo para a esquerda em relação a  $S^J$ .

Como a ocorrência do evento  $E_1$  é algo absoluto, suas descrições em referenciais diferentes estão relacionadas entre si pelas transformações de Lorentz (TL). A expressão das TL podem ser deduzidas a partir do princípio da invariância da velocidade da luz. Elas correspondem a um conjunto de equações lineares que associam as coordenadas do *mesmo* evento em dois referenciais diferentes:  $[x_1^M, y_1^M, z_1^M; t_1^M] \xrightarrow{TL} [x_1^J, y_1^J, z_1^J; t_1^J]$ . Por isso, se *conhecermos* as coordenadas de um dado evento em um referencial  $S^M$ , as TL permitem *calcular* as coordenadas desse evento em  $S^J$ . No caso simples onde os eixos  $xyz$  em  $S^M$  e  $S^J$  são paralelos e  $S^J$  se desloca para a direita com velocidade  $\vec{v} = v \hat{j}$ , as TL são dadas por

$$\begin{aligned} S^M \rightarrow S^J : \quad & S^J \rightarrow S^M : \\ x^J &= x^M & x^M &= x^J, \\ y^J &= \gamma(y^M - v t^M) & y^M &= \gamma(y^J + v t^J), \\ z^J &= z^M & z^M &= z^J, \\ t^J &= \gamma\left(t^M - \frac{v}{c^2} y^M\right) & t^M &= \gamma\left(t^J + \frac{v}{c^2} y^J\right), \end{aligned} \quad (1)$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2)$$

tacitamente a ideia de que o *meu* referencial  $S$  é diferente (ou melhor) do que o outro, atitude não condizente com o primeiro postulado da relatividade.

A principal diferença entre as TL de ida, de  $S^M$  para  $S^J$  e, de volta, de  $S^J$  para  $S^M$ , está no sinal da velocidade relativa, já que  $S^M$  se move para a esquerda em relação a  $S^J$  com velocidade  $\vec{v} = -v \hat{j}$ .

Nesse formato, estas equações incorporam uma convenção muito importante, também empregada por Einstein, a que afirma que as origens dos tempos nos dois referenciais são definidas pelo cruzamento das origens dos eixos espaciais  $xyz$ . Num problema com vários eventos é conveniente escolher um deles como origem dos tempo e dos espaços nos dois referenciais e determinar os demais em relação a ele.<sup>2</sup> Por esse motivo, ele é chamado de evento de referência  $E_R$ , descrito, por convenção, como

$$\text{evento } E_R \begin{cases} S^M : [x_1^M = 0, y_1^M = 0, z_1^M = 0; \\ t_1^M = 0] \\ S^J : [x_1^J = 0, y_1^J = 0, z_1^J = 0; \\ t_1^J = 0]. \end{cases} \quad (3)$$

Tal como as transformações de Galileu, as coordenadas  $x, y$  e  $z$  nas eqs. (1) dependem do tempo. Entretanto, existe uma grande novidade nas TL, que a coordenada  $t$  depende das coordenadas espaciais. Por isso, na relatividade, algumas noções relacionadas ao espaço (distância entre dois pontos) e à passagem do tempo (intervalo entre dois instantes) foram alteradas em relação à visão newtoniana. O espaço e o tempo tornaram-se entidades relativas ao referencial, com caráter unificado, tal como afirma Minkowski:

*As visões de espaço e tempo que eu quero apresentar para vocês brotaram do solo da física experimental e nisso reside a força delas. Elas são radicais. Daqui em diante, tempo sozinho e espaço sozinho estão condenados a desvanecer em meras sombras e apenas um tipo de união dos dois preservará uma realidade independente.*

### 3. Comprimento de Objetos em Movimento

O problema de medir objetos extensos em movimento também é discutido no trabalho de Einstein de 1905. Pode parecer estranho, já que na mecânica clássica os corpos sempre possuem o mesmo tamanho, estejam eles em repouso ou em movimento. No contexto da relatividade, o comprimento de um objeto é associado

<sup>2</sup> De fato, as equações das TL envolvem os intervalos entre as coordenadas  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e  $\Delta t$  de *dois* eventos. A vantagem de usarmos um evento de referência, em que todas coordenadas iniciais são zero, é reduzir os intervalos à própria coordenada do outro, pois  $\Delta x = x - 0, \Delta y = y - 0, \Delta z = z - 0$  e  $\Delta t = t - 0$ , o que torna as TL bem mais fáceis de serem manipuladas. Esta é uma convenção muito prática, adotada por Einstein em 1905 e seguida neste texto.

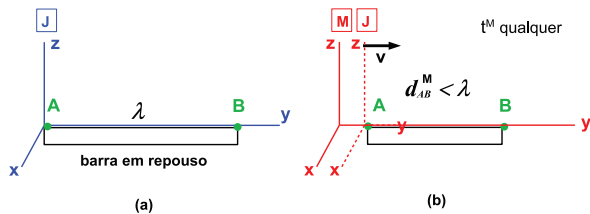


Figura 3: A barra de metal.

