

O problema da queda livre radial a um buraco negro de Schwarzschild e sua representação por diagramas de Kruskal

The problem of radial free fall into a Schwarzschild black hole and its representation in Kruskal diagrams

Suelen F. Barros^{*1}, André B. Noronha²

¹Instituto Federal de São Paulo, Itaquaquecetuba, SP, Brasil.

²Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Recebido em 20 de março de 2025. Revisado em 07 de julho de 2025. Aceito em 07 de agosto de 2025.

A abordagem do problema da queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild por meio de diagramas espaço-tempo permite uma compreensão mais satisfatória do comportamento das funções do tempo coordenado e do tempo próprio de um corpo massivo em queda, enfatizando o valor didático destas ferramentas em ilustrar graficamente linhas de mundo e relações entre eventos, bem como a interpretação das singularidades na métrica de Schwarzschild. Nesse trabalho apresentam-se os resultados da investigação do problema e suas representações em diagramas de Kruskal, assim como dois estudos de caso acerca das percepções de observadores em queda livre, ora partindo do mesmo raio coordenado em tempos coordenados distintos e ora saindo de raios coordenados diferentes no mesmo tempo coordenado. Ao longo do movimento, os observadores trocam sinais eletromagnéticos entre si, sendo o recebimento destes a base das percepções de cada um. Estes aspectos são discutidos com o auxílio de diagramas, e deixam evidente que em ambos os casos as conclusões de cada observador, baseadas unicamente nas percepções dos sinais recebidos, é divergente. Por outro lado, a análise em termos dos eventos e intervalo invariante permite evidenciar sem ambiguidade quem de fato chega primeiro ao horizonte do buraco negro.

Palavras-chave: Queda livre, buraco negro, métrica de Schwarzschild, diagrama de Kruskal, Kruskal-Szekeres.

The analysis of the free-fall problem in Schwarzschild spacetime via spacetime diagrams offers a rigorous framework for understanding the behavior of coordinate and proper time functions associated with massive bodies undergoing radial free fall. This methodological approach underscores the pedagogical and analytical utility of such diagrams in representing worldlines, delineating causal relationships between events, and interpreting the nature of the Schwarzschild singularities. This study presents a detailed investigation of the free-fall scenario employing Kruskal-Szekeres diagrams, along with two case studies focusing on the relativistic perceptions of observers in free fall—either departing from the same radial coordinate at different coordinate times, or from distinct radial coordinates at a common coordinate time. During their trajectories, the observers exchange electromagnetic signals, and the reception of these signals forms the basis of their respective observational frameworks. The analysis reveals that, in both scenarios, the inferences drawn by each observer, relying solely on received signals, are mutually inconsistent. However, an interpretation based on invariant spacetime intervals and event-based analysis allows for an unambiguous determination of which observer crosses the event horizon first. The results highlight the significance of diagrammatic tools in elucidating key relativistic phenomena and in clarifying common misconceptions related to black hole physics.

Keywords: Free fall, black hole, Schwarzschild metric, Kruskal diagram, Kruskal-Szekeres.

1. Introdução

O problema da gravidade, mais especificamente da queda livre dos corpos, é um dos mais marcantes da história da Física, remontando até mesmo à antiguidade e nomes como Aristóteles e Platão. Seus pensamentos foram bastante influentes na Europa ocidental até a idade moderna, e parcialmente moldaram as concepções sobre espaço, tempo e movimento em iniciativas científicas para compreender estes conceitos e fenômenos. Embora

seja bastante difícil descrever com precisão o desenvolvimento histórico de tais concepções, é lugar comum mencionar personagens associados à chamada revolução científica e seus papéis na compreensão mais abrangente sobre a interação gravitacional, como Galileu e Newton. A popularidade da falsa narrativa da “maçã de Newton” é um reflexo desse processo [1].

A teoria gravitacional newtoniana se baseia na hipótese de que corpos pontuais massivos atraem-se com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas (gravitacionais) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. A partir dessa formulação, foi possível entender a gravidade, em especial

*Endereço de correspondência: suelen.barros@ifsp.edu.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

a queda dos objetos, não apenas como uma interação entre corpos, mas como um fenômeno essencialmente conectado aos conceitos de espaço e tempo. De fato, as noções de “espaço absoluto” e “tempo absoluto” são centrais ao fundamentar asserções envolvendo “tempo de queda” e “altura de queda” dentro da física newtoniana. Para Newton, não há ambiguidade sobre “qual tempo” ou de “qual altura” um determinado corpo cai [2].

Com o advento das teorias relativísticas no início do século XX há uma nova compreensão sobre gravidade, espaço e tempo. Recuperando a expressão newtoniana para força gravitacional no limite assintótico, as chamadas equações de campo de Einstein mostram que a relação entre gravidade, tempo e espaço é agora dinâmica e mais complexa. A interação gravitacional é entendida não mais exatamente como uma força entre corpos, mas sim como a interação destes com o espaço-tempo. Para Einstein, não há mais lugar para noções absolutas de tempo e espaço (no sentido newtoniano), e asserções sobre “tempo de queda” também não têm mais um caráter absoluto, e dependem diretamente do sistema de coordenadas utilizado [3].

Uma maneira de verificar esse caráter não absoluto do tempo de queda de um corpo é por meio de situações ou exemplos envolvendo quedas livres em direção a buracos negros [4]. Sendo objetos extremamente densos que distorcem intensamente o espaço-tempo, buracos negros são assim chamados pois no interior de seus horizontes de eventos a velocidade de escape é superior à velocidade da luz, tornando impossível até mesmo que ela “escape” dele. Essas e outras características levam ao extremo as consequências sobre a questão do tempo de queda de um corpo ao buraco negro. Para alguns sistemas de coordenadas esse tempo de queda pode assumir valores finitos, enquanto para outros ele pode ser infinito. Essas diferenças são apenas mais um exemplo de como as teorias relativísticas demandam o abandono da ideia de tempo absoluto e universal.

Nesse trabalho se abordará o problema da queda livre dos corpos a buracos negros, empregando-se o modelo mais simples destes, o chamado “buraco negro de Schwarzschild”. No espaço-tempo de Schwarzschild considera-se uma singularidade de densidade infinita na origem do sistema de coordenadas, sem carga ou rotação intrínseca. O problema da queda livre, nesse caso, pode ser entendido como o exercício de, em um sistema de coordenadas adotado e com as condições iniciais de interesse, determinar a expressão para o raio coordenado, r , em função do tempo “coordenado”, t . Contudo, a solução analítica resulta em uma relação implícita, assim o problema a ser resolvido se torna encontrar as expressões do tempo coordenado em função do raio coordenado¹, $t(r)$, e do tempo próprio em

função do raio coordenado $\tau(r)$, de um corpo teste massivo² em queda livre a partir de uma posição inicial (esta sendo finita ou não). Com essas funções mais as condições iniciais consideradas, pode-se obter o “tempo coordenado de queda livre” e o “tempo próprio de queda livre” associados à duração da queda do corpo até a singularidade física presente em $r = 0$.

Ainda que o “tempo próprio de queda livre” seja invariante sob transformações generalizadas de coordenadas, diferentes observadores que eventualmente usem sistemas de coordenadas distintos chegarão a conclusões divergentes acerca da duração de queda livre radial de um corpo massivo. Esta é uma característica marcante, dado que no contexto da gravitação newtoniana o “tempo de queda livre de um objeto” é um invariante sob transformações de Galileu [5], isto é, diferentes observadores concordarão entre si sobre ele.

A expressão para $t(r)$ pode ter características particulares dependendo do sistema de coordenadas utilizado, e, eventualmente, a tarefa de compreender seu comportamento ao longo da trajetória de queda pode tornar-se não trivial. Nesse sentido, representações gráficas através de diagramas de espaço-tempo são ferramentas particularmente úteis na compreensão física dos fenômenos ou casos estudados.

Os diagramas de espaço-tempo foram desenvolvidos com o propósito de representar, de forma gráfica e geométrica, as relações entre eventos e as linhas de mundo no contexto de um espaço-tempo descrito por um sistema de coordenadas. Há pouco mais de um século, Hermann Minkowski (1864–1909) [6], na conferência em que discutiu suas considerações de “tendência radical” sobre o espaço-tempo, apresentou exemplos do que se conhece hoje como diagramas de Minkowski. Tais diagramas estão bastante presentes em livros-texto, manuais e em produções científicas na área. Referências clássicas em manuais de Relatividade Geral exploram as potencialidades dos diagramas de espaço-tempo e incentivam seu uso para uma melhor compreensão da teoria [5, 7–9].

A proposta central deste trabalho é apresentar aquilo que é conhecido na literatura como diagrama de Kruskal e discutir as suas potencialidades no problema da queda livre radial no espaço-tempo de Schwarzschild. De início será discutida a solução analítica do problema de queda livre radial de um corpo teste massivo no espaço-tempo de Schwarzschild (com as coordenadas de Schwarzschild), isto é, a determinação das funções $t(r)$ e $\tau(r)$ referentes ao corpo em queda. Em seguida, expõe-se como o sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres e sua representação em um diagrama de espaço-tempo favorecem a interpretação física da queda livre radial rumo ao buraco negro de Schwarzschild pela ausência

¹ Neste trabalho, a menção a tempo ou raio coordenados estará sempre se referindo ao “tempo coordenado de Schwarzschild” e “raio coordenado de Schwarzschild”, respectivamente, salvo afirmação contrária no próprio texto.

