Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 2, 2701 (2014)
www.sbfisica.org.br

Notas e Discussões

Oscilador harmônico: Uma análise via séries de Fourier

(Harmonic oscillator: An analysis via Fourier series)

A. S. de Castro[1]

Departamento de Física e Química, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",Guaratinguetá, SP, Brasil
Recebido em 31/8/2013; Aceito em 19/9/2013; Publicado em 11/5/2014

O método de séries de Fourier é usado para resolver a equação homogênea que governa o movimento do oscilador harmônico. Mostra-se que a solução geral do problema pode ser encontrada com surpreendente simplicidade para o caso do oscilador harmônico simples. Mostra-se também que o oscilador harmônico amortecido é suscetível à análise.
Palavras-chave: harmônico, séries de Fourier.

The Fourier series method is used to solve the homogeneous equation governing the motion of the harmonic oscillator. It is shown that the general solution to the problem can be found in a surprisingly simple way for the case of the simple harmonic oscillator. It is also shown that the damped harmonic oscillator is susceptible to the analysis.
Keywords: harmonic oscillator, Fourier series.

1. Introdução

O protótipo do oscilador harmônico simples é o sistema massa-mola caracterizado pela equação

$$\frac{d^2x\,(t)}{dt^2}+\omega_0^2\,x\,(t)=0. \qquad (1)$$

com $\omega_0 > 0$. Esta equação diferencial aparece em diversas aplicações e proporciona um modelo para toda e qualquer oscilação de pequena amplitude. Outrossim, serve como excelente ferramenta pedagógica para ilustrar com simplicidade diversas técnicas de solução de equações diferenciais de segunda ordem.

A série de Fourier é uma série de senos e cossenos usada para representar funções periódicas e contínuas por partes, e é uma ferramenta básica na busca de soluções de equações diferenciais. Em geral, a busca restringe-se às soluções particulares de equações não-homogêneas. No caso do oscilador harmônico, as séries de Fourier são usualmente utilizadas apenas para a busca de soluções particulares do oscilador forçado sujeito a forças periódicas (veja, *e.g.* [1, 2]). Embora tais problemas possam ser abordados sem o recurso de técnicas tão sofisticadas, incluindo até mesmo o caso do oscilador forçado, o conhecimento de técnicas adicionais para a solução de um dado problema é certamente enriquecedor. Além do mais, a equação do oscilador harmônico, tão onipresente na modelagem matemática de diversos sistemas físicos, pode servir como laboratório para a ilustrar de maneira simplificada a aplicação de séries de Fourier na resolução de equações diferenciais homogêneas nas disciplinas física matemática e mecânica clássica dos cursos de graduação em física, tanto quanto na disciplina matemática aplicada dos cursos de graduação em matemática.

Neste trabalho ilustramos o uso de séries de Fourier para resolver a equação homogênea do oscilador harmônico simples. O método revela-se excepcionalmente simples mas, até onde vai o conhecimento do autor, não se encontra na literatura. Não com tanta simplicidade assim, mostra-se afinal que o procedimento pode ser proveitoso na obtenção das soluções do oscilador harmônico amortecido.

2. Séries de Fourier

A série de Fourier que converge uniformemente para $x\,(t)$ no intervalo $-T/2 < t < +T/2$ é dada por [1]

$$x\,(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t\right), \qquad (2)$$

[1] E-mail: castro@pq.cnpq.br.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

onde $\omega = 2\pi/T$. Os coeficientes de Fourier são expressos por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, x(t)\, \cos n\omega t, \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, x(t)\, \operatorname{sen} n\omega t, \tag{4}$$

e satisfazem à desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, x^2(t). \tag{5}$$

3. Oscilador harmônico simples

A solução do oscilador harmônico expressa pela série de Fourier é uma função periódica de período T que envolve uma pletora de constantes desconhecidas, tais como os coeficientes de Fourier e até mesmo o período de osilação. No entanto, a substituição da Eq. (2) na Eq. (1) implica que

$$a_0 = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2\omega^2 - \omega_0^2)\left(a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right) = 0, \tag{7}$$

e em virtude da independência linear das funções $\cos n\omega t$ e $\operatorname{sen} n\omega t$ obtemos

$$n^2\omega^2 - \omega_0^2 = 0, \quad n \geq 1. \tag{8}$$

De sorte que

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t, \tag{9}$$

onde

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{10}$$

Note que a convergência das séries patentes na Eq. (10) é assegurada pela desigualdade de Bessel. Temos então que o sistema oscila harmonicamente com período $T = 2\pi/\omega_0$, e que a Eq. (9), com suas duas constantes de integração a serem ajustadas às condições iniciais, representa a solução geral da equação do oscilador harmônico simples.