às coordenadas espaciais de eventos e estas, dependem do referencial. A noção de comprimento de uma barra é construída a partir da distância entre dois eventos localizados nas suas extremidades e, para que ela tenha sentido, é preciso que os eventos ocorram no *mesmo instante*. Ou seja, é muito importante que eles sejam simultâneos pois é a única maneira de eliminarmos o tempo e obter um intervalo puramente espacial entre as coordenadas. Esta é uma característica das medidas de comprimento na relatividade, tomar eventos simultâneos em um referencial.

Por exemplo, consideremos uma barra de metal cujo comprimento em repouso em  $S^J$  vale  $\lambda$ , como a mostrada na Fig. 3(a). Em  $S^M$ , essa barra se desloca com velocidade  $v$  e, quando observada em um instante  $t^M$  qualquer, a distância  $d_{AB}^M$  entre as suas extremidades é menor que  $\lambda$ , como ilustra a Fig. 3(b) e mostramos a seguir.

Para determinar o comprimento da barra em  $S^M$ , precisamos considerar dois eventos A e B simultâneos nesse referencial. Como o movimento da barra é na direção do eixo  $y$ , as coordenadas  $x$  e  $z$  permanecem inalteradas nas transformações de Lorentz e, por isso, iremos omiti-las. Por conveniência, colocamos o evento A na origem comum de  $S^J$  e  $S^M$ , de modo que ele pode ser considerado o evento de referência. Assim, temos

$$E_A \begin{cases} S^M : [0; 0] \\ S^J : [0; 0]. \end{cases} \quad (4)$$

Com esta convenção, a distância  $d_{AB}^M$  é determinada pela coordenada espacial do evento B. Com os dados diretos do problema, temos  $t_B^M = t_A^M = 0$ , pois A e B são simultâneos em  $S^M$ . O comprimento da barra em  $S^J$  é conhecido e corresponde à coordenada  $y$  de  $E_B$ , dada por  $y_B^J = \lambda$ . Assim, as coordenadas do evento B são

$$E_B \begin{cases} S^M : [y_B^M; t_B^M] = [y_B^M = ?; t_B^M = 0] \\ S^J : [y_B^J; t_B^J] = [y_B^J = \lambda; t_B^J = ?]. \end{cases} \quad (5)$$

Nesta situação, temos uma informação em  $S^J$  e outra em  $S^M$  e  $y_B^M$  e  $t_B^J$  podem ser determinadas empregando as TL de  $S^J \rightarrow S^M$ , dadas na eq. (1). Para a coordenada temporal, tomamos a equação  $t_B^M = \gamma(t_B^J + vy_B^J/c^2)$  e substituindo os dados conhecidos de  $E_B$ , obtemos

$$0 = \gamma(t_B^J + v\lambda/c^2) \rightarrow 0 = t_B^J + \frac{v}{c^2}\lambda$$

$$t_B^J = -\frac{v}{c^2}\lambda.$$

Esse resultado, usado na coordenada espacial  $y_B^M = \gamma(y_B^J + vt_B^J)$ , fornece

$$y_B^M = \gamma \left[ \lambda + v \left( -\frac{v}{c^2}\lambda \right) \right] = \gamma\lambda(1 - v^2/c^2) = \gamma\lambda/\gamma^2$$

$$y_B^M = \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Inserindo os valores na descrição dos eventos, temos o quadro completo nos dois referenciais

$$E_A \begin{cases} S^M : [0; 0] \\ S^J : [0; 0] \end{cases} \quad E_B \begin{cases} S^M : \left[ \frac{\lambda}{\gamma}; 0 \right] \\ S^J : \left[ \lambda; -\frac{v}{c^2}\lambda \right]. \end{cases} \quad (6)$$

O comprimento da barra para Maria é dado por  $y_B^M - y_A^M = \lambda/\gamma$  e, como  $\gamma > 1$ , em  $S^M$ ,  $d_{AB}^M < \lambda$  e, portanto, a barra é menor que em  $S^J$ . Numa situação como essa, a contração da barra é um efeito *real* e que pode ser verificado experimentalmente. É importante notar que essa contração é sempre acompanhada de outro efeito. O quadro (6) indica que os eventos A e B são simultâneos em  $S^M$  mas, em  $S^J$ , não o são, pois  $t_A^J \neq t_B^J$ . Neste caso, como  $t_B^J < t_A^J$ , para João<sup>3</sup>, o evento B ocorre *antes* do evento A. Esse é um exemplo de situação em que eventos simultâneos em um referencial deixam de sê-lo em outro, o que evidencia a quebra da simultaneidade. Esse conjunto de ideias e efeitos é o que permite ter uma visão coerente do problema da garagem.