² Considera-se aqui que o corpo teste em queda tem uma massa suficientemente pequena para se poder desprezar a perturbação gravitacional que este possa causar ao espaço-tempo e ao buraco negro.

de singularidades de coordenadas. Por fim, apresenta-se dois estudos de caso com observadores em queda livre radial e que podem trocar sinais eletromagnéticos, em diferentes condições iniciais de t e r (mas sempre com mesmo θ e ϕ), e então discute-se as medidas e perspectivas de um com relação ao outro com o auxílio dos diagramas de Kruskal. Pretende-se mostrar neste trabalho que tais diagramas podem ser extremamente úteis à compreensão física do problema em questão, propiciando uma interpretação gráfica relativamente intuitiva e tornando menos difícil a compreensão do formalismo envolvido. De forma mais geral, defende-se que o ensino de Relatividade Geral no nível superior pode ser beneficiado por mais estratégias envolvendo a associação do formalismo com representações gráficas e diagramas, dado que abordagens pautadas somente (ou quase exclusivamente) no formalismo matemático podem ser incompletas e rapidamente desencorajar os estudantes [10].

2. Coordenadas de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild, apresentada em 1916 por Karl Schwarzschild (1873–1916), representa um marco histórico fundamental da Relatividade Geral, sendo a primeira solução exata apresentada para as equações de campo de Einstein, no caso, uma solução estática no tempo e esfericamente simétrica no espaço. Ela descreve o campo gravitacional externo a um corpo massivo sem rotação e com carga elétrica nula, como uma estrela (em primeira aproximação, dado que estrelas realistas possuem rotação e devido a isso não são plenamente esféricas), ou o chamado buraco negro de Schwarzschild.

As coordenadas de Schwarzschild são, portanto, naturalmente interessantes à descrição de um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, além de permitirem a discussão de alguns sistemas rotativos com boa aproximação. Elas permitem a obtenção de estimativas teóricas bastante próximas das medidas experimentais para diversos problemas associados ao movimento planetário do Sistema Solar, como é o caso, por exemplo, da precessão secular do periélio de Mercúrio [5]. Posteriormente, sua contribuição inspirou a busca por outras soluções das equações de campo, como a métrica de Reissner-Nordström para corpos com carga elétrica e sem rotação, a métrica de Kerr para corpos rotativos e a métrica de Kerr-Newman para corpos rotativos com carga elétrica [7]. Em 2016 celebrou-se o centenário da publicação da solução de Schwarzschild [11], em reconhecimento à importância de sua contribuição, que permanece relevante até hoje como uma ferramenta essencial para a compreensão da gravitação e um ponto de partida para investigações mais profundas sobre a natureza do espaço-tempo.

No chamado sistema de coordenadas de Schwarzschild, $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$, a métrica de Schwarzschild, adotando a assinatura $(-, +, +, +)$, é

dada por:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{r_s}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

com $r_s = 2MG/c^2$ o raio de Schwarzschild (ou raio do horizonte de eventos), M a massa do buraco negro, G a constante gravitacional newtoniana e c a velocidade da luz no vácuo.

Usando a métrica (1) na definição de elemento de linha [7]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2)$$

obtem-se o elemento de linha no espaço-tempo de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

É possível identificar na expressão (3) a presença de duas singularidades: uma localizada em $r = r_s$ e a outra em $r = 0$. A primeira delas trata-se de uma singularidade não-física, ou singularidade de coordenadas, uma vez que impõe uma dificuldade de ordem matemática na solução do tempo coordenado para a queda livre, comprometendo sua interpretação física. Já a segunda delas é uma singularidade física, portanto inevitável enquanto característica da solução.

A singularidade de coordenadas é, como o nome sugere, particular do sistema de coordenadas adotado. Isso significa que pode-se evitá-la por meio de uma escolha diferente de sistema de coordenadas. O princípio da covariância geral, um dos alicerces da Relatividade Geral, garante a liberdade de escolha de sistemas de coordenadas à formulação e descrição de leis físicas, ainda que o compromisso com um sistema escolhido possa estar condicionado a sua utilidade e/ou capacidade de facilitar interpretações físicas sobre uma determinada situação ou problema. Em outras palavras, é natural se reconhecer que há sistemas de coordenadas preferíveis frente a outros em razão de características específicas do espaço-tempo que devem ser interpretadas.

3. Constantes de Movimento e Condição Inicial na Queda Livre Radial de Um Corpo Teste

A identificação de simetrias ou constantes de movimento em problemas de física tendem a reduzir a complexidade destes, bem como a quantidade de cálculos envolvidos para se alcançar determinadas soluções. Isto não é

³ Optou-se nesse trabalho em **não** se utilizar as unidades naturais (isto é, o sistema de Planck, com $c = 1$ e $G = 1$).

diferente com a Relatividade Geral, e o formalismo lagrangiano é particularmente útil por relacionar simetrias com leis de conservação. Nesta seção será apresentada a relação de energia total para uma partícula no espaço-tempo de Schwarzschild, fundamental na determinação das funções $t(r)$ e $\tau(r)$.

Considera-se um corpo teste massivo em um espaço-tempo de Schwarzschild, a princípio localizado no ponto de coordenada $r = R_0$, que iniciará um movimento de queda livre em direção à singularidade ($r = 0$) partindo do repouso. Será discutido neste trabalho apenas quedas livres radiais, o que implica, portanto, em θ e ϕ fixos, e, consequentemente, $d\Omega = 0$. Sendo assim, adotando como parâmetro afim o tempo próprio τ , a lagrangiana para o corpo em queda radial nas coordenadas Schwarzschild, (ct, r, θ, φ) terá a forma [5]:

$$\mathcal{L} = \left[- \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

com $\dot{t} = dt/d\tau$ e $\dot{r} = dr/d\tau$.

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para a coordenada temporal t , chega-se na constante do movimento k , fundamental ao problema da queda livre radial:

$$- \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \dot{t} = k. \quad (5)$$

A constante k é identificada como $\mathcal{E}$, a energia total por unidade de massa do corpo [7, 12], conforme brevemente justificado no apêndice A. Assim, fica-se com:

$$- \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \dot{t} = \mathcal{E}, \quad (6)$$

A expressão acima permite obter uma relação para $\dot{t}$ em função da energia total por unidade de massa do corpo:

$$\dot{t} = - \frac{\mathcal{E}}{c^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \quad (7)$$

Por outro lado, sabe-se que a velocidade própria é o vetor tangente à linha de mundo de um objeto, portanto definida no plano tangente à variedade em um determinado ponto considerado desta, cuja normalização para a assinatura empregada é dada por [8]:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2, \quad (8)$$

sendo η a métrica de Minkowski. Cabe lembrar que a relação acima é geral, dado que mesmo em um espaço-tempo curvo, pode-se, pelo princípio da equivalência, considerar localmente o espaço-tempo nas vizinhanças de um ponto como plano (o que justifica o uso da métrica de Minkowski na equação (8)). Ademais, do cálculo tensorial tem-se que a norma de um quadrivetor é invariante sob transformações gerais de coordenadas, o que evidencia o caráter geral da expressão (8).

Da relação entre as equações (2) e (8), encontra-se a expressão clássica que envolve tempo próprio e o elemento de linha ds :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (9)$$

Aplicando a métrica na quadri-velocidade própria parametrizada por τ , e usando as relações (7) e (9), chega-se no resultado:

$$- \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 = -c^2, \quad (10)$$

que pode ser reescrito como:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{r_s c^2}{2r}, \quad (11)$$

com

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - c^2 \right). \quad (12)$$

A expressão (11) resulta diretamente das simetrias do espaço-tempo – no caso, o espaço-tempo de Schwarzschild – e dos princípios da Relatividade Geral, em particular da conservação de energia associada à simetria temporal da métrica. Como a métrica de Schwarzschild é estática (isto é, não depende explicitamente do tempo), existe um vetor de Killing temporal, o que implica a existência de uma quantidade conservada ao longo da trajetória geodésica de um corpo massivo. Trata-se, portanto, de definição de uma grandeza física real e mensurável, que corresponde à energia total da partícula (incluindo energia cinética, potencial gravitacional e de repouso), normalizada pela sua massa.

Cabe chamar atenção para o fato de que a relação (11) é bastante semelhante à expressão de energia total para uma partícula na gravitação newtoniana⁴. Com ela é possível estabelecer diferentes condições iniciais, em particular, para queda livre radial de um corpo partindo da posição inicial $r = R_0$ com velocidade inicial nula:

$$\tilde{\mathcal{E}} = - \frac{r_s c^2}{2R_0}, \quad (13)$$

A relação acima será útil à obtenção das expressões das funções $t(r)$ e $\tau(r)$.

3.1. Tempo coordenado de Schwarzschild

O tempo coordenado (de Schwarzschild) é usualmente associado às medidas de tempo feitas por observadores externos ao horizonte de eventos utilizando os “relógios de Schwarzschild”, sendo estes dispostos em todos os pontos do espaço-tempo para $r > r_s$. Diferentemente dos “relógios de Minkowski” no espaço-tempo plano, eles estão constantemente dessincronizados em razão da

⁴ De fato, tomando $r_s = 2MG/c^2$ e tornando explícita a massa da partícula na relação $\tilde{\mathcal{E}} = E/m$ (com E sendo a energia total da partícula) tem-se:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

A relação só não é idêntica àquela da gravitação newtoniana em razão da presença da derivada de r no tempo próprio (ainda que, no contexto da mecânica newtoniana, não exista distinção entre tempo próprio e coordenado).

dilatação gravitacional do tempo. Isto é, seja para um observador a uma distância fixa do horizonte de eventos ou para um observador distante do buraco negro, se notar que relógios mais próximos do horizonte “marcham” mais lentamente do que aqueles mais afastados, impossibilitando qualquer manutenção de sincronicidade entre eles. Por essa razão, é usual se propor a associação das coordenadas de Schwarzschild somente às medidas feitas por observadores distantes do buraco negro, pois nesse caso o espaço-tempo de Schwarzschild se torna assintoticamente plano e os relógios de Schwarzschild marcham como relógios de Minkowski [13]. Entretanto, a associação das coordenadas de Schwarzschild com as medidas feitas por um observador distante é mais oportuna do que natural, e não evita as consequências da singularidade de coordenadas em $r = r_s$ sobre o comportamento de $t(r)$ em regiões próximas ao horizonte de eventos.

