

Ondas de Bloch em um metamaterial acústico periódico dispersivo

Bloch waves in a periodic dispersive acoustic metamaterial

G. do N. Almeida^{*1}, E. F. Vergara¹, A. Lenzi¹

¹Universidade Federal de Santa Catarina, Laboratório de Vibrações e Acústica, Florianópolis, SC, Brasil.

Recebido em 27 de agosto de 2024. Aceito em 10 de janeiro de 2025.

A propagação de ondas mecânicas e eletromagnéticas em estruturas com periodicidade espacial tornou-se um campo relevante, especialmente quando os aspectos científico, tecnológico e de inovação são considerados. Embora o comportamento dos fenômenos físicos associado a estruturas periódicas tenham se consolidado ao longo dos últimos anos, o caso acústico ainda é um campo de estudo pouco explorado e neste sentido se faz necessário. Neste trabalho, investigamos alguns fenômenos subjacente ao comportamento das ondas de Bloch em um metamaterial acústico periódico dispersivo. O formalismo matemático da matriz de transferência considerando as perdas visco-térmicas combinada ao teorema de Bloch-Floquet unidimensional são adotados e se revelam suficientemente precisos para descrever e extrair as características da estrutura periódica. Conceitos como dispersão sonora, velocidade de fase e bandas de frequências proibidas (*bandgaps*) são abordados, e seus respectivos comportamentos são apoiados por resultados experimentais. Além disso, uma estratégia de como estabelecer a localização e a dimensão destes *bandgaps* é apresentada. Por fim, este estudo possibilita uma discussão no campo da física ondulatória, particularmente sobre o comportamento das ondas sonoras dissipativas que se propagam em estruturas periódicas.

Palavras-chave: Metamaterial acústico, Relação de dispersão, Velocidade de fase, Ondas de Bloch.

The propagation of mechanical and electromagnetic waves in structures with spatial periodicity has become a relevant field, especially when scientific, technological and innovation aspects are considered. Although the behavior of physical phenomena associated with periodic structures has been consolidated over the last few years, the acoustic case is still a poorly explored field of study and in this sense it is necessary. In this work, we investigate some phenomena underlying the behavior of Bloch waves in a dispersive periodic acoustic metamaterial. The mathematical formalism of the transfer matrix considering the viscothermal losses combined with the one-dimensional Bloch-Floquet theorem are adopted and are shown to be sufficiently accurate to describe and extract the characteristics of the periodic structure. Concepts such as sound dispersion, phase velocity and forbidden frequency bands (*bandgap*) are addressed, and their respective behaviors are supported by experimental results. In addition, a strategy for establishing the location and dimension of these *bandgaps* is presented. Finally, this study enables a discussion in the field of wave physics, particularly in the behavior of dissipative sound waves that propagate in periodic structures.

Keywords: Acoustic metamaterial, Dispersion relation, Phase velocity, Bloch waves.

1. Introdução

Fenômenos físicos provenientes da interação de ondas com estruturas periódicas são frequentemente estudados em cursos de ciências exatas no ensino superior do Brasil. No entanto, em geral estes estudos estão demasiadamente associados às ondas eletromagnéticas (rádio, micro-ondas, luz) e de matéria (mecânica quântica) em comparação às ondas mecânicas (som). O primeiro estudo sobre a propagação de ondas sonoras em estruturas com periodicidade espacial remete a alguns séculos atrás, com a tentativa de se obter a velocidade de propagação do som realizada por *Sir* Isaac Newton [1]. Normalmente dois tipos de estruturas asseguram a propagação desta

classe de ondas em meios periódicos: os cristais sônicos ou sonoros (CS) e os metamateriais acústicos (MMA) periódicos. Os CS são estruturas que consistem em um conjunto de dispersores alojados periodicamente em um meio hospedeiro homogêneo, por exemplo, o ar. Os dispersores podem ser qualquer material denso e refletor sonoro, e em geral, apresentam uma impedância acústica característica muito maior que a impedância do meio hospedeiro [2, 3]. Por outro lado, MMA são estruturas periódicas que replicam uma célula unitária primitiva e apresentam propriedades e comportamentos únicos, especialmente para grandes comprimentos de onda [4].

Os primeiros CS surgiram a partir da ideia relacionada aos cristais fotônicos (CF), uma vez que ambas estruturas possibilitam o controle e a manipulação das ondas, no entanto, a primeira está relacionada às

*Endereço de correspondência: gildean_fsa@hotmail.com

ondas mecânicas (som) enquanto a segunda às ondas eletromagnéticas (luz). Estudos sobre a interação das ondas eletromagnéticas com estruturas periódicas já era consolidado no campo da física do estado sólido [5]. Além disso, o conceito de *bandgap* em eletrônica, oriundo da interação de ondas com um potencial eletrônico periódico, foi proposto pelo físico Eli Yabonovitch em 1990 [6]. Consequentemente, este conceito foi estendido para as ondas sonoras. A propriedade *bandgap* é caracterizada por uma atenuação seletiva (velocidade de fase zero) das ondas em certas faixas de frequências, e esta atenuação se deve a todo o arranjo periódico da estrutura no qual a onda se propaga. Em síntese, nos CS a razão para esta atenuação seletiva reside na interferência destrutiva das ondas, caracterizando assim um comportamento evanescente da intensidade desta onda. Em contrapartida, nos MMA periódicos a razão para esta atenuação seletiva se deve a dois tipos de *bandgaps* distintos: o primeiro tem sua origem física na natureza ressonante dos dispersores que compõe a estrutura do MMA e o segundo tem sua origem na periodicidade [7].