### 4. O Problema da Garagem

O trem mostrado na Fig. 4(a) está em repouso no referencial  $S^J$  e tem comprimento  $L^J$ . Esse trem se move com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$  sobre uma linha férrea, estacionária no referencial  $S^M$ , no fim da qual existe

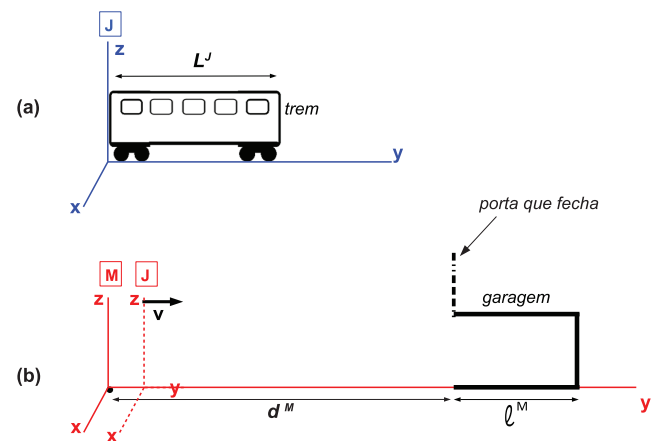


Figura 4: (a) Referencial  $S^J$  e o trem em repouso; (b) Referencial  $S^M$  e a garagem em repouso.

<sup>3</sup> Um tempo negativo não é um problema, já que a origem  $t = 0$  é uma convenção arbitrária.

uma garagem de tamanho  $\ell^M$ , menor que  $L^J$ , com uma porta na entrada que pode ser fechada, como mostra a Fig. 4(b).

Nesse problema, lidamos com seis comprimentos importantes:

- $L^J$ : comprimento do trem em repouso em  $S^J$ ;
- $L^M$ : comprimento do trem em movimento em  $S^M$ ;
- $\ell^M$ : comprimento da garagem em repouso em  $S^M$ ;
- $\ell^J$ : comprimento da garagem em movimento em  $S^J$ ;
- $d^M$ : distância da origem dos referenciais à entrada da garagem em  $S^M$  e
- $d^J$ : distância da origem dos referenciais à entrada da garagem em  $S^J$ .

O nosso objetivo é discutir se, no contexto da relatividade, é possível que o trem, cujo comprimento em repouso é maior que o da garagem,  $L^J < \ell^M$ , entre completamente no interior dela, de modo que a porta possa ser fechada.

### 4.1. A situação vista em $S^M$

Iniciamos nossa discussão no referencial  $S^M$  de Maria e, para isso, precisamos comparar o comprimento  $L^M$  do trem em movimento com o comprimento  $\ell^M$  da garagem em repouso. Pela seção anterior, sabemos que vai existir uma contração do trem, que depende da sua velocidade, através do fator  $\gamma$ . Para determinar  $L^M$ , escolhemos dois eventos  $E_1$  e  $E_2$  simultâneos em  $S^M$ , como na seção anterior e a distância espacial entre eles é o comprimento desejado. Tomamos  $E_1$  como o evento de referência e temos a situação mostrada na Fig. 5.

Os valores do enunciado nos permite escrever

$$E_R = E_1 \begin{cases} S^M : [0; 0] \\ S^J : [0; 0] \end{cases} \quad (7)$$

$$E_2 \begin{cases} S^M : [y_2^M = ?; t_2^M = 0] \\ S^J : [y_2^J = L^J; t_2^J = ?] \end{cases}$$

e, usando o resultado da seção anterior, temos

$$E_1 \begin{cases} S^M : [0; 0] \\ S^J : [0; 0] \end{cases} \quad (8)$$

$$E_2 \begin{cases} S^M : \left[ \frac{L^J}{\gamma}; 0 \right] \\ S^J : \left[ L^J; -\frac{v}{c^2} L^J \right], \end{cases}$$

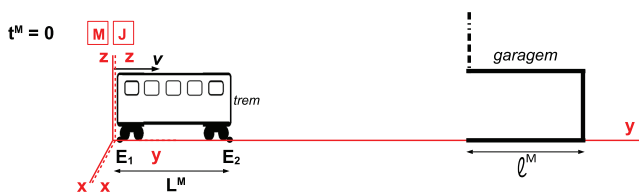


Figura 5: Os eventos  $E_1$  e  $E_2$  em  $S^M$ .

Assim,  $L^M = y_2^M - y_1^M = L^J/\gamma$ . Observamos que para o trem entrar na garagem em  $S^M$ , é preciso que  $L^M = L^J/\gamma < \ell^M$ . Portanto, a velocidade  $v_{\min}$  é dada pela condição  $\gamma = L^J/\ell^M$ , que corresponde a

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v_{\min}^2/c^2} = \left( \frac{L^J}{\ell^M} \right)^2 \rightarrow 1 - \frac{v_{\min}^2}{c^2} = \frac{(\ell^M)^2}{(L^J)^2}$$

$$v_{\min} = c\sqrt{1 - (\ell^M)^2/(L^J)^2}. \quad (9)$$

Para tornar essa discussão mais concreta, adotamos valores numéricos e supomos que o comprimento do trem em repouso seja  $L^J = 100$  m e o da garagem,  $\ell^M = 75$  m. Neste caso, a velocidade mínima que o trem deve ter para entrar na garagem é  $v_{\min} = 0,66 c$ . Na Tabela 1 mostramos os comprimentos do trem em  $S^M$  para um conjunto de velocidades diferentes.