Busca-se nessa seção determinar a expressão do tempo coordenado em função do raio coordenado, $t(r)$. Para isso, será aplicado na equação (7) a igualdade $\dot{t} = (dt/dr)\dot{r}$, junto com a definição apresentada na equação (11) e a condição inicial da expressão (13), o que leva à seguinte relação entre o tempo coordenado e raio coordenado [14]:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{R_0}}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{R_0}}}$$

Separando as variáveis e integrando t' de t_0 a t , e r' de R_0 a r , obtém-se:

$$\int_{t_0}^t dt' = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s} - 1} \int_{R_0}^r \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r'}\right) \sqrt{\frac{R_0}{r'} - 1}} dr' \quad (14)$$

A resolução das integrais da equação acima leva ao resultado abaixo (conforme detalhado no apêndice B):

$$\begin{aligned} t(r) = & \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s} - 1} \\ & \times \left[(R_0 + 2r_s) \arctan \left(\sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right) + r \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right] \\ & + \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{\sqrt{r(R_0 - r_s)} + \sqrt{r_s(R_0 - r)}}{\sqrt{r(R_0 - r_s)} - \sqrt{r_s(R_0 - r)}} \right| + t_0 \end{aligned} \quad (15)$$

A expressão (15) carrega a singularidade de coordenadas em $r = r_s$, o que introduz obstáculos na resolução da equação (14), e também dificulta a interpretação do comportamento físico do tempo coordenado em determinadas situações. Para $r = r_s$, por exemplo, nota-se que o tempo coordenado tende a infinito. A interpretação usual é a de que para um observador externo

ao horizonte de eventos, utilizando as coordenadas de Schwarzschild, um corpo em queda livre leva um tempo coordenado infinito caindo sobre o horizonte de eventos. Quaisquer sinais eletromagnéticos emitidos pelo corpo nessa situação no sentido oposto ao horizonte sofreriam um *redshift* infinito. O *redshift* gravitacional é uma previsão fundamental da Relatividade Geral, o que dá sustentação a esta interpretação na forma como posta acima [13]. Porém, permanecendo-se nas coordenadas de Schwarzschild, a ideia de “travessia” do horizonte de eventos não é bem definida (ver apêndice B), tampouco o movimento de um corpo além deste.

Na região $r < r_s$ a derivada da expressão (15) em função do raio coordenado é positiva. Isso implica que com o decréscimo da coordenada radial além do horizonte de eventos (isto é, com o corpo caindo inexoravelmente à singularidade física em $r = 0$) o tempo coordenado tem um comportamento retrógrado. As coordenadas r e t de Schwarzschild acabam por “trocar” suas características: t se torna uma coordenada tipo espaço, enquanto r se torna uma coordenada tipo tempo. Uma interpretação literal desta vez precisaria conter elementos indesejados para uma descrição física mais satisfatória, como a ideia da partícula “voltar no tempo” do infinito para então alcançar a singularidade em um tempo coordenado finito.

Ainda que eventos na região $r < r_s$ sejam inacessíveis a observadores externos, é razoável se procurar algum sistema de coordenadas que forneça ao menos uma menor dificuldade de interpretação física das soluções do problema de queda livre radial em qualquer região. De fato, existem sistemas de coordenadas que cumprem este objetivo, como o de Kruskal-Szekeres.

3.2. Tempo próprio

O tempo próprio de queda livre refere-se ao intervalo de tempo necessário para um corpo cair desde a posição inicial $r = R_0$ até a singularidade física medido pelo observador em queda utilizando o seu próprio relógio. Medidas feitas por observadores em seus sistemas de referência inerciais locais (conceito esse sustentado pelo princípio da equivalência) têm um caráter distinto daquelas associadas a raios e tempos coordenados de diferentes sistemas de coordenadas, principalmente no que se refere à medida do tempo próprio, pois se trata de um invariante. Naturalmente, isto não significa que os referenciais inerciais locais são sistemas de referência privilegiados.

Para encontrar a expressão do tempo próprio em função do raio coordenado, $\tau(r)$, parte-se das mesmas condições utilizadas na subseção anterior. Com (13) em (10) pode-se obter a relação entre raio coordenado e tempo próprio:

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \sqrt{r_s \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right)} \quad (16)$$

Integrando separadamente em r' de R_0 a r , e em τ' de τ_0 a τ , chega-se em:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \int_{R_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{R_0}{r'} - 1}} dr' \quad (17)$$

A solução para a integral em r' acima é apresentada no apêndice C, e resulta em:

$$\tau(r) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \left[R_0 \arctan \left(\sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right) + r \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right] + \tau_0 \quad (18)$$

Pode-se assumir que o observador preste a entrar em movimento ajusta seu relógio para zero no mesmo instante em que inicia seu movimento, neste caso $\tau_0 = 0$.

O resultado da expressão (18) leva diretamente a um intervalo de tempo próprio finito para a queda livre radial partindo do repouso desde a posição $r = R_0$, no instante de tempo $\tau_0 = 0$, até a singularidade física em $r = 0$:

$$\tau(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \tau(r) = \frac{\pi R_0}{2c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}}, \quad (19)$$

que é, curiosamente, idêntica à previsão do tempo de queda livre na gravitação newtoniana para uma posição R_0 qualquer.

O comportamento do tempo próprio em função do raio coordenado é claramente mais fácil de interpretar do que aquele do tempo coordenado. Não há pontos singulares antes de $r = 0$, tampouco comportamento retrógrado de $\tau(r)$ em qualquer região. Para um observador qualquer em queda livre radial de uma posição $r = R_0$ em direção à singularidade física utilizando seu relógio próprio, os tempos necessários tanto para atravessar o horizonte de eventos como para atingir a singularidade em $r = 0$ serão finitos.

Importante salientar que a relação (19) não deve ser tomada como um tempo definitivo de queda livre radial a partir de uma posição R_0 , ou como uma medida mais objetiva que aquelas de outros observadores com outros sistemas de coordenadas. Diferentes observadores obterão medidas distintas sobre o tempo necessário para a queda, em função de quais sistemas de coordenadas considerarem, e essas medidas serão legítimas. Por outro lado, assim como se argumentou no caso do tempo coordenado, associar diretamente as medidas do relógio próprio de um determinado observador a este próprio observador é uma consideração antes mais oportuna do que natural. O observador em queda livre poderia, a princípio, utilizar as coordenadas de Schwarzschild para realizar suas medidas sobre eventos, ainda que notasse as discrepâncias com os valores dos relógios de Schwarzschild em seu relógio próprio. Este é um ponto crucial na compreensão e também no ensino

de relatividade a nível superior, dado que a tendência de misturar tais conceitos (sistemas de coordenadas e sistemas de referência) por vezes não é incomum e pode levar a confusões conceituais [15].

3.3. Diagramas de espaço-tempo de Schwarzschild

Um diagrama de Schwarzschild é representado graficamente por eixos ortogonais ct e r (tempo e raio coordenados de Schwarzschild, respectivamente). Apesar de seu valor didático em representar graficamente conceitos como eventos e linhas de mundo, o diagrama de Schwarzschild acaba por carregar consigo o comportamento singular em $r = r_s$, e isso é evidente em suas ilustrações. A Figura 1 traz as diferentes soluções para o tempo de queda livre radial: do tempo coordenado e do tempo próprio, aqui apresentadas de forma analítica nas seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Na figura mostra-se a geodésica de um corpo teste massivo em queda livre radial partindo do repouso de uma posição finita $R_0 = 1.5 r_s$. A linha contínua foi calculada utilizando o tempo coordenado como parâmetro, conforme a equação (15), enquanto que a linha tracejada foi determinada usando o tempo próprio como parâmetro, conforme a equação (18). O comportamento da linha de mundo tendo como parâmetro o tempo coordenado apresenta as características já descritas na interpretação da equação (15): o tempo coordenado tende a infinito em $r = r_s$, “decrece” na região $r < r_s$, e em $r = 0$ assume

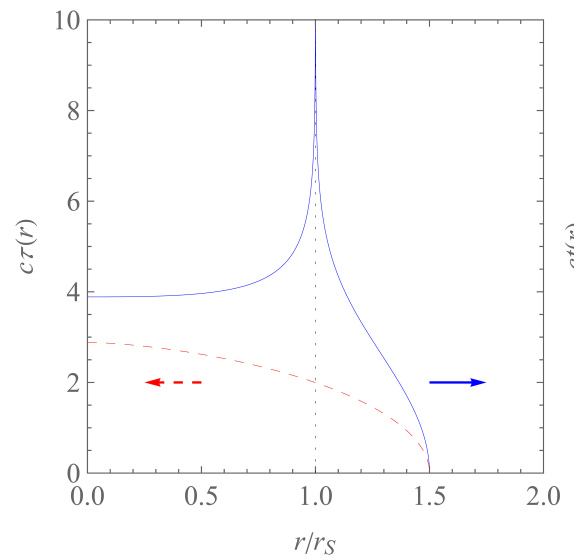


Figura 1: Geodésicas de um corpo massivo, partindo do repouso na posição $R_0 = 1.5 r_s$, em queda livre radial, $d\Omega = 0$, em direção ao centro de um buraco negro, representadas em um diagrama de Schwarzschild para as regiões interna e externa. A linha contínua (em azul) traz a curva do tempo coordenado em função do raio coordenado, equação (15), e a linha tracejada (em vermelho) traz a mesma curva, mas para o tempo próprio em função do raio coordenado, equação (18).

um valor finito. Por outro lado, o comportamento da linha de mundo referente ao tempo próprio como parâmetro apresenta características mais simples de serem interpretadas: na perspectiva do observador em queda livre, ele simplesmente atravessa o horizonte de eventos e cai em direção à singularidade. Nota-se claramente aqui que essas características acerca do tempo de queda de um corpo em queda livre são mais claras de serem apresentadas por meio de diagramas como o da Figura 1, do que por meio apenas das expressões (15) e (18).

4. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Um tópico amplamente discutido em manuais de Relatividade Geral refere-se justamente à comparação do sistema de coordenadas de Schwarzschild com outros tais como de Eddington-Finkelstein, de Gullstrand Painlevé, de Novikov e Kruskal-Szekeres, particularmente no que se refere às singularidades de coordenadas [7–9, 12]. Pelo princípio da covariância, nenhum destes sistemas de coordenadas é mais significativo que o outro, por outro lado, não se pode ignorar o fato de alguns deles oferecem vantagens interpretativas em contextos didáticos ou computacionais, mesmo quando envolvem maior complexidade formal.

O sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres, apresentado independentemente por ambos em 1960 [16, 17], é neste sentido particularmente interessante. Com as coordenadas de Kruskal-Szekeres é possível estender a solução de Schwarzschild para além do horizonte de eventos, eliminando a singularidade de coordenadas presente nas coordenadas de Schwarzschild. Essa característica crucial das coordenadas de Kruskal-Szekeres deixa evidente que o ponto $r = r_s$ não representa uma singularidade física real, permitindo que se descreva tanto a região fora quanto a região dentro do buraco negro em uma única estrutura. É nesse sentido que essas coordenadas são a máxima extensão analítica do espaço-tempo de Schwarzschild [5]. Isto é, de maneira mais livre, as coordenadas de Kruskal-Szekeres mapeiam de forma mais ampla o espaço-tempo em questão quando comparadas com as próprias coordenadas de Schwarzschild, e proporcionam uma descrição contínua e global do espaço-tempo de Schwarzschild, inclusive para a região $r < r_s$. Por outro lado, tal extensão expõe estruturas teóricas não imediatamente sugeridas anteriormente, como a singularidade do passado (ou buraco branco), o horizonte do passado e a ponte de Einstein-Rosen. [8]

As coordenadas de Kruskal-Szekeres $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (v, u, \theta, \varphi)$ são definidas em termos do tempo e raio coordenados de Schwarzschild (ct, r) . Para a região exterior ao horizonte de eventos ($r > r_s$), tem-se [8]:

$$u(t, r) = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) \quad (20)$$

$$v(t, r) = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right), \quad (21)$$

enquanto que para a região interior, ($r < r_s$):

$$u(t, r) = \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh \left(\frac{ct}{2r_s} \right) \quad (22)$$

$$v(t, r) = \left(1 - \frac{r}{r_s} \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh \left(\frac{ct}{2r_s} \right), \quad (23)$$

sendo que em $r = r_s$ ocorre $|u| = |v|$, conforme será discutido na seção 5.

A métrica da equação (1) pode ser escrita nas coordenadas de Kruskal-Szekeres usando a relação de transformação [9]:

$$k_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\delta}, \quad (24)$$

o que leva ao resultado:

$$k_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (25)$$

Com a métrica da expressão (25) aplicada na definição da equação (2) (mais exatamente, reescrevendo a equação (2) com $(y^0, y^1, y^2, y^3) = (v, u, \theta, \phi)$ tal que $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = k_{ab} dy^a dy^b$), obtêm-se o elemento de linha nas coordenadas de Kruskal-Szekeres:

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (26)$$

em que r é agora uma função implícita de v e u .

No elemento de linha da expressão (26) pode-se notar a ausência da singularidade de coordenadas em $r = r_s$, explícita no segundo termo da expressão (3). Por outro lado, é fácil identificar a persistência da singularidade física em $r = 0$.

Ainda que sejam menos intuitivas e mais complexas do que as coordenadas de Schwarzschild, as coordenadas de Kruskal-Szekeres têm um importante valor formal, descritivo e também didático, particularmente com sua representação em diagramas. Do ponto de vista físico, conforme será discutido adiante, linhas de mundo desenhadas por meio dessas coordenadas são suaves no horizonte de eventos $r = r_s$, deixando evitente que ele é apenas uma fronteira causal, e não uma “parede infinita”, como pode ser erroneamente inferido a partir de uma análise superficial de representações como a da Figura 1. Isto é, essas coordenadas permitem representar trajetórias de partículas atravessando o horizonte regularmente.

Por fim, cabe mencionar que as coordenadas de Kruskal-Szekeres são um passo intermediário crucial no caminho para construir o diagrama de Carter-Penrose (ou diagrama conforme), que é uma representação compacta e global do espaço-tempo de Schwarzschild.

5. Diagramas de Espaço-Tempo de Kruskal

Uma vez que as coordenadas de Kruskal-Szekeres não contêm singularidades de coordenadas, é esperado que seu uso para descrição de eventos e linhas de mundo em diagramas espaço-tempo sejam de mais fácil compreensão do que aquelas do diagrama de Schwarzschild. De fato, as transformações (20), (21), (22) e (23) permitem identificar algumas relações úteis à compreensão da estrutura daquilo que é conhecido na literatura como diagrama de Kruskal.

Para a região externa ao horizonte de eventos, aplicando as definições (20) e (21) na identidade trigonométrica hiperbólica fundamental, obtêm-se a expressão:

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{r/r_s} \quad (27)$$

A equação acima tem uma consequência direta na interpretação das linhas de mundo no diagrama de Kruskal. Ela mostra que para corpos em posições fixas em relação à singularidade física do buraco negro de Schwarzschild, suas linhas de mundo no diagrama de Kruskal são hipérboles entre o quarto e primeiro quadrantes. No entanto, pela natureza quadrática da relação acima, temos que hipérboles entre o segundo e terceiro quadrantes também são soluções, como mostrado a Figura 2. Essa representação é diferente do que se tinha no diagrama espaço-tempo nas coordenadas de Schwarzschild, no qual as linhas de mundo de corpos em posições fixas em relação à singularidade física eram representadas por linhas verticais, Figura 1.

De forma análoga, para a região interna, tem-se:

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) e^{r/r_s} \quad (28)$$

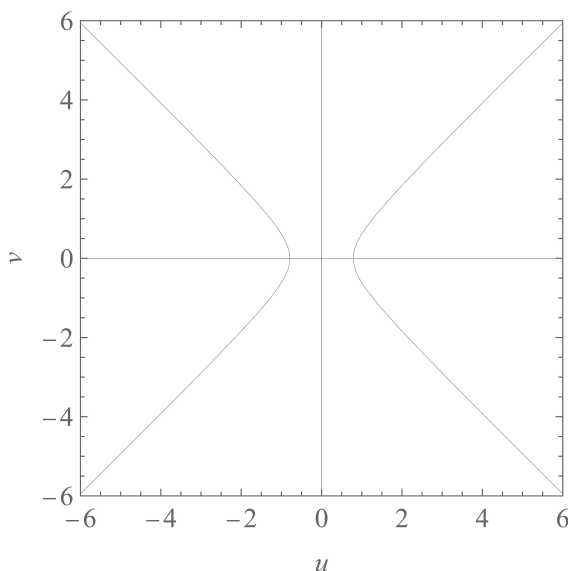


Figura 2: Linha de mundo no diagrama de Kruskal para um corpo fixo na posição $r = 1.19 r_s$.

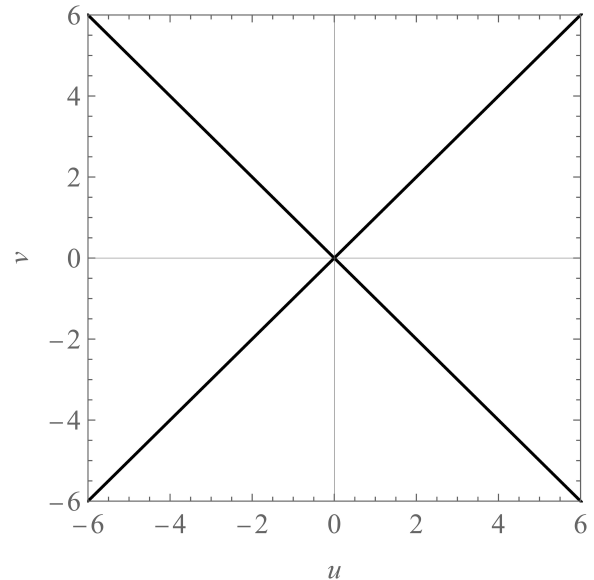


Figura 3: Representação do horizonte de eventos no diagrama de Kruskal.

que é, na verdade, a mesma expressão (27) para $r > r_s$, e, cuja solução também são hipérboles. Porém, novamente pela natureza quadrática, tem-se na verdade um conjunto de duas soluções, uma para o futuro, entre o primeiro e segundo quadrantes, e outra para o passado, entre o terceiro e quarto quadrantes.

Uma outra consequência direta das relações (27) e (28) é que para $r = r_s$, tem-se:

$$|u| = |v|,$$

o que mostra que o horizonte de eventos é representado no diagrama de Kruskal por meio de retas que passam pelo origem e com inclinações de 45° e 135° em relação ao eixo horizontal, como ilustrado na Figura 3. Já a Figura 1 mostra que esse horizonte é definido por uma linha vertical no diagrama de Schwarzschild.