Dito isto, a interação de uma onda sonora com um meio periódico tem como consequência a dispersão desta onda e esta dispersão está associado a dependência não linear com a frequência que o seu número de onda apresenta, e consequentemente, sua velocidade de fase também. É bastante útil lembrar que para uma onda sonora plana que se propaga num meio homogêneo e aperiódico, como o ar, o seu número de onda (k_0) é uma grandeza puramente real e linear com a frequência. Importante destacar que o número de onda desta onda dispersiva é também chamado de número de onda efetivo ou número de onda de Bloch (q), logo estas ondas com características dispersivas são chamadas de ondas de Bloch [1, 8]. A denominação “ondas de Bloch” surgiu no trabalho de doutorado do ganhador do Nobel Felix Bloch em 1928 [9], pois foi ele quem mostrou que as soluções de onda de matéria da equação de Schrödinger são uma forma particular, do que hoje é conhecida como função de ondas de Bloch. As principais características que as ondas de Bloch sonora possuem são: 1) as ondas são quantizadas, ou seja, apresentam certos valores permitidos, e existem como modos de Bloch ortogonais discretos; 2) os modos de Bloch apresentam a mesma periodicidade do metamaterial acústico; 3) a intensidade acústica do modo de menor ordem tende a residir nas regiões de maior impedância acústica na estrutura [3].

A partir do que foi exposto acima, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo teórico e experimental de maneira didática sobre conceitos relacionados às ondas de Bloch sonoras os quais são pouco abordados nos cursos superior de ciências exatas, estes conceitos são: dispersão sonora, velocidade de fase e bandas proibidas de frequências (*bandgaps*). O formalismo matemático necessário para descrever estes conceitos e um detalhamento do aparato experimental utilizados são apresentados. A estrutura geométrica que servirá de modelo é

um metamaterial acústico periódico, o qual é constituído de um guia de onda carregado periodicamente por tubos de um quarto de comprimento de onda ($\lambda/4$), os quais serão frequentemente chamado de dispersores ressonantes. Portanto, espera-se que este texto contribua substancialmente na compreensão do comportamento de fenômenos oriundo de ondas sonoras que se propagam em meios periódicos. Este trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 fornece a descrição detalhada da estrutura, o modelo matemático baseado no método da matriz de transferência, o detalhamento da obtenção da relação de dispersão na estrutura e o método experimental utilizado. Os resultados e as discussões são apresentados na Seção 3. Por fim, as conclusões são declaradas na Seção 4.

2. Materiais e métodos

2.1. A estrutura em estudo

As configurações geométricas a serem analisadas neste estudo são apresentadas na Figura 1. Primeiramente destaca-se a estrutura da Figura 1(b), a qual representa um guia de ondas planas, ou seja, um tubo de seção transversal retangular $S_{go} = d \cdot L_g$ e comprimento total H , com $L_g = m - b$ definindo a largura do guia de ondas na direção z . Na Figura 1(a) ressalta-se a configuração do MMA, a qual se baseia no mesmo guia de ondas com N dispersores acoplados periodicamente. Note que os dispersores locais são tubos enrolados de $\lambda/4$ e espessura h , a qual define a constante de rede do MMA. Além disso, cada dispersor tem altura $W = (h - b - (n - 1) \times b)/n$ e uma largura $A = L_g$ na direção z . As ondas sonoras se propagam nos dispersores por um comprimento total $L_f \approx n \times (L - 2b) - (n - 1) \times W$,

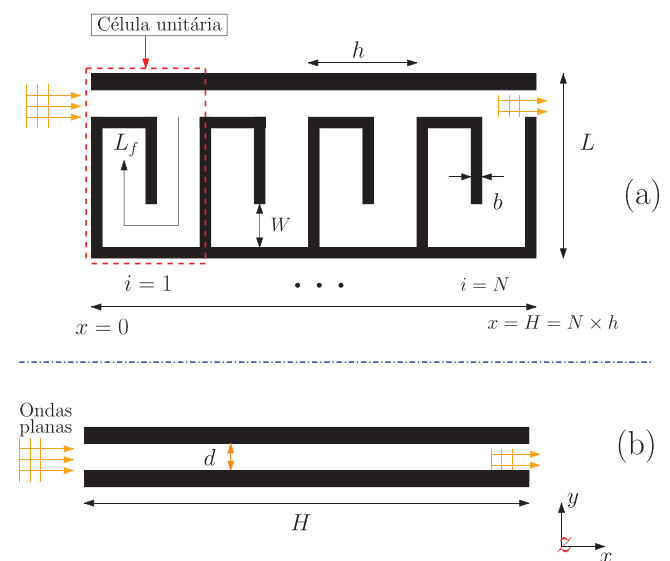


Figura 1: Configurações geométricas em estudo. (a) Estrutura do MMA composto por dispersores de $\lambda/4$ carregados periodicamente num guia de ondas. (b) Guia de ondas planas.

com n representando o número de canais enrolados. O parâmetro n pode variar desde que a constante de rede da estrutura seja preservada. Por fim, b é a espessura das paredes rígidas que moldam a estrutura, logo neste estudo considera-se que não existe interação fluido-estrutura.