A partir de agora e em todo o restante do texto, adotamos o valor de  $v_{\min} = 0,66 c$ , de tal forma que  $\gamma = 1,33$  e para facilitar nossa discussão, inserimos um ponto A na dianteira do trem e um B, na traseira. Num dado instante  $t^M > 0$  em  $S^M$ , representamos na Fig. 6(a) a localização do trem em movimento. Durante todo o movimento do trem, até o instante em que ele entra na garagem, seu comprimento em  $S^M$  é constante, vale  $L^M$  e, portanto, não é correta a ideia que às vezes encontramos de que o trem ‘vai encolhendo’ à medida que o tempo passa. No instante em que o ponto A, a

Tabela 1: Comprimentos do trem em  $S^M$ . Note que para  $v < 0,66 c$ , o trem é maior que a garagem e para  $v > 0,66 c$ , ele é menor.

$v/c$	$\gamma$	$L^M (= L^J/\gamma)$ (m)
0,5	0,1547	86,80
0,6	1,2500	80,00
<b>0,6612</b>	<b>1,333</b>	<b>75,02</b>
0,7	1,4003	71,41
0,8	1,6667	60,00
0,9	2,2942	43,59
0,99	7,0888	14,11

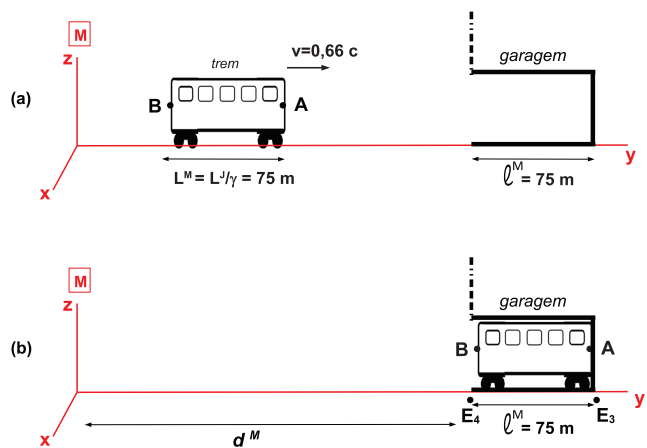


Figura 6: o trem em movimento em  $S^M$ .

dianteira do trem, toca a parede interna da garagem, já é possível fechar a porta<sup>4</sup>, situação mostrada na Fig. 6(b).<sup>5</sup>

### 4.2. A situação vista em $S^J$

A novidade deste texto é analisar o que acontece em  $S^J$ , no qual o trem está em repouso e a garagem se desloca com velocidade  $v_{\text{mín}}$ , para a esquerda. O comprimento  $L^J$  do trem é conhecido, no entanto, o tamanho da garagem em movimento  $\ell^J$  precisa ser determinado. Para calcular o comprimento da garagem em movimento, escolhemos dois eventos  $E_5$  e  $E_6$ , simultâneos em  $S^J$ , representados na Fig. 7 que, por simplicidade, tomamos em  $t^J = 0$ :

- $E_5$ : posição da extremidade direita da garagem em  $t^J = 0$  e
- $E_6$ : posição da extremidade esquerda da garagem em  $t^J = 0$ .

Como a garagem está fixa em  $S^M$  [ver Fig. 6(b)], as coordenadas espaciais de  $E_5$  e  $E_6$  são conhecidas em quaisquer instantes. Assim, a formulação dessa situação corresponde a

$$\begin{aligned}
 E_6 & \begin{cases} S^M : [y_6^M = d^M; t_6^M = ?] \\ S^J : [y_6^J = ?; t_6^J = 0] \end{cases} \\
 E_5 & \begin{cases} S^M : [y_5^M = d^M + \ell^M; t_5^M = ?] \\ S^J : [y_5^J = ?; t_5^J = 0], \end{cases} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Usando as TL, determinamos  $t_6^M$  e  $y_6^J$  para  $E_6$  e,  $t_5^M$  e  $y_5^J$  para  $E_5$ . Para tanto, primeiro obtemos os valores de  $t^M$  nas eqs. (11) e (13), para depois empregá-los em (12) e (14) no cálculo de  $y^J$ :

$$\begin{aligned}
 t_6^J & = \gamma(t_6^M - v y_6^M/c^2) \rightarrow 0 \\
 & = \gamma(t_6^M - v d^M/c^2) \rightarrow t_6^M = v d^M/c^2, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_6^J & = \gamma(y_6^M - v t_6^M) = \gamma(d^M - v^2 d^M/c^2) \\
 & = \gamma d^M (1 - v^2/c^2) = d^M/\gamma. \quad (12)
 \end{aligned}$$

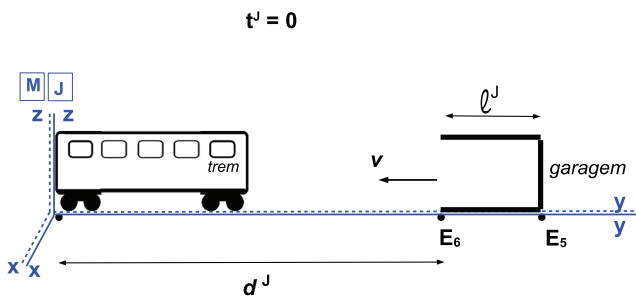


Figura 7: Dois eventos vistos em  $S^J$ .

<sup>4</sup> Por simplicidade supomos que a porta possa ser fechada instantaneamente.