Ainda, considerando separadamente os pares de transformações para as regiões interna e externa, usando novamente a identidade trigonométrica hiperbólica fundamental, e por fim tomando $r = 0$, encontra-se:

$$v^2 - u^2 = 1,$$

Essa expressão leva a uma hipérbole entre o primeiro e segundo quadrantes, e outra entre o terceiro e o quarto, que representam as singularidades físicas, Figura 4. Aqui, no entanto, temos duas singularidades físicas, a primeira delas corresponde ao buraco negro, já apresentado no contexto das coordenadas de Schwarzschild, e que no diagrama de Schwarzschild está representado como uma linha vertical que passa pela origem $r = 0$. Já a segunda é o que ficou conhecido na literatura como buraco branco [8].

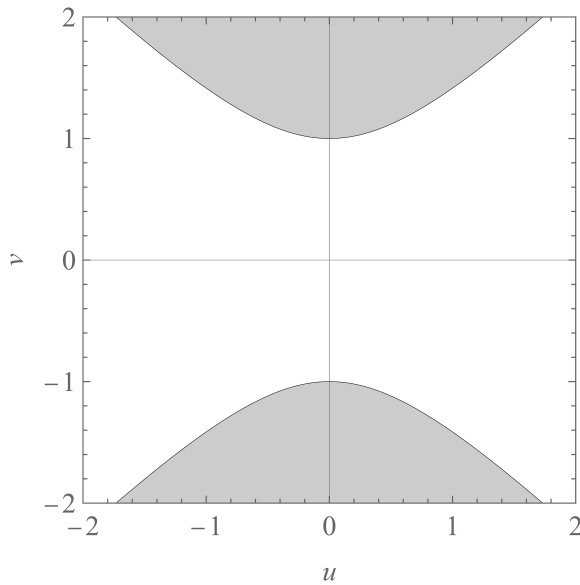


Figura 4: Representação do buraco negro (primeiro e segundo quadrantes) e do buraco branco (terceiro e quarto quadrante) no diagrama de Kruskal.

Para a região externa ao horizonte de eventos, $r > r_s$, a divisão da equação (20) pela equação (21) leva diretamente à:

$$v = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) u, \quad (29)$$

enquanto que para a região interna ao horizonte de eventos, $r < r_s$, a razão entre as equações (22) e (23) leva à:

$$v = \frac{1}{\tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right)} u. \quad (30)$$

As duas relações acima evidenciam que em um instante de tempo t fixo, v e u seguem uma relação linear. Assim, em um diagrama de Kruskal, eventos que acontecem em um mesmo instante de tempo coordenado devem estar sobre a mesma reta, que de acordo com as equações (29) e (31), deve passar pela origem do sistema, Figura 5. Já no diagrama de Schwarzschild eventos que acontecem em um mesmo instante de tempo estão todos localizados em uma mesma reta horizontal, Figura 1.

Com as considerações acima pode-se então construir o diagrama de Kruskal e visualizar diretamente algumas de suas características. A Figura 6 é clássica nos livros textos e traz cada uma das estruturas aqui discutidas de forma separada.

Ao invés de quadrantes, também é útil se referir às regiões A , B , C e D do diagrama, conforme ilustrado na figura. A região A compreende o exterior do buraco negro, e já é bem descrita pelas coordenadas de Schwarzschild. Já as regiões B , C e D são resultados da máxima extensão analítica com as coordenadas de Kruskal-Szekeres. No segundo e terceiro quadrantes se representa

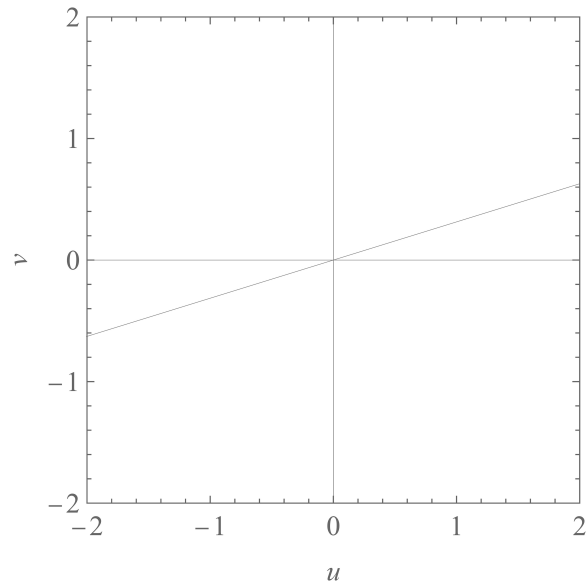


Figura 5: Linha representando a posição no diagrama de todos os eventos que acontecem no instante de tempo $t = 0.65 r_s/c$.

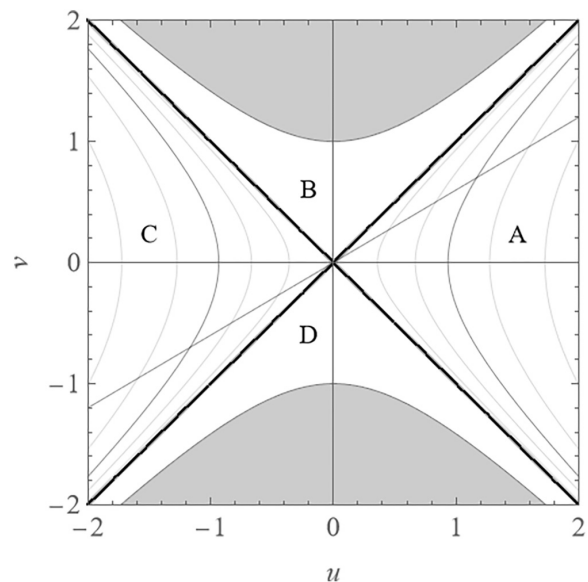


Figura 6: Diagrama de Kruskal para o buraco negro de Schwarzschild. As linhas pretas espessas com inclinações de 45° e 135° com relação à horizontal representam o horizonte de eventos do buraco negro e do buraco branco. As hipérboles sombreadas que limitam a parte superior e inferior do diagrama são as singularidades físicas. As hipérboles em linhas finas representam posições fixas, enquanto que a linha inclinada fina representa um instante de tempo fixo.

o que seria um universo “espelho” ou “paralelo” àquele descrito no primeiro e quarto quadrantes, e seu conteúdo físico em manuais é por vezes questionado ou apenas ignorado [8].

É de interesse da discussão da seção seguinte identificar ainda mais duas estruturas em um diagrama de

Kruskal: a linha de mundo de um fóton e a linha de mundo de um corpo teste massivo em queda livre, ambos em movimento radial em direção à singularidade física.

Para tratar da linha de mundo do fóton em movimento radial no diagrama de Kruskal, considera-se na equação (26) $ds = 0$, e $d\Omega = 0$, já que o movimento em estudo é radial. Esses dois pontos levam diretamente a:

$$dv = \pm du \quad (31)$$

A relação acima deixa claro que, no diagrama de Kruskal, a linha de mundo de um raio de luz em movimento radial “para fora” da singularidade física é representado pela reta $v = u$, enquanto que a linha de mundo de um fóton em movimento radial “para dentro” da singularidade física é representado pela reta $v = -u$. A Figura 7 ilustra essa situação para um raio de luz emitido no instante de tempo $t = 0.65 r_s/c$ da posição $r = 1.19 r_s$ em movimento radial, tanto “para fora” da singularidade física quanto “para dentro”.

Para construir a linha de mundo de um corpo em queda livre radial em direção à singularidade física, parte-se da mesma equação usada para representar essa linha de mundo no diagrama de Schwarzschild, Figura 1, a saber, equação (15). A partir da equação (15) é possível obter um conjunto de valores de tempo coordenado t em função do raio coordenado r . Esses valores são, então, aplicados nas expressões que definem v e u nas regiões interna, equações (22) e (23), e externa ao horizonte de eventos, equações (20) e (21), uma vez que $v = v(t, r)$ e $u = u(t, r)$. Com isso é possível se obter os valores de v em função de u para um corpo em queda. A Figura 8 traz a linha de mundo construída dessa maneira para um corpo partindo do repouso da posição $r = 1.19 r_s$ no

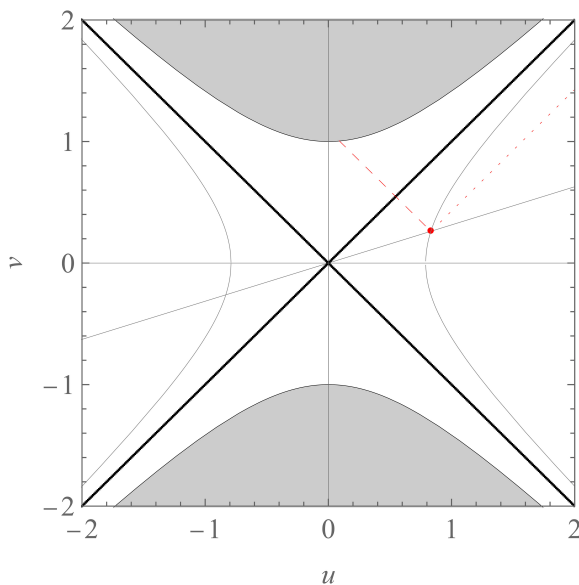


Figura 7: Linha de mundo de um fóton em movimento radial emitido no instante de tempo $t = 0.65 r_s/c$ da posição $r = 1.19 r_s$ se deslocando “para dentro” da singularidade física (linha tracejada) e “para fora” da singularidade (linha pontilhada).