2.2. Modelo matemático

Sob a hipótese de propagação de ondas planas unidimensionais (1D) e considerando que ondas com comprimentos de onda maiores que as dimensões dos dispersores incidam no MMA ao longo da direção x , o comportamento da estrutura pode ser teoricamente analisado pelo método da matriz de transferência ($\mathbf{T}_{\text{pr}}$). Esta matriz relaciona um vetor de estado $\mathbf{T} = (P, u)$ em ambos os lados da estrutura na forma [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_{\text{pr}} \mathbf{T}_H &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}_H \Rightarrow \begin{bmatrix} P(x=0) \\ u(x=0) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{\text{pr}} \begin{bmatrix} P(x=H) \\ u(x=H) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $P(x, t) = P(x)e^{j\omega t}$ a pressão acústica e $u(x, t) = [u(x) \cdot S_{go}]e^{j\omega t}$ a velocidade de volume. Considerando que a estrutura apresenta N dispersores periódicos acoplados ao guia de ondas e obedecendo as condições de contorno do problema, todo o sistema pode ser modelado usando o modelo de célula unitária primitiva, conforme destacado na Figura 1 (a). Desta forma, $\mathbf{T}_{\text{pr}}$ é escrito por um produtório de matrizes da seguinte forma

$$\mathbf{T}_{\text{pr}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\text{r}} \prod_{n=1}^N [\mathbf{M}_{\text{go-1}} \mathbf{M}_{\text{d}} \mathbf{M}_{\text{go-2}}] \mathbf{M}_{\text{r}}, \quad (2)$$

com $\mathbf{M}_{\text{go-1}}$ e $\mathbf{M}_{\text{go-2}}$ representando as matrizes do guia de ondas antes e depois dos dispersores, respectivamente,

$$\mathbf{M}_{\text{go-1}} = \begin{bmatrix} \cos[k_{\text{go}} \times (h - W)] & jZ_{\text{go}} \sin[k_{\text{go}} \times (h - W)] \\ j \sin[k_{\text{go}} \times (h - W)]/Z_{\text{go}} & \cos[k_{\text{go}} \times (h - W)] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{\text{go-2}} = \begin{bmatrix} \cos[k_{\text{go}} \times b] & jZ_{\text{go}} \sin[k_{\text{go}} \times b] \\ j \sin[k_{\text{go}} \times b]/Z_{\text{go}} & \cos[k_{\text{go}} \times b] \end{bmatrix}, \quad (4)$$

de modo que k_{go} representa o número de onda efetivo e Z_{go} a impedância acústica característica no guia de ondas. Devido a dimensão da área de seção transversal do guia de ondas, a propagação sonora é fortemente influenciada pelas perdas visco-térmicas, uma vez que estas perdas ocorrem devido aos fenômenos de atrito viscoso e difusão térmica no fluido que permeia o interior da estrutura. De tal sorte que, as grandezas k_{go} e Z_{go} podem ser expressas incluindo estas perdas da seguinte forma [10]

$$k_{\text{go}} = \frac{\omega}{c_0} \left[1 + \frac{(1-j)\sqrt{2 \cdot \eta}}{\sqrt{d \cdot \rho_0 \omega}} \times \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right], \quad (5)$$

$$Z_{\text{go}} = \frac{\rho_0 c_0}{S_{go}} \left[1 + \frac{(1-j)\sqrt{2 \cdot \eta}}{\sqrt{d \cdot \rho_0 \omega}} \times \left(1 - \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right], \quad (6)$$

sendo $\eta = 1.8134 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\gamma = 1.41$, e $\text{Pr} = 0.71$, respectivamente, a viscosidade do ar, a razão de calor específico e o número de Prandtl. $\omega = 2\pi c_0/\lambda = 2\pi f$ é a frequência angular, $\rho_0 = 1.21 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ e $c_0 = \sqrt{\gamma \cdot P_0/\rho_0}$ são a densidade e velocidade do som no ar, respectivamente. Observe que o dispersor é um componente acoplado paralelamente ao guia de ondas, sua matriz na equação 2 é dada por

$$\mathbf{M}_{\text{d}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{\text{dis}} & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

com Z_{dis} representando a impedância total do dispersor, a qual é escrita na seguinte forma

$$Z_{\text{dis}} = -jZ_{\text{d}} \cot(k_{\text{d}} \cdot L_f) + j \frac{\omega \rho_0 (\delta_{ef})}{A_{\text{gp}}}. \quad (8)$$

O último termo na equação (8) representa a radiação sonora dos dispersores para o guia de ondas, a qual é diferente da matriz de radiação ($\mathbf{M}_{\text{r}}$). Com $A_{\text{gp}} = A \times h$ representando a área da seção transversal do guia de ondas e δ_{ef} denotando a porção da radiação sonora de cada dispersor para o guia de ondas, a qual é determinada por [12]

$$\begin{aligned} \delta_{ef} = 0,82W \times & \left[1 - 0,235 \left(\frac{W}{L_g} \right) - 1,32 \left(\frac{W}{L_g} \right)^2 \right. \\ & \left. + 1,54 \left(\frac{W}{L_g} \right)^3 - 0,86 \left(\frac{W}{L_g} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Por outro lado, na equação (8) as grandezas $k_{\text{d}} = \omega \sqrt{\rho_{\text{d}}/K_{\text{d}}}$ e $Z_{\text{d}} = (\sqrt{\rho_{\text{d}} K_{\text{d}}})/A_{\text{d}}$ são, respectivamente, o número de onda efetivo e a impedância característica do dispersor. Com $A_{\text{d}} = W \times A$ representando sua área de seção transversal. Note que a impedância total do dispersor é dependente de seu comprimento (L_f). Ademais, os parâmetros ρ_{d} e K_{d} são as funções densidade e *bulk modulus* ambas complexas e dependentes da frequência. A primeira representa as perdas viscosas enquanto a segunda as perdas térmicas. Estas funções para dispersores com seção transversal retangular foram obtidas por Stinson [11] e expressas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \rho_{\text{d}} = -\rho_0 \frac{\nu A^2 W^2}{4j\omega} \\ \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 \left(\alpha_k^2 + \beta_n^2 - \frac{j\omega}{\nu} \right) \right]^{-1} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_{\text{d}} = \frac{\eta K_0 A^2 W^2}{\gamma \eta A^2 W^2 + 4j(\gamma-1)Pr\rho_0 \omega \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}} \\ \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 \left(\alpha_k^2 + \beta_n^2 - \frac{j\omega Pr\rho_0}{\eta} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

sendo $K_0 = \gamma P_0$ o *bulk modulus* do ar, com $P_0 = 101325$ Pa, e $\nu = \eta/\rho_0$ a viscosidade cinemática. Observe que as funções complexas acima dependem das características do meio e da seção transversal dos dispersores, ou seja, de sua largura (A) e altura (W).