<sup>5</sup> Já fixamos os eventos  $E_3$  e  $E_4$  na figura (b), relativos à entrada do trem na garagem, pois serão usados posteriormente.

$$\begin{aligned}
 t_5^J & = \gamma(t_5^M - v y_5^M/c^2) \rightarrow 0 = \gamma(t_5^M - v d^M/c^2) \rightarrow t_5^M \\
 & = v (d^M + \ell^M)/c^2, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_5^J & = \gamma(y_5^M - v t_5^M) = \gamma[(d^M + \ell^M) - v^2 (d^M + \ell^M)/c^2] \\
 & = \gamma(d^M + \ell^M)(1 - v^2/c^2) = (d^M + \ell^M)/\gamma. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Substituindo em (10), temos

$$\begin{aligned}
 E_6 & \begin{cases} S^M : [d^M; \frac{v}{c^2} d^M] \\ S^J : [d^M/\gamma; 0] \end{cases} \\
 E_5 & \begin{cases} S^M : [d^M + \ell^M; (d^M + \ell^M)v/c^2] \\ S^J : [(d^M + \ell^M)/\gamma; 0], \end{cases} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Este resultado contém três informações importantes. A primeira é que o comprimento da garagem em  $S^J$  é dado por  $y_5^J - y_6^J = \ell^M/\gamma$  e, como  $\gamma > 1$ ,  $\ell^J < \ell^M$ . A segunda é que, analogamente, a distância entre a origem de  $S^J$  e a entrada da garagem  $d^J = y_6^J - y_1^J = d^M/\gamma$  também aparece contraída. Finalmente, é importante notar que os eventos  $E_5$  e  $E_6$ , que são simultâneos em  $S^J$ , deixam de sê-lo em  $S^M$ , já que  $t_5^M > t_6^M$ .

Usando os valores numéricos  $L^J = 100$  m e  $\ell^J = \ell^M/\gamma = 56,4$  m, temos a situação em  $S^J$  mostrada na Fig. 8.

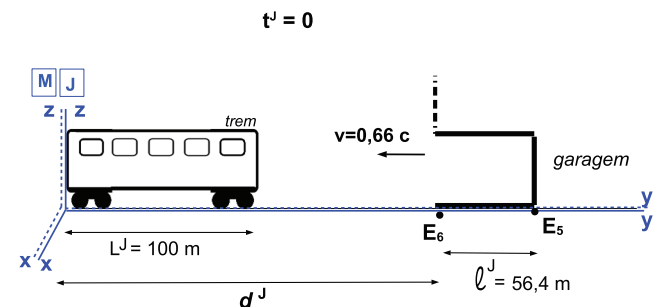
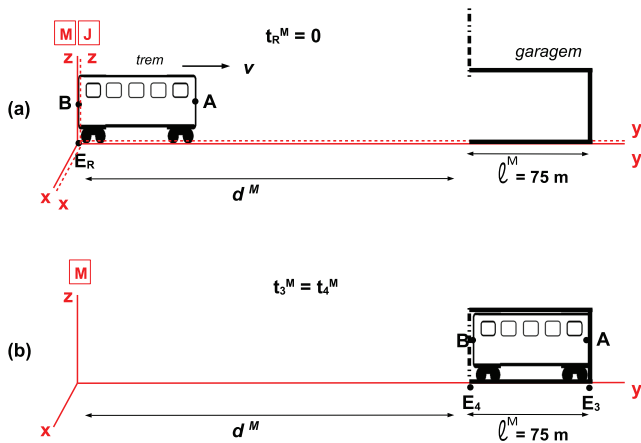


Figura 8: Situação em  $S^J$ : o trem e a garagem contraída.

Com esta descrição em  $S^J$ , surge a questão de saber se nesse referencial o trem pode entrar na garagem e a porta fechar. Olhando o desenho poderíamos ser tentados a dizer que não. Esta questão nos coloca frente a um aparente paradoxo, que nos divide ao meio. Para sair dele, precisamos recorrer a algo sólido da teoria, o caráter absoluto da ocorrência de um evento. Na relatividade, cada evento corresponde a uma observação concreta e objetiva e, se ocorre em um referencial, deve ocorrer em todos os outros. No nosso caso, se a porta fecha com o trem dentro da garagem no referencial  $S^M$ , o mesmo deve acontecer em  $S^J$ . O ponto crítico agora desse problema é **como** explicar isso em  $S^J$ .

### 4.3. A solução do paradoxo

Para resolver esse paradoxo aparente recorreremos à estrutura teórica, à matemática, pois ela oferece um caminho



**Figura 9:** (a) o evento de referência, em  $t_R^M = 0$ ; (b) o trem dentro da garagem em  $S^M$ , no instante  $t_3^M = t_4^M$ .

mais seguro para o pensamento do que a nossa intuição. Na Figura 6(b), representamos o trem dentro da garagem em  $S^M$ . Para tratar o problema é preciso explicitar os eventos relevantes, que são

- $E_R$  - evento de referência, a coincidência da origem dos referenciais  $S^M$  e  $S^J$ , dado em (7);
- $E_3$  - o ponto A toca a parede interna da garagem e
- $E_4$  - a porta da garagem ao fechar toca o ponto B, mostrado nas Figs. 9(a) e (b).