4. Oscilador harmônico amortecido

O oscilador harmônico amortecido, que tem como protótipo o sistema massa-mola com atrito linear na velocidade, é caracterizado pela equação

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2\, x(t) = 0, \tag{11}$$

onde $\gamma > 0$ é a constante de amortecimento. Supondo que $x(t)$ tende a zero quando $t \to \infty$, podemos escrever

$$x(t) = e^{-\gamma t}\xi(t), \tag{12}$$

onde, para um certo $\widetilde{\gamma} < \gamma$, $\xi(t)$ não cresce mais rapidamente do que $e^{\widetilde{\gamma}t}$ quando $t \to \infty$, *i.e.*

$$\lim_{t\to\infty}|e^{-\widetilde{\gamma}t}\xi(t)| \leq M \tag{13}$$

onde M é uma constante positiva. A substituição da Eq. (12) na Eq. (11) permite a obtenção de uma equação diferencial sem o termo da derivada primeira

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + \Omega^2\,\xi(t) = 0, \tag{14}$$

com

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{15}$$

Para o caso subamortecido ($\gamma < \omega_0$), a Eq. (14) é reconhecida como a equação do oscilador harmônico simples e assim, tirando proveito do resultado constante na seção anterior, podemos escrever solução como

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t\right). \tag{16}$$

Para o caso criticamente amortecido ($\gamma = \omega_0$), a Eq. (14) torna-se desprovida de embaraços e exibe a solução linear. Daí,

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A + Bt\right). \tag{17}$$

Finalmente, para o caso superamortecido ($\gamma > \omega_0$) a situação torna-se constrangedora porque Ω manifesta-se como um número imaginário, inviabilizando assim a busca de soluções por intermédio de séries de Fourier. Mais uma vez podemos tirar proveito da solução do oscilador harmônico simples, fazendo uso das identidades trigonométricas $\operatorname{sen} i\theta = i\operatorname{senh}\theta$ e $\cos i\theta = \cosh\theta$ para escrever

$$\xi(t) = a\cosh\widetilde{\gamma}t + b\operatorname{senh}\widetilde{\gamma}t, \tag{18}$$

onde

$$\widetilde{\gamma} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{19}$$

Escrevendo as funções hiperbólicas em termos de exponenciais temos que a solução do caso superamortecido pode ser posta na forma

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{\widetilde{\gamma}t} + Be^{-\widetilde{\gamma}t}\right). \tag{20}$$

É instrutivo observar que esta solução tem o comportamento assintótico prescrito anteriormente haja vista que $\widetilde{\gamma} < \gamma$.

5. Conclusão

Em suma, apresentamos as séries de Fourier como uma ferramenta alternativa para a busca de soluções do oscilador harmônico. A análise tem fulcro apenas no uso de séries de Fourier no caso do oscilador harmônico simples, acrescido da técnica de eliminação do termo de derivada primeira de equações diferenciais de segunda ordem no caso do oscilador harmônico amortecido. Aos leitores com disposição de espírito fica a tarefa de encontrar outros sistemas físicos cujas equações diferenciais homogêneas possam ser resolvidas com certa simplicidade pelo método do desenvolvimento da solução em séries de Fourier.

Agradecimentos

O autor é grato ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, Rio de Janeiro, 1988).

[2] M.L. Boas, *Mathematical Methods in Physical Sciences* (Wiley, New York, 1966); K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1971), 3rd. ed.; T.H. Fay, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **31**, 415 (2000); J.R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, Sausalito, 2005).