Por fim, devido à condição de contorno geométrica, ambos os lados do MMA são circundados pelo ar (veja Figura 1(a)). Portanto, a radiação sonora deve ser considerada e sua matriz final é expressa como

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega\rho_0\delta_f/(\phi_t A_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

com $A_t = L \times m$ e $\phi_t = A_{\text{slit}}/A_t$ representando a área total e a fração de preenchimento do MMA, respectivamente. A correção final da radiação sonora para o meio externo pelo guia de ondas é dada por [12, 13]

$$\delta_f = \sum_{n=1}^{\infty} d \cdot \phi_t \frac{\sin^2(n\pi\phi_t)}{(n\pi\phi_t)^3}. \quad (13)$$

Note que para avaliarmos o comportamento do guia de ondas na ausência dos dispersores (ver Figura 1(b)), a matriz do dispersor ($\mathbf{M}_d$) na equação 2 deve ser omitida. Para saber mais sobre a dedução de cada matriz na equação 2 a Referência [14] pode ser consultada. Além disso, a partir dos coeficientes da matriz de transferência da estrutura (equação 2) e considerando o teorema de Bloch-Floquet [9], a relação de dispersão do MMA será derivada a seguir.

2.3. Relação de dispersão

Estruturas periódicas, em geral, podem interferir nas ondas que se propagam em seu interior. A primeira constatação desta afirmação ocorreu no nível da estrutura atômica em metais e semicondutores no campo da física do estado sólido. Resumidamente em um sólido os átomos estão distribuídos em uma rede periódica, quando uma onda (elétron) passa nesta estrutura cristalina, ela experimenta uma variação periódica na energia potencial causada pelo núcleo positivo de íons metálicos [2]. Portanto, a solução da equação de Schrödinger para esta configuração periódica é obtida pelo teorema de Bloch-Floquet para o caso 1D [5, 9]. Desta forma, esta mesma ideia pode ser estendida e aplicada às ondas sonoras, ou seja, se uma onda sonora interage com uma estrutura periódica ela assume a mesma simetria e periodicidade da estrutura, em geral esta onda que é governada pelo teorema de Bloch-Floquet é conhecida como ondas de Bloch. Considerando uma onda plana que se propaga na direção x do MMA e o teorema de Bloch-Floquet, o campo de pressão desta onda torna-se uma função de Bloch e assume a seguinte forma padrão [1]

$$P(x) = P(x+h)e^{-jqh}, \quad (14)$$

onde $P(x+h)$ é a amplitude de pressão que varia periodicamente com período h e q é o número de onda de

Bloch o qual é um número complexo. Na representação padrão acima, as ondas de Bloch são conhecidas como ondas viajantes unidimensionais de frequência espacial q que são moduladas em amplitude e fase periodicamente por $P(x+h)$.

Considerando um comportamento harmônico temporal das quantidades governantes ($e^{j\omega t}$), para se obter a relação de dispersão de um MMA infinito usando sua periodicidade especificamente necessita-se resolver um problema de autovalor, o qual é construído a partir de uma célula primitiva unitária (ver Figura 1(a)). Assim, o teorema de Bloch-Floquet pode ser cumprido de modo que a matriz de transferência de uma célula primitiva pode ser descrita da seguinte forma [1]

$$\begin{bmatrix} P(x) \\ U(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x+H) \\ U(x+H) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x) \cdot e^{jqh} \\ U(x) \cdot e^{jqh} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Reescrevendo a equação 15 obtemos uma equação característica

$$\det \left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-jqh} & 0 \\ 0 & e^{-jqh} \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (16)$$

Substituindo $\xi = e^{-jqh}$ na equação 16, o seguinte problema de autovalor é obtido

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \xi & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - \xi(T_{11} + T_{22}) + |T| = 0. \quad (17)$$

Na equação 17 por meio do princípio da reciprocidade, $|T| = [T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}] = 1$, portanto as ondas de Bloch que se propagam na direção x positiva ou negativa exibem a mesma dispersão. Desta forma, reescrevendo a equação 17 a forma usual da relação de dispersão de Bloch pode ser encontrada como [1, 15]

$$\xi^2 + 1 = \xi(T_{11} + T_{22}) \implies \xi + \frac{1}{\xi} = T_{11} + T_{22}, \quad (18)$$

finalmente substituindo ξ por e^{-jqh} encontramos o número de onda de Bloch, ou seja,

$$e^{-jqh} + e^{jqh} = T_{11} + T_{22} \implies 2 \cos(qh) = T_{11} + T_{22}, \quad (19)$$

$$q = \frac{\cos^{-1} \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2} \right)}{h}. \quad (20)$$