Em  $S^M$ , temos  $E_R$ ,  $E_3$  e  $E_4$  representados na Fig. 9, com  $E_3$  e  $E_4$  simultâneos.

Em  $S^M$ ,  $E_3$  e  $E_4$  são simultâneos e ocorrem no instante  $t_3^M = t_4^M = d^M/v$  e suas posições são  $y_3^M = d^M + \ell^M$  e  $y_4^M = d^M$ , já que consideramos o tamanho do trem exatamente igual ao tamanho da garagem. Como a descrição desses eventos em  $S^J$  ainda é desconhecida, esquematizamos

$$\begin{aligned}
 E_3 & \begin{cases} S^M : [d^M + \ell^M; d^M/v] \\ S^J : [y_3^J = ?; t_3^J = ?], \end{cases} \\
 E_4 & \begin{cases} S^M : [y_4^M; t_4^M] = [d^M; d^M/v] \\ S^J : [y_4^J = ?; t_4^J = ?], \end{cases} \quad (16)
 \end{aligned}$$

sendo que as incógnitas são determinadas com o uso das TL. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned}
 y_3^J &= \gamma(y_3^M - vt_3^M) = \gamma(d^M + \ell^M - d^M) = \gamma\ell^M; \\
 t_3^J &= \gamma(t_3^M - vy_3^M/c^2) = \gamma/v[d^M - (d^M + \ell^M)v^2/c^2]; \\
 y_4^J &= \gamma(y_4^M - vt_4^M) = \gamma(d^M - d^M) = 0; \\
 t_4^J &= \gamma(t_4^M - vy_4^M/c^2) = d^M/\gamma v(1 - v^2/c^2) = \frac{d^M}{\gamma v}.
 \end{aligned}$$

Assim, as descrições dos dois eventos nos dois referenciais são dadas por

$$\begin{aligned}
 E_3 & \begin{cases} S^M : \left[ d^M + \ell^M; \frac{d^M}{v} \right] \\ S^J : \left[ \gamma\ell^M; \frac{d^M}{\gamma v} - \frac{\gamma v \ell^M}{c^2} \right]. \end{cases} \\
 E_4 & \begin{cases} S^M : \left[ d^M; \frac{d^M}{v} \right] \\ S^J : \left[ 0; \frac{d^M}{\gamma v} \right]. \end{cases} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Os resultados do quadro acima evidenciam a quebra da simultaneidade em  $S^J$ , pois  $E_3$  e  $E_4$  ocorrem em instantes diferentes. O termo negativo  $(-\frac{\gamma v \ell^M}{c^2})$  em  $t_3^J$  indica que  $t_4^J > t_3^J$ , mostrando que em  $S^J$ , o evento 3 ocorre antes que o evento 4. Isto significa que a garagem encosta no ponto A **antes** que a sua porta chegue na posição da traseira, o ponto B.

### 5. Interpretação dos Resultados

Para tornar mais concreta a discussão, adotamos  $d^M = 3000$  m e retomamos os valores numéricos apresentados anteriormente,  $v = 0,66c$ ,  $\ell^M = 75$  m,  $\gamma = 1,33$  e o quadro (17) passar a ser<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
 E_3 & \begin{cases} S^M : [3075 \text{ m}); (15, 2 \mu\text{s})] \\ S^J : [(100 \text{ m}); (11, 2 \mu\text{s})]. \end{cases} \\
 E_4 & \begin{cases} S^M : [(3000 \text{ m}); (15, 2 \mu\text{s})] \\ S^J : [(0); (11, 4 \mu\text{s})]. \end{cases} \quad (18)
 \end{aligned}$$

A representação gráfica dos eventos em  $S^J$  envolve  $E_R$ ,  $E_3$  e  $E_4$ , mostrados na Fig. 10. Nesse referencial, o trem está em repouso e a garagem se aproxima dele com velocidade  $v$  para a esquerda. O primeiro evento relevante após o de referência é  $E_3$ , cuja coordenada espacial vale  $y_3^J = \gamma\ell^M = 100$  m, resultado coerente, pois o trem está em repouso e seu comprimento próprio é  $L^J = 100$  m. Posteriormente, ocorre o evento 4, mostrado na Fig. 10(d), que corresponde ao fechamento da porta da garagem, cuja coordenada espacial vale  $y_4^J = 0$ , o que evidencia que o trem não saiu do lugar e coincide com a origem de  $S^J$ .

Para aceitar melhor a situação descrita na Fig. 10(d), precisamos lembrar que, de acordo com a relatividade, se a porta fecha em  $S^M$ , o mesmo tem que acontecer em  $S^J$ . Isso é verdade para trens e garagens feitos de quaisquer materiais. No caso de trens reais, choques muito intensos tendem a deformá-los e destruí-los. Entretanto, o resultado da relatividade deve permanecer válido também se

<sup>6</sup> Os instantes obtidos são da ordem de  $\mu\text{s} = 10^{-6}$  s, já que  $v$  é comparável a  $c$ .