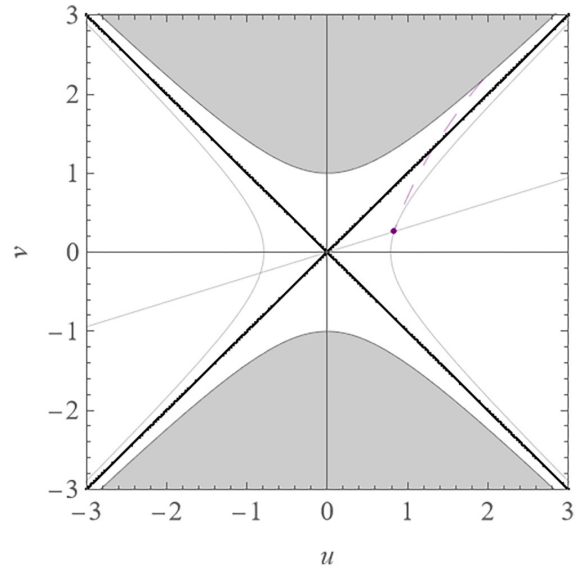


Figura 8: Linha de mundo de um corpo massivo em movimento radial partindo do repouso no instante de tempo $t = 0.65 r_s/c$ da posição $r = 1.19 r_s$ se deslocando em direção à singularidade física.

instante de tempo $t = 0.65 r_s/c$ em movimento radial em direção à $r = 0$.

Os diagramas das Figuras 7 e 8 ilustram ainda uma vantagem adicional acerca da interpretação física dos fenômenos quando eles são representados em um diagrama de Kruskal: esses diagramas mostram de forma simples e mais clara, quando comparados com o diagrama de Schwarzschild, as geodésicas da luz e a estrutura causal do espaço-tempo. Todo corpo que cruzar o horizonte de eventos acabará alcançando a singularidade física em um intervalo que será finito quando se considera o tempo próprio, sendo que nesse cruzamento a linha de mundo do corpo em queda livre radial, que mostrava um comportamento singular na região $r = r_s$ no diagrama de Schwarzschild 1, é agora completamente regular e contínua no diagrama de Kruskal.

6. Estudo de Caso

Para explorar as potencialidades ilustrativas e também didáticas do diagrama de Kruskal, serão apresentados dois estudos de caso envolvendo situações de queda livre radial em um buraco negro de Schwarzschild. Uma vez que se trata de uma queda livre radial, para todas as situações tratadas considera-se que os corpos partem sempre da mesma posição θ e ϕ , sendo alterado apenas as coordenadas r e t em cada um dos casos. Em cada situação será mostrado um diagrama de Kruskal e outro de Schwarzschild, para fins de análise e discussão. As situações consideram dois observadores, que podem trocar sinais eletromagnéticos entre si, e que estarão em queda livre a partir do repouso e de posições iniciais definidas.

O recebimento dos sinais de um pelo outro fundamenta o que se tomará aqui como “percepção” de um determinado observador sobre o outro, o que não pode ser confundido com medições realizadas por esses observadores sobre os eventos em discussão. No caso de sinais de radiação visível, percepção aqui seria tão somente a “impressão visual” dos observadores, isto é, o que eles veem. As medidas sobre um evento, por outro lado, estão relacionadas com processos nos quais os observadores fazem comparação com algum padrão (seja de tempo ou de posição, neste caso) e que resultam na obtenção de valores, em particular, das coordenadas deste evento, para um determinado sistema de coordenadas considerado. Um exemplo simples dessa distinção pode ser feito com o conhecido caso da supernova 1987A: ao passo que ela foi vista pela primeira vez em 24 de fevereiro de 1987, por meio de processos usuais mediu-se onde e quando o evento em si ocorreu (cerca de 170 mil anos atrás, na Grande Nuvem de Magalhães). Ainda que se limitar às percepções possa gerar considerações objetivamente frágeis, isto acaba por fornecer certo tipo de imersão aos casos a serem apresentados, tal como ocorre em exemplos de divulgação científica e obras audiovisuais com essa temática [18].

Como se notará, as considerações dos observadores com base unicamente em suas percepções dos sinais recebidos geram “ambiguidades” sobre a questão da ordem dos acontecimentos. No entanto, é importante enfatizar desde já que se tratam de falsas ambiguidades, justamente por estarem baseadas unicamente em percepções e não afirmações fundamentadas nas medidas de eventos. A análise do diagrama de Kruskal junto com a investigação do intervalo invariante entre os eventos (referentes à passagem sobre o horizonte de eventos à colisão com a singularidade física) serão centrais às conclusões acerca da ordem cronológica dos acontecimentos.

Em suma, para cada caso a seguir se elabora o que seria o entendimento de um observador acerca do estado do outro com base nos sinais trocados, e o que cada um concluiria (com base unicamente em suas percepções e medições) acerca de questões como quem atravessou primeiro o horizonte de eventos e quem alcançou primeiro a singularidade física. Os estudos de caso vão envolver, inclusive, ponderações sobre percepções dos observadores mesmo para a região $r < r_s$, isto é, além do horizonte de eventos. Ainda que quaisquer eventos ou sinais emitidos lá sejam completamente inacessíveis ao exterior, a Relatividade Geral enquanto teoria determinística pode fornecer descrições físicas também para esta região. Assim, seria um desperdício não considerá-los para uma melhor compreensão dos casos [19].

Como se pretende mostrar, os diagramas de Kruskal oferecem uma representação particularmente útil para os sinais eletromagnéticos também para esta região interna ao horizonte de eventos. As suas representações favorecem interpretações mais diretas dos processos de trocas

de sinais, levando a exercícios e discussões semelhantes aos diagramas de Minkowski na Relatividade Especial.

6.1. Caso 1: dois observadores em queda livre desde posições radiais iniciais diferentes mas de eventos Schwarzschild simultâneos

Neste primeiro caso considera-se dois observadores, chamados aqui de A e B , em queda livre radial desde posições r diferentes, mas de posições θ e ϕ iguais e fixas, e de eventos Schwarzschild simultâneos (isto é, eventos com mesmo tempo coordenado de Schwarzschild). Para fins de ilustração, considera-se como posições iniciais dos observadores, em termos do raio de Schwarzschild r_s , como $R_{0A} = 1.19r_s$ e $R_{0B} = 1.36r_s$. Com a mesma justificativa, considera-se que os observadores iniciam a queda livre no instante de tempo coordenado $t_{0A} = t_{0B} = -1.3r_s/c$.

Os valores concretos de R_{0A} e R_{0B} dependem diretamente da massa do buraco negro considerado. Apenas como exemplo, considera-se o buraco negro supermassivo M87* no centro da galáxia Virgo A, com massa de bilhões de vezes a massa solar e raio de Schwarzschild mais do que cem vezes a distância Terra-Sol. Nesta situação os valores de R_{0A} e R_{0B} seriam da ordem de bilhões de quilômetros, e o tempo de queda medido no relógio próprio destes observadores, com base na equação (18), seria da ordem de horas. Porém, dado que M87* não é um buraco negro de Schwarzschild, esses valores devem ser tomados apenas a título de exemplificação.

Na Figura 9 nota-se que antes do instante $t_0 = -1.3r_s/c$ os observadores estavam em uma posição fixa em relação ao horizonte de eventos. Isso implica na representação da linha de mundo dos observadores A e B como hipérboles (linhas contínuas cinzas). Do ponto de vista dinâmico, a manutenção de uma posição fixa exige uma aceleração própria desses observadores no sentido de compensar a atração gravitacional do buraco negro. No instante $t_0 = -1.3r_s/c$ os observadores iniciam seus movimentos de queda livre radial, o que é representado pelos eventos A_1 e B_1 , sendo suas linhas de mundo em seguida representadas pelas curvas pontilhada (vermelha) e de ponto-tracejada (azul), respectivamente. Importa salientar que a simultaneidade desses eventos A_1 e B_1 é referente às coordenadas de Schwarzschild. Para um observador distante, o relógio de Schwarzschild na posição do evento A_1 está sempre atrasado com relação àquele na posição do B_1 , em razão da dilatação gravitacional do tempo.

Os eventos A_2 e B_2 são referentes às entradas dos observadores A e B , respectivamente, no horizonte de eventos. Por razão de conveniência, representa-se como B^* o evento em que o observador B envia um sinal para A , tal que o recebimento deste sinal por A coincide justamente com o evento A_2 . Ainda que para um observador externo e distante do buraco negro este sinal leve um tempo (coordenado) infinito para alcançar o