É imediato perceber que a relação de dispersão da estrutura periódica torna-se uma relação funcional entre a frequência temporal (ω) e a frequência espacial de Bloch (q) [16]. Consequentemente a velocidade de fase é obtida da seguinte forma

$$\tilde{c}_p = \text{Re} \left(\frac{\omega}{q} \right). \quad (21)$$

2.4. Método experimental

A dispersão das ondas no MMA foi avaliada experimentalmente utilizando um *setup* experimental fundamentado na norma ASTM E-2611-9 [17]. Em síntese a configuração experimental baseia-se em um tubo de impedância cilíndrica com diâmetro $\Phi = 46$ mm, onde uma fonte sonora geradora de ondas planas é alojada em uma das extremidades do tubo, a amostra do MMA é acoplada no centro do tubo e ao final do tubo tem-se uma terminação com duas condições de contorno distintas. Uma representação de toda a cadeia de sinal é ilustrado na Figura 2. Um sinal aleatório com mesma densidade de energia em todas as frequências (ruído branco) foi gerado e amplificado por um amplificador (Bruel & Kjaer tipo 2718) [18]. Quatro microfones condensadores de 1/2 polegada (Bruel & Kjaer 4971-H-041) em posições fixas registraram a pressão sonora e um sistema de aquisição de dados (Bruel & Kjaer LAN-XI tipo 3160-B-042 com *software BK Connect*) foi empregado para adquirir e processar os sinais. Na configuração do *setup* x_1 e x_2 são as distâncias entre a face a jusante da amostra e os microfones 1 e 2, respectivamente. Da mesma forma, x_3 e x_4 são as distâncias entre a face a montante da amostra e os microfones 3 e 4. Os sinais adquiridos foram exportados em formato de arquivo universal (uff) e pós-processado no *software MATLAB*. Importante destacar que no interior do tubo o padrão de ondas estacionárias resultante é decomposto em componentes de deslocamento para frente e para trás medindo a pressão sonora simultaneamente nos quatro microfones e examinando suas amplitudes e fases relativas. Deste modo, a partir das duas condições de contorno representadas pelas letras *a* (anecóica) e *r* (rígida), o objetivo é determinar uma matriz de transferência ($\mathbf{T}_t$) que relaciona dois vetores de estado $T = (P, U)^{a,r}$ em função da pressão acústica (P) e da velocidade de partículas (U) em ambos os lados da amostra do MMA [17]

$$\mathbf{T}_0^{a,r} = \mathbf{T}_t \mathbf{T}_H^{a,r} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}_H^{a,r}. \quad (22)$$

Para cada condição *a* e *r* os campos de ondas sonoras dentro do tubo são decompostos da seguinte forma

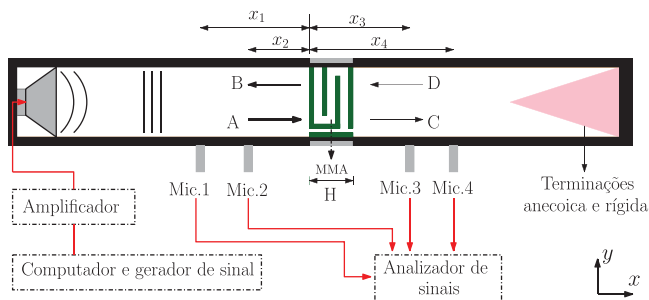


Figura 2: Setup experimental para análise da relação de dispersão sonora do MMA.

$$A = j \frac{H_{11}e^{-jk_0(x_2)} - H_{21}e^{-jk_0(x_1)}}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, \quad (23)$$

$$B = j \frac{H_{21}e^{jk_0(x_1)} - H_{11}e^{jk_0(x_2)}}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, \quad (24)$$

$$C = j \frac{H_{31}e^{jk_0(x_4)} - H_{41}e^{jk_0(x_3)}}{2 \sin(k_0(x_4 - x_3))}, \quad (25)$$

$$D = j \frac{H_{41}e^{-jk_0(x_3)} - H_{31}e^{-jk_0(x_4)}}{2 \sin(k_0(x_4 - x_3))}, \quad (26)$$

com $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c_0$ representando o número de onda no ar. Note que temos quatro funções resposta em frequência (FRF), sendo a primeira FRF de referência H_{11} um vetor com valores unitários de mesma dimensão da faixa de frequência adotada nas análises, as demais FRFs nas equações 23–26 são obtidas nos ensaios. Desta forma, as pressões e velocidades exatamente nas faces jusante e montante do MMA para cada condição de contorno são dadas por

$$P_0^{a,r} = A + B, \quad (27)$$

$$U_0^{a,r} = \frac{(A - B)}{Z_0}, \quad (28)$$

$$P_H^{a,r} = Ce^{-jk_0H} + De^{jk_0H}, \quad (29)$$

$$U_H^{a,r} = \frac{(Ce^{-jk_0H} - De^{jk_0H})}{Z_0}. \quad (30)$$

Portanto, a matriz de transferência (equação 22) pode ser reescrita como [17]

$$\mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0^a U_H^r - P_H^r U_0^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_0^a} & \frac{P_0^r P_H^a - P_0^a P_H^r}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_0^a} \\ \frac{U_0^a U_H^r - U_0^r U_H^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_0^a} & \frac{P_H^a U_0^r - P_H^r U_0^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_0^a} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

Por fim, a partir dos coeficientes da equação 31 o número de onda de Bloch experimental é obtido da seguinte forma

$$q = \frac{1}{h} \cos^{-1} \left(\frac{t_{11} + t_{22}}{2} \right). \quad (32)$$

Consequentemente, a velocidade de fase pode ser derivada de acordo com a equação 21.

3. Resultados e Discussões

As avaliações apresentadas nesta seção sucedem primeiramente sobre a dispersão no guia de ondas na ausência dos dispersores e em seguida a relação de dispersão do MMA. O comportamento da velocidade de fase na estrutura também é discutido, por fim, apresentaremos uma importante estratégia para estabelecer a localização dos *bandgaps* na estrutura, uma vez que tal procedimento é raramente abordado na literatura. Nesta perspectiva, uma amostra da estrutura foi fabricada utilizando a tecnologia de impressão 3D pela técnica de fotopolimerização em cuba, conforme ilustrado na Figura 3.