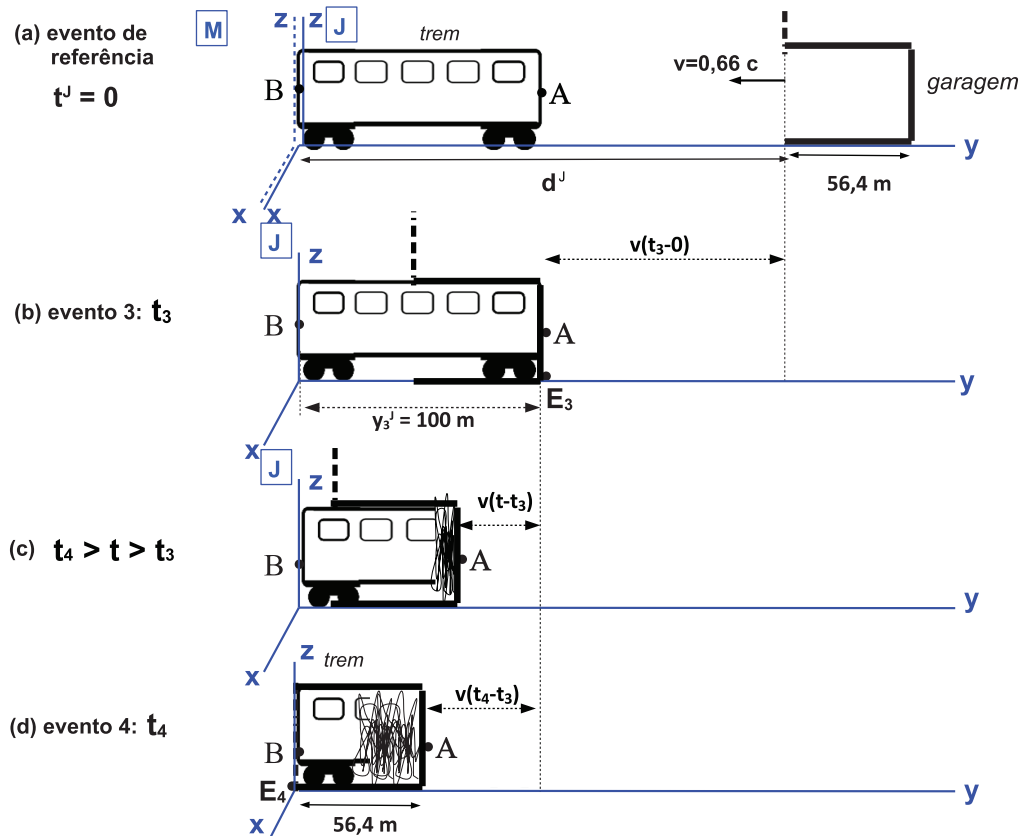


Figura 10: Compressão do trem em  $S^J$ ; a região riscada representa o trem comprimido

supusermos que tanto a garagem quanto o trem sejam indestrutíveis. Neste caso ideal, o trem seria *comprimido*, por meio de uma deformação elástica.

Uma questão importante que precisa ser esclarecida diz respeito ao que acontece com o trem no intervalo entre os instantes  $t_3^J$  e  $t_4^J$ , tal como mostra a Fig. 10(c). Num instante  $t_4 > t > t_3$ , o lado direito do trem (ideal) já bateu na parede da garagem e está sujeito a uma força para a esquerda que, em princípio, poderia fazer com que ele recuasse. No entanto, a ocorrência do evento 4 indica que isso não aconteceu. Assim, no instante  $t$ , o ponto A do trem é empurrado para a esquerda, enquanto o ponto B permanece parado na origem de  $S^J$ , em  $y_4^J = 0$ . Ou seja, ele não recua! Diferentemente do contexto newtoniano, na relatividade, não se aplica a noção de corpo rígido, pois não existe transmissão instantânea de informação de um ponto para outro. Isso quer dizer que todos os pontos na extensão do trem não são informados ao mesmo tempo do choque ocorrido no ponto A. O fechamento da porta só é possível *porque* ele acontece antes da informação da batida no ponto A chegar ao ponto B.

De modo geral, a informação de que um evento ocorreu num ponto é transmitida aos demais pontos do espaço através de uma bolha matemática,<sup>7</sup> esférica e

<sup>7</sup> A representação da evolução da bolha ao longo do tempo corresponde ao cone de luz.

tridimensional, com centro na coordenada espacial do evento, cuja superfície se expande com a velocidade da luz  $c$ . No caso do trem que entra na garagem, em um instante  $t$  qualquer, posterior à  $t_3^J$ , a informação da ocorrência de  $E_3$  já chegou em todos os pontos do espaço internos à esfera de raio  $R(t) = c \Delta t = c(t - t_3^J)$ . Na Fig. 11, mostramos a configuração do problema nos instantes  $t_3^J$  e  $t_4^J$ . No instante  $t_3^J$  ocorre o choque no ponto A e nasce a bolha de informação. Na medida que o tempo passa, a bolha cresce com velocidade  $c$  e a garagem se move para a esquerda. A questão é saber quem chega antes ao ponto B, a porta da garagem ou a bolha. Para isso, devemos comparar o raio  $R(t) = c \Delta t$  da bolha com o comprimento  $L^J$  do trem. Este raio é dado por

$$R(t) = c \Delta t = c(t_4^J - t_3^J) = c \left( \frac{\gamma v \ell^M}{c^2} \right) = \frac{\gamma v \ell^M}{c}$$

$$R(t) = \frac{v L^J}{c} e,$$

como  $v/c < 1$ , concluímos que  $R < L^J$ .