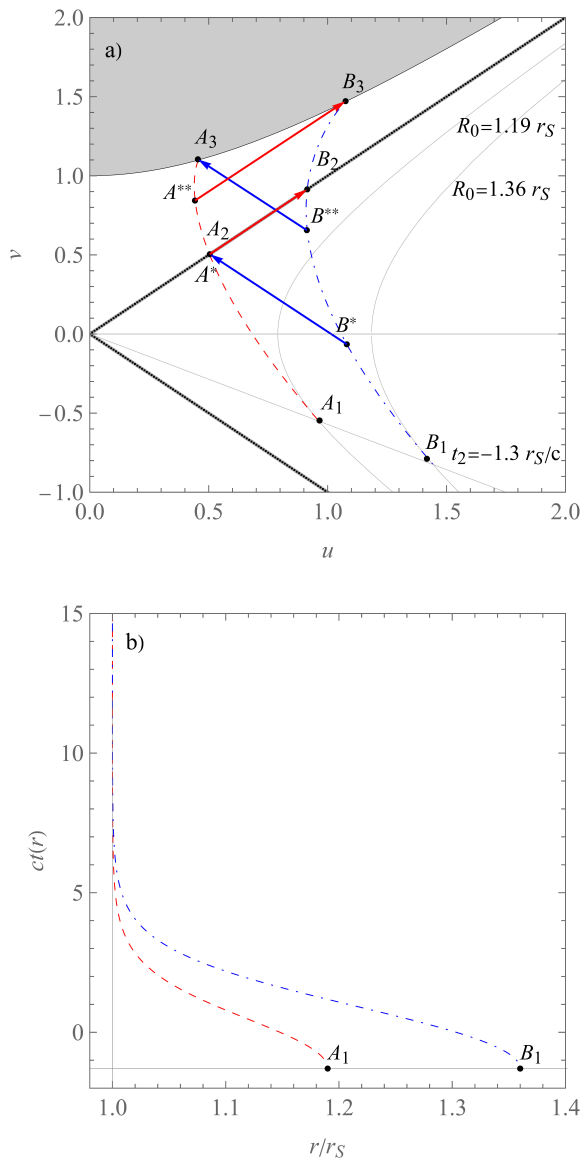


Figura 9: Linhas de mundo para dois corpos massivos que caem em direção à singularidade física em $r = 0$ partindo de r distintos, mas mesmo θ e ϕ , no mesmo instante de tempo. A curva tracejada (vermelha) corresponde à linha de mundo do corpo A que parte de $R_0 = 1.19 r_s$ no instante de tempo $t_0 = -1.3 r_s/c$, enquanto que a curva ponto-tracejada (azul) mostra a linha de mundo do corpo B que parte de $R_0 = 1.36 r_s$ no mesmo instante de tempo. Notar que no diagrama de Schwarzschild não é possível representar de forma distinguível os eventos A_2 e B_2 . a) Representação do caso 1 no diagrama de Kruskal. b) Representação do caso 1 no diagrama de Schwarzschild.

observador A, este o recebe em um tempo (próprio) finito. Em termos de percepção, o observador A notará que, ao passo que ele percebe que está atravessando o horizonte de eventos, o sinal recebido do observador B lhe sugere que este ainda está distante do raio de Schwarzschild, julgando assim ter alcançado primeiro o horizonte do buraco negro.

A perspectiva do observador B, em termos dos sinais recebidos de A, é diferente. Para ele, os sinais emitidos por A sofrem gradativamente mais *redshift* (também notaria o período deles cada vez maior, caso fossem sinais periódicos), e A parece “congelar” aos poucos sobre a superfície do horizonte de eventos.⁵ Similar ao que ocorre para com o observador A, o observador B nota que leva um tempo (próprio) finito, medido em seu relógio, para que alcance o horizonte de eventos, representado pelo evento B_2 . Até lá, B tem a percepção (em razão dos sinais que recebe de A) que está quase o alcançando, mesmo A tendo iniciado a queda livre em um raio coordenado menor.

Pelo diagrama de Kruskal da Figura 9, nota-se que o observador B pode receber um sinal emitido por A em A_2 , A^* exatamente sobre o horizonte de eventos. Recebendo esse sinal em B_2 , o observador B teria a impressão de atravessar junto a A o horizonte de eventos. Em termos das coordenadas de Schwarzschild, os eventos A_2 e B_2 ocorrem na mesma posição radial e em tempos coordenados singulares (tendendo a infinito), Figura 9(b), de tal forma que para um observador externo e distante, lhe parece de fato que ambos chegam assintoticamente juntos ao horizonte de eventos. Já no diagrama de Kruskal, os eventos A_2 e B_2 são representados de forma distinta, possuindo coordenadas v e u também distintas. E, mais do que uma vantagem de representação gráfica, isto indica uma consideração relevante sobre a ordem cronológica dos eventos.

Pode-se notar pelo diagrama que os valores das coordenadas u_{A_2} e v_{A_2} são menores do que as coordenadas u_{B_2} e v_{B_2} . Ademais, o intervalo entre os eventos é do tipo luz, dado que ambos estão sobre o horizonte de eventos. Eventos distintos com intervalo tipo luz, assim como os de tipo tempo, podem conter uma relação causal entre si, o que implica necessariamente na prioridade (em termos cronológicos) de um sobre o outro. Logo, nesse caso é possível afirmar que é o observador A que alcança primeiro o horizonte de eventos, apesar das impressões de cada um em termos dos sinais recebidos.

Ultrapassado o horizonte de eventos, os observadores externos perdem qualquer contato com os observadores A e B. Porém, como sugerido pelo diagrama de Kruskal, A e B ainda conseguem trocar alguns sinais eletromagnéticos antes do encontro com a singularidade física, e novamente pode-se resumir os conjuntos de impressões sobre o movimento de queda livre de um sobre o outro. Assim como na parte anterior, alguns eventos de interesse estão destacados no diagrama da Figura 9. A_3 e B_3 , por exemplo, representam, respectivamente, os eventos em que os observadores A e B encontram a singularidade física em $r = 0$, e encerram seu movimento

⁵ A metáfora do “congelamento” de uma partícula em queda livre sobre o horizonte de eventos para um observador distante, referente ao comportamento singular do tempo coordenado em r_s , foi popularizada por Nokinov e Zeldovich [13] ainda em meados do século passado. Naturalmente, esse termo deve ser tomado apenas no sentido figurativo.

de queda. Por conveniência, considera-se como B^{**} o evento em que B envia um sinal para A de tal forma que o sinal chega a ele quando alcança a singularidade em A_3 . Também, considera-se o evento A^{**} aquele em que A transmite um sinal para B , sendo que o alcança somente quando B atinge o centro do buraco negro, B_3 .

É possível notar pelo diagrama da Figura 9 que o observador A , prestes a atingir a singularidade, recebe o sinal de B emitido no evento B^{**} , sendo que para ele parece então que B sequer cruzou o horizonte de eventos. Antes do derradeiro fim de sua linha de mundo, A é levado a concluir, com base em suas percepções apenas, que ele chegou primeiro ao centro do buraco negro. Por outro lado, o observador B , que recebe o sinal de A emitido no evento A^{**} , tem a percepção de que é ele que chega primeiro à singularidade (ênfatiza-se, com base em suas percepções dos sinais recebidos).

Enquanto os eventos sobre o horizonte, A_2 e B_2 , com intervalo do tipo luz, não carregam ambiguidade acerca de sua ordenação, o mesmo não pode ser afirmado sobre A_3 e B_3 . Dado que o tensor métrico sobre a singularidade é divergente, a determinação da natureza do intervalo entre A_3 e B_3 neste caso é impossibilitada, assim como é qualquer afirmação sobre causalidade envolvendo tais eventos sobre a singularidade física $r = 0$. Contudo, é possível explorar a relação entre dois eventos A'_3 e B'_3 , muito próximos de A_3 e B_3 , respectivamente, mas fora da singularidade, ($r > 0$). Para esta situação o intervalo entre A'_3 e B'_3 é do tipo espaço, e isto, por sua vez introduziria uma ambiguidade acerca da questão de quem alcançaria primeiro a singularidade. É importante salientar, entretanto, que esta colocação é bastante limitada, por estar baseada em eventos “muito próximos” daqueles sobre a singularidade, e não nos próprios eventos A_3 e B_3 . Ademais, conforme já mencionado, do ponto de vista empírico, eventos que ocorrem além do horizonte são inacessíveis a observadores externos. Assim, quaisquer considerações nesse sentido, neste trabalho, devem ser compreendidas no contexto dos diagramas de Kruskal.

O sumário das percepções é, então, o que se segue: o observador A , que inicia a queda livre em uma posição radial (raio coordenado) menor, conclui que chega primeiro tanto ao horizonte de eventos como na singularidade; o observador B , que começa seu movimento de queda livre mais distante, tem a impressão visual que salta em queda livre antes de A , chega junto a esse sobre o horizonte de eventos, e alcança primeiro a singularidade. Já em termos de medidas e coordenadas, há dois casos de interesse especial: os eventos A_1 e B_1 , sendo Schwarzschild simultâneos, são portanto do tipo espaço, o que introduz ambiguidade sobre a ordem cronológica dos eventos (cada observador, com base o que vê, acredita que iniciou primeiro a queda livre); os eventos sobre o horizonte, A_2 e B_2 , têm o intervalo entre si do tipo luz, o que permite afirmar que A atravessa o horizonte primeiro; já para os eventos próximos a chegada à singularidade física, A'_3 e B'_3 , o

intervalo invariante é tipo espaço, o que impede qualquer afirmação categórica sobre ordem de eventos.

6.2. Caso 2: Dois observadores em queda livre radial desde posições iguais mas em eventos Schwarzschild não-simultâneos

Neste segundo caso considera-se também dois observadores, novamente chamados de A e B , em queda livre radial, agora desde raios coordenados iguais, além de mesmo θ e ϕ , mas de instantes de tempos coordenados diferentes. As posições iniciais dos observadores, em termos do raio de Schwarzschild r_s , são $R_{0A} = R_{0B} = 1.19 r_s$. Os observadores iniciam a queda livre nos tempos coordenados $t_A = -0.5 r_s/c$ e $t_B = -1.3 r_s/c$.

Assim como no caso anterior, elenca-se alguns eventos de interesse ao estudo das percepções de cada observador: A_2 e B_2 , referentes às entradas deles no horizonte de eventos; A_3 e B_3 , referentes às chegadas dos observadores à singularidade física; A^* e B^* , referentes a eventos em que cada um deles emite um sinal para outro de tal forma que este o alcança exatamente nos eventos de entrada no horizonte de eventos (A_2 e B_2), e; A^{**} e B^{**} , referentes a eventos em que cada observador, já dentro do horizonte de eventos, emite um sinal para outro de tal forma que este o alcança exatamente nos eventos de colisão com a singularidade física (A_3 e B_3), ver Figura 10.