Figura 3: Amostra do MMA prototipado por meio da tecnologia de impressão 3D. Parâmetros geométricos (em mm) usados nas análises: $m = 29,0$; $L = 56,0$; $h = 20,0$; $d_g = 2,5$; $b = 1,5$ e $n = 2$ e 3 .

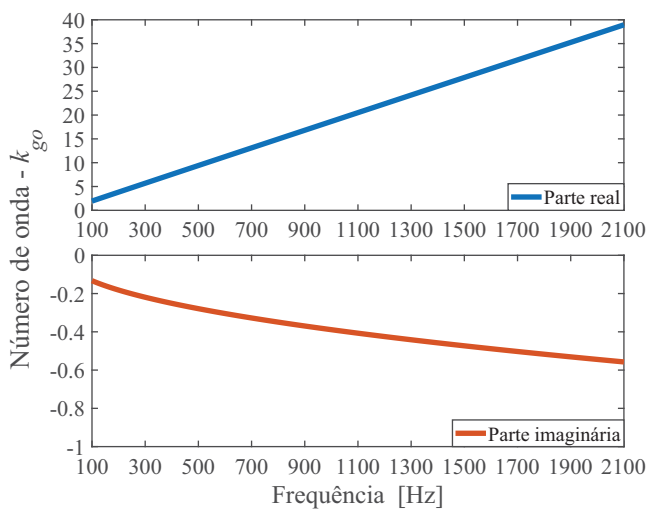


Figura 4: Comportamento teórico da relação de dispersão no guia de ondas na ausência dos dispersores.

Os parâmetros geométricos adotados na fabricação e análises a seguir são listados na legenda da figura.

A Figura 4 exibe o comportamento teórico da relação de dispersão no guia de ondas na ausência dos dispersores. Devido as perdas visco-térmicas esta relação apresenta componentes real e imaginária. A parte real que caracteriza a propagação sonora é linear com a frequência apresentando valores que variam de 1,96 a 39,0, e este comportamento é característico e similar ao de uma onda que se propaga em um meio homogêneo e aperiódico. Por outro lado, a componente imaginária que representa a atenuação de propagação apresenta valores

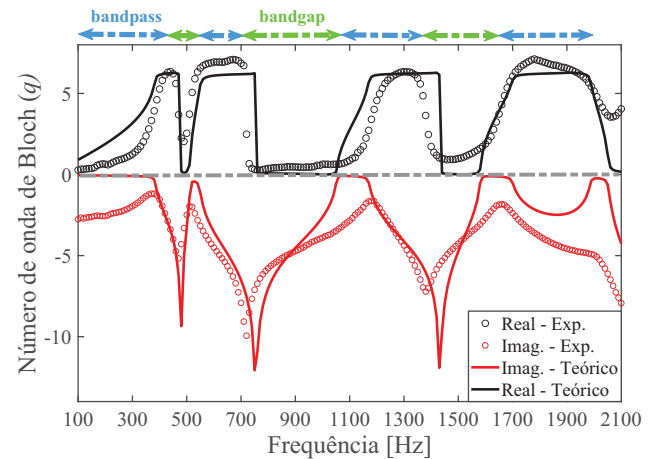


Figura 5: Comportamento teórico e experimental da relação de dispersão no MMA.

que variam de $-0,14$ em 100 Hz até $-0,56$ em 2.100 Hz, ou seja, a atenuação sonora no guia de ondas é mais proeminente nas altas frequências.

A relação de dispersão no metamaterial acústico é apresentada na Figura 5, e uma boa concordância entre os métodos teórico e experimental pode ser observado. Na Seção 2.3 contemplamos que as ondas de Bloch apresentam uma dispersão que independe da direção de propagação uma vez que o $\det[T] = 1$ no problema de autovalor da equação 17, desta forma, é apresentado a relação de dispersão da estrutura somente para ondas progredindo positivamente. Podemos observar que a dispersão no metamaterial é notavelmente forte quando os dispersores são acoplados no guia de ondas, dando então origem física aos *bandgaps* da estrutura (ver setas verdes horizontais). Nas regiões de *bandgap* a propagação das ondas sonoras é do tipo evanescente pois a parte imaginária do número de onda de Bloch é diferente de zero. Neste caso a componente $\text{imag.}(q)$ é uma função não linear com a frequência, em outras palavras, a atenuação sonora é exponencial e as ondas são dispersivas. Além disso, a componente $\text{real}(q)$ permanece constante ao longo de toda banda de frequência proibida. Os *bandgaps* são, portanto, bandas de frequência associadas a um único comprimento de onda de Bloch [1]. Por outro lado, na região das bandas de passagem ou *bandpass* (ver setas azuis horizontais) o número de onda de Bloch é real e uma função não linear com a frequência, o que demonstra que as ondas sonoras na banda de passagem também são dispersivas. Ao longo do espectro de frequência existem três regiões de *bandgap* na estrutura, os dois primeiros tem sua origem física devido às ressonâncias dos dispersores, o outro *bandgap* tem sua origem na periodicidade da estrutura, devido ao fenômeno de interferência destrutiva das ondas sonoras. Comportamento semelhante a estes foram observados experimentalmente por Almeida *et al.* [8] e Theocharis *et al* [19].