Este cálculo mostra que o evento 4 acontece antes da informação da ocorrência do evento 3 chegar ao ponto B, na posição traseira do trem. Desse modo, se existissem passageiros no fundo do trem, eles **não** saberiam que a frente do trem bateu antes deles próprios se chocarem com a garagem.



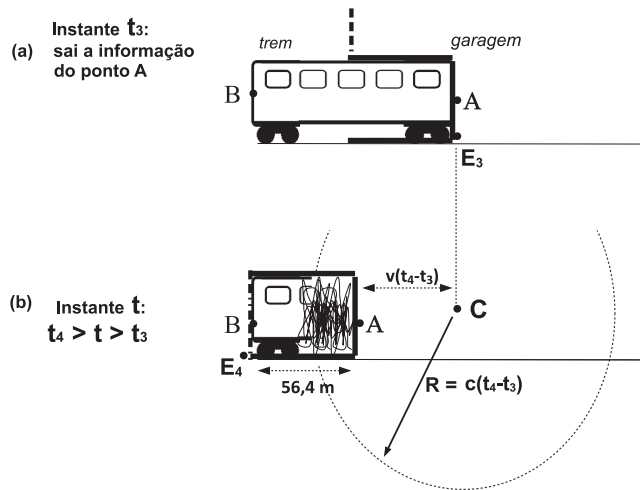


Figura 11: Informação entre os eventos 3 e 4.

## 6. Considerações Finais

Normalmente, o ensino da relatividade fica centrado em algumas aplicações das fórmulas da ‘contração do espaço’ e da ‘dilatação do tempo’, limitando a discussão de uma série de outros elementos que compõem a teoria e conferem beleza a ela. O objetivo deste texto foi resolver um problema conhecido de relatividade com um enfoque em questões também discutidas por Einstein em seu texto original. No seu artigo, Einstein destaca que em relatividade não podemos considerar corpos rígidos, isto é, extensos, mas sim tratar problemas que envolvem comprimento com o uso de ‘pontos’ com quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal. Estes pontos quadridimensionais são os eventos, cujas descrições devem ser relacionadas por equações de transformação de um referencial para outro, conforme Einstein discorre no capítulo 3 do seu artigo ([9], p. 43).

A noção de eventos e o uso das transformações de Lorentz, de uma maneira mais explícita, traz um detalhamento maior sobre os pontos do espaço e permite uma interpretação do que acontece em cada referencial ‘posterior’ aos cálculos, enfatizando a solidez e consistência teórica-matemática da teoria. Com isso, as conhecidas ‘contração do espaço’ e ‘dilatação do tempo’ tornam-se secundárias e não podem ser consequências generalizadas, sendo necessária uma análise e uma interpretação do problema caso a caso.

Nossa intenção didática foi propiciar aos leitores, especialmente os professores de física e estudantes de graduação, um enriquecimento do tema para suas aulas, com questões pouco exploradas, tais como a noção de comprimento de corpos em movimento, a relatividade da simultaneidade, causalidade e elementos do cone de luz. Esta forma de abordar os problemas de relatividade se constitui numa fonte inesgotável de aspectos que podem ser tratados em aula, trazendo à tona o que chamamos de *oportunidades perdidas*, que uma abordagem tradicional, focada nas fórmulas  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$  e  $L = L_0/\gamma$ , não

contempla. Esperamos que, com este texto, um professor possa apresentar a quantidade de coisas bonitas e complexas contidas na relatividade de Einstein, tanto na escola básica, quanto no ensino superior.

## Agradecimentos

Quero agradecer ao Manoel R. Robilotta pelas discussões conceituais deste artigo e ao revisor da RBEF pelas sugestões e contribuições valiosas que aprimoram o texto.

## Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), 9 ed., v. 4.
- [2] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica: ótica, relatividade e física quântica* (E. Blücher, São Paulo, 2002).
- [3] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros* (LTC, Rio de Janeiro, 2006), 5 ed., v. 3.
- [4] <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/relatividade-restrita/o-paradoxo-da-vara-e-do-celeiro>
- [5] <https://www.blogs.unicamp.br/chivononpo/2008/01/02/o-paradoxo-do-celeiro-e-da-lanca/>
- [6] <https://silo.tips/download/relatividade-restrita-e-seus-resultados-prof-vicente-barros>
- [7] H. Minkowski, *Space and Time - Minkowski's Papers on Relativity* (Minkowski Institute Press, Québec, 1909).
- [8] M.J. Bechara, J.L.M. Duarte, M.R. Robilotta e S. Salém, em: *Bases do Eletromagnetismo, Ondas e Relatividade* (Editora EDUSP, São Paulo, no prelo).
- [9] A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Minkowski e H. Weyl, *The Principle of Relativity* (Dover, New York, 1952).