De início, a principal diferença em relação ao caso anterior reside no fato de, desta vez, não haver ambiguidade entre observadores sobre quem iniciou a queda livre primeiro. Quaisquer dois eventos na hipérbole de $R_0 = 1.19 r_s$ terão intervalo tipo tempo, já que para quaisquer par de eventos, o evento posterior sempre estará dentro do cone de luz do anterior, logo, a ordem dos eventos A_1 e B_1 será mantida em diferentes sistemas de coordenadas. O desenvolvimento da situação, entretanto, é bastante similar ao caso anterior. Com o recebimento do sinal emitido por A no evento A^* , o observador B tem a percepção de que cruza primeiro o horizonte de eventos. Por outro lado, A tem a impressão de cruzar junto com B o horizonte de eventos, baseado no sinal eletromagnético que ele recebe de B nesse momento. Aqui, mais uma vez, a disposição dos eventos B_2 e A_2 destacados no diagrama da Figura 10(a) indica que não há ambiguidade sobre quem chegou primeiro ao raio de Schwarzschild.

Dentro do horizonte de eventos, pode-se notar pela representação dos eventos A^{**} , B^{**} , A_3 e B_3 que a resolução do caso anterior se repete: cada observador julga por suas percepções na recepção dos sinais que chegará primeiro à singularidade física em $r = 0$. A diferença neste caso é que ambos terão a percepção visual de que o outro já terá cruzado o horizonte de eventos na ocasião em questão.

Um último estudo de interesse envolve a reconsideração do caso 2 à situação em que os observadores iniciam a queda livre em instantes de tempo coordenados muito próximos, $t_A \approx t_B$, mas com $t_A > t_B$ (isto é,

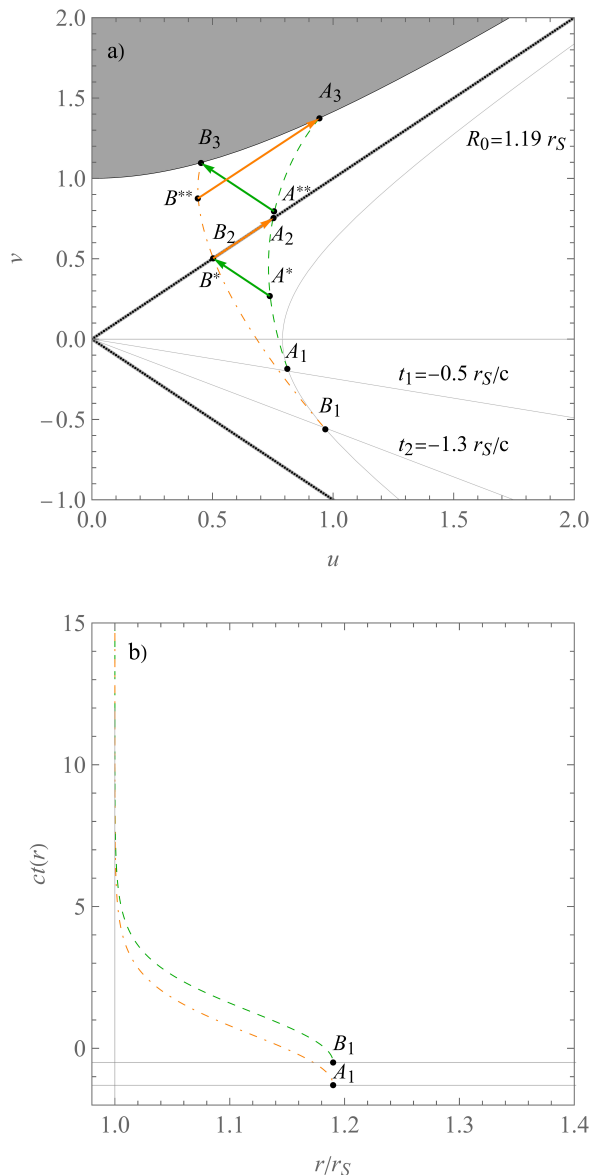


Figura 10: Linhas de mundo para dois corpos massivos que caem em direção à singularidade física partindo das mesmas posições r, θ e ϕ , mas em instantes de tempo coordenados distintos. Ambos partem da posição $R_0 = 1.19 r_s$. No diagrama de Kruskal, a curva ponto-tracejada (laranja) corresponde à linha de mundo do corpo A que parte no instante $t_0 = -1.3 r_s/c$, enquanto que a curva tracejada (verde) mostra a linha de mundo do corpo B que parte do instante $t_0 = -0.5 r_s/c$. Embora o diagrama de Schwarzschild represente de uma maneira mais intuitiva a diferença entre os instantes de tempo do início das quedas dos observadores, novamente não se pode representar de maneira razoável nele os eventos A_2 e B_2 . a) Representação do caso 2 no diagrama de Kruskal. b) Representação do caso 2 no diagrama de Schwarzschild.

o observador A salta logo depois de B). Nessas condições, pode-se assumir que os observadores compartilham aproximadamente um mesmo referencial inercial local, pelo menos até a chegada ao horizonte de eventos [19]. Dessa forma, tanto o observador A quanto o observador

B conseguem desta vez *medir*, com suas próprias réguas e relógios, as coordenadas dos eventos A_2 e B_2 , e não só depender de percepções com base nos sinais trocados.

Considerando que o observador B envia um sinal para A ao atravessar o horizonte de eventos, tem-se então que este sinal alcança o observador A em A_2 . Como ocorre no caso 2, com base na recepção desse sinal o observador A tem a impressão de ter cruzado o horizonte de eventos junto de B . Mas, desta vez, ele consegue *medir* as coordenadas de B_2 , de tal forma que ele nota em seu relógio próprio que decorreu um pequeno intervalo de tempo desde o evento B_2 até o sinal chegar a ele (A_2). Isso levaria à conclusão, a despeito de ter a percepção com base nos sinais trocados, de que foi B quem atravessou primeiro o horizonte de eventos.

Importa salientar que nos dois casos anteriores os observadores também poderiam medir as coordenadas dos eventos A_2 e B_2 , mas não seria fisicamente razoável o fazerem com suas próprias réguas e relógios. Diferentemente da Relatividade Especial, na qual um observador pode “impor” seu tempo próprio para todo o espaço-tempo, em casos mais gerais da Relatividade Geral as medidas de um observador com suas réguas e relógios só têm validade local [20]. Utilizando as réguas e relógios de Schwarzschild para medir A_2 e B_2 , os observadores teriam dificuldade em distinguir suas coordenadas devido à singularidade de coordenadas em $r = r_s$. Porém, estando próximos entre si durante a queda (isto é, estando em um mesmo referencial inercial local), ambos podem considerar as coordenadas normais de Riemann e utilizar suas réguas e relógios para efetuar medidas sobre os eventos destacados.

7. Considerações Finais

Neste trabalho propôs-se ilustrar algumas das potencialidades didáticas do diagrama de Kruskal-Szekeres aplicadas ao problema da queda livre radial de corpos testes no espaço-tempo de Schwarzschild. Primeiramente foram deduzidas as soluções para o tempo coordenado e para o tempo próprio em função do raio coordenado para corpos em queda livre radial. A presença da singularidade de coordenadas no raio de Schwarzschild foi discutida, assim como sua manifestação em diagramas de espaço-tempo com coordenadas de Schwarzschild, mais especificamente, no comportamento singular do tempo coordenado em $r = r_s$. Por não conterem a singularidades de coordenadas, as coordenadas de Kruskal forneceram uma descrição visual mais fluida ao problema tratado por meio de seus diagramas espaço-tempo.

Apresentaram-se dois casos de estudo envolvendo dois observadores em queda livre radial rumo a um buraco negro de Schwarzschild. Os observadores trocavam sinais eletromagnéticos ao longo de suas trajetórias, de tal forma que foi possível elaborar o que seria o conjunto de constatações de cada um deles com base exclusivamente nas percepções dos sinais recebidos. Os casos foram

apresentados por meio de diagramas de Kruskal e de Schwarzschild, nos quais foram ilustrados tanto as linhas de mundo dos observadores como as dos sinais trocados. Pôde-se notar as discrepâncias entre as percepções de cada um deles, em especial no que se refere à ordem cronológica de quem chega primeiro ao horizonte de eventos e à singularidade física. Longe de ser uma inconsistência da Relatividade Geral, tais discrepâncias são apenas efeitos de perspectiva. A natureza do intervalo invariante entre os eventos de entrada no horizonte de eventos esclarece de forma objetiva sobre a ordem entre eles, o que pôde ser compreendido com base nos próprios diagramas apresentados.

As coordenadas de Kruskal-Szekeres não são as únicas a eliminar a singularidade de coordenadas em $r = r_s$. Outros sistemas de coordenadas podem naturalmente ser aplicados ao problema da queda livre radial e representados graficamente via diagramas de espaço-tempo. Um exemplo são as coordenadas de Gullstrand-Painlevé, que têm como parâmetro afim o tempo próprio de um observador em queda livre desde uma distância infinita [7]. Elas, assim como as de Kruskal-Szekeres, não carregam a singularidade de coordenadas, e fornecem uma descrição razoável em termos de diagramas para situações como as dos casos analisados. Porém, enquanto nos diagramas de Kruskal as geodésicas de luz são representadas de formas mais simples, nos diagramas de Gullstrand-Painlevé elas têm diferentes inclinações em função da posição radial. Ainda assim, também com estes últimos é possível explorar os eventos considerados e as percepções dos observadores, incluindo na região interior ao horizonte de eventos.

A discussão aqui conduzida deixa evidente que assim como ocorre no