Uma questão importante a ser destacada entre estruturas periódicas do tipo cristais sônicos e metamateriais acústicos periódicos é o espaçamento e o tamanho dos dispersores. Para que haja interação com as ondas sonoras, os cristais sônicos exigem que estes sejam da ordem do comprimento de onda (λ) da onda propagante, como λ aumenta a medida que diminui a frequência, os cristais sônicos exigem grandes escalas para atuarem em frequências com longos comprimento de onda. Por outro lado, veja que os dispersores do metamaterial avaliado apresentam um espaçamento ou constante de rede da ordem de milímetros ($h = 20$) e este atua eficientemente na região de longos comprimento de onda, tal viabilidade é possível principalmente pelas perdas visco-térmicas serem amplamente consideradas na estrutura. Portanto, a partir do arranjo geométrico combinado às perdas visco-térmicas e principalmente pela física subjacente ao seu comportamento, a estrutura relatada encontra diversas aplicações práticas de aspecto científico-tecnológico, por exemplo: controle e manipulação sonora, filtragem acústica, camuflagem acústica, lentes acústicas e outros.

Com relação a velocidade de fase das ondas de Bloch que se propagam na estrutura, a Figura 6 exibe o seu comportamento e uma boa concordância entre os métodos é observada. Como grupo de controle a velocidade de fase no ar ($c_0 = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0} = 343$ m/s), a velocidade de fase no guia de ondas na ausência dos dispersores e a velocidade de fase nos dispersores são plotadas também. A velocidade de fase de um meio homogêneo e não dispersivo é constante, no caso do ar, a magnitude da velocidade de fase corresponde à velocidade do som [20]. Neste caso a velocidade de fase é uma função da rigidez do ar ($K_0 = \gamma P_0$), da densidade e sua magnitude depende da temperatura, pressão e composição do ar. No caso do dispersor (ver curva magenta), a velocidade de fase ($\tilde{C}_p = \sqrt{K_d/\rho_d}$) é constante e apresenta magnitude (260 m/s) menor que a velocidade no ar, este resultado se deve as perdas visco-térmicas consideradas por meio

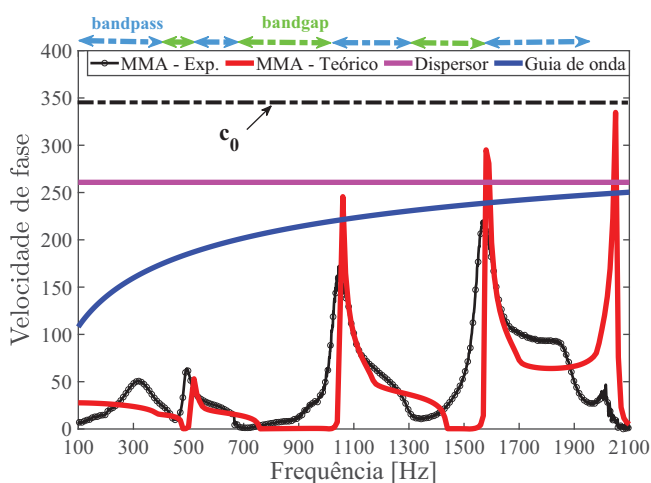


Figura 6: Comportamento teórico e experimental da velocidade de fase no MMA.

das equações 10 e 11, respectivamente. Agora dado que não existe *bandgap* no guia de ondas na ausência dos dispersores, sua velocidade de fase apresenta magnitude que varia de 110 m/s até 250 m/s. Notadamente, por apresentar seção transversal menor que o dispersor, a velocidade de fase no guia de onda diminui a medida que o comprimento de onda aumenta, e este comportamento é devido aos efeitos visco-térmicos serem inversamente proporcional a frequência [21], ou seja, $\delta_v = \sqrt{\text{Pr}} \cdot \delta_t \approx (\sqrt{f})^{-1}$, com δ_v representando a camada limite viscosa e δ_t a térmica. Considerando a dispersão causada pelos dispersores locais acoplados ao guia de onda, a velocidade de fase no MMA em geral é significativamente reduzida em comparação as demais velocidades de fase. Desta forma podemos concluir que a propagação das ondas na estrutura apresenta regime lento e subsônico. Além disso, corroborando o modelo teórico note que nas regiões que antecendem os *bandgap* a velocidade de fase decai rapidamente e tende a zero no *bandgap*, e este comportamento confirma o caráter evanescente das ondas de Bloch na estrutura.

Por fim, apresentamos uma estratégia afim de avaliar e possivelmente determinar a localização dos *bandgaps* que o MMA fornece, para isso adotamos uma razão adimensional, ou seja, uma razão entre o comprimento total dos dispersores e a periodicidade da estrutura (L_f/h). Na prática esta adimensionalidade nos permite quantificar a resistência acústica total dos *bandgaps* e consequentemente sua localização. Nas análises a seguir a periodicidade $h = 20$ mm foi mantida fixa e o tamanho dos dispersores foram variados. A Figura 7 apresenta os resultados desta análise, podemos observar que a medida que esta razão aumenta o primeiro *bandgap*,

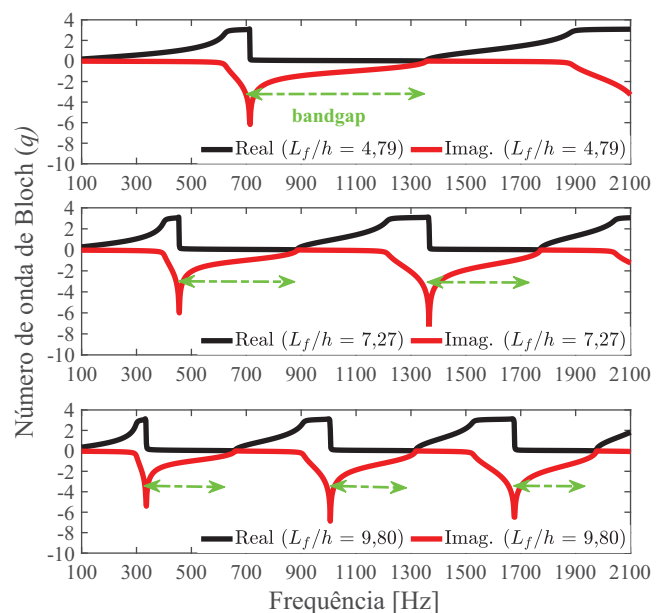


Figura 7: Comportamento teórico do número de onda de Bloch em razão de L_f/h .

o qual está associado às ressonâncias dos dispersores, tem sua localização deslocada para frequências de maior comprimento de onda, embora seu tamanho diminua. Este comportamento está vinculado a um maior caminho no qual a onda tem para se propagar no dispersor, assim como a mudança na impedância acústica do dispersor (equação 8). Por outro lado, os *bandgaps* associado a periodicidade da estrutura somente se revelam quando a razão adimensional L_f/h apresenta maiores valores. Desta forma, com esta estratégia podemos estabelecer em qual região do espectro de frequência se quer estabelecer a banda de frequências proibidas bem como a dimensão desta banda proibida na estrutura.

4. Conclusões

Neste trabalho apresentamos os conceitos de dispersão, velocidade de fase e atenuação seletiva (*bandgap*) relacionado às ondas de Bloch que se propagam em um periódico metamaterial acústico, os quais são pouco abordados nos cursos superior de ciências exatas. Como ferramentas matemáticas necessárias para abordar tais conceitos utilizamos o método da matriz de transferência e o teorema de Bloch-Floquet 1D. Além disso, a verificação destes conceitos foram apoiados por resultados experimentais utilizando um aparato experimental normativo. Pudemos identificar as características de *bandgap* na estrutura e demonstrar que sua origem física surge quando os dispersores são acoplados a um guia de onda e também a periodicidade da estrutura. Embora os resultados apresentados aqui encontrem várias aplicações científica-tecnológicas, recomendamos e gostaríamos que os temas abordados neste trabalho encontrem notoriedade e mais atenção em disciplinas de ensino superior (graduação e pós-graduação) assim como em projetos de pesquisas.

Agradecimentos

Esta pesquisa foi apoiada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC) da Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil. O autor Gildean do N. Almeida agradece o financiamento concedido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Os autores Erasmo F. Vergara e Arcanjo Lenzi agradecem o financiamento dado pela agência de pesquisa Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP, ref. 0028/21, Projeto NOVOMAT21), Brasil.

Referências

- [1] C.E. Bradley, *Acoustic Bloch wave propagation in a periodic waveguide. Technical Report* (University of Texas at Austin, Austin, 1991).
- [2] A. Gupta, *Acoustical Physics* **60**, 223 (2014).
- [3] S. Sneha, P. Golakoti e C. Chetan, in: *Handbook of Vibroacoustics, Noise and Harshness*, editado por N.

- Garg, C. Gautam, S. Rab, M. Wan, R. Agarwal e S. Yadav (Springer, Singapore, 2023).
- [4] G.N. Almeida, E.F. Vergara, L.R. Barbosa e R. Brum, *Applied Acoustics* **172**, 107593 (2021).
- [5] C. Kittel, *Introduction to solid state physics* (Wiley, New York, 1957).
- [6] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
- [7] J.S. Chen e I.T. Chien, *Journal of Applied Mechanics* **84**, 121007 (2017).
- [8] G.N. Almeida, E.F. Vergara, L.R. Barbosa, A. Lenzi e O.M. Silva, *Applied Acoustics* **221**, 110010 (2024).
- [9] F. Bloch, *Z. Physik* **52**, 555 (1928).
- [10] C. Zwiller e C.W. Kosten, *Sound absorbing materials* (Elsevier, New York, 1949).
- [11] M.R. Stinson, *The Journal of the Acoustical Society of America* **89**, 550 (1991).
- [12] F.P. Mechel, *Formulas of acoustics* (Springer Science & Business Media, Berlin, 2013).
- [13] G.N. Almeida, E.F. Vergara e A. Lenzi, *Applied Physics Letters* **123**, 081706 (2023).
- [14] N. Jiménez, O. Umnova e J.P. Groby, *Acoustic waves in periodic structures, metamaterials, and porous media* (Editora Springer, Cham, 2021).
- [15] C.E. Bradley, *The Journal of the Acoustical Society of America* **96**, 1844 (1994).
- [16] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures* (McGraw-Hill Book, New York, 1946).
- [17] ASTM INTERNACIONAL, *ASTM E2611-09. Standard Test Method for Measurement of Normal Incidence Sound Transmission of Acoustical Materials Based on the Transfer Matrix Method* (ASTM Internacional, Conshohocken, 2009).
- [18] G.N. Almeida, E.F. Vergara, A. Lenzi, A.S. Alves e J.C.O. de Jesus, *Journal of Applied Physics* **133**, 235103 (2023).
- [19] G. Theocharis, O. Richoux, R.V. García, A. Merkel e V. Tournat, *New Journal of Physics* **16**, 093017 (2014).
- [20] D. Basu, A.G.U. Perera, D.M. Gingrich, T. Deck, T. Robert, L. Cruz-Cruz, J.M. Collins, M.J. O'Shea, L. Chow, S. Jeffers et al, *Dictionary of pure and applied physics* (CRC press, Boca Raton, 2018).
- [21] D.T. Blackstock, *Fundamentals of physical acoustics* (John Wiley & Sons, New York, 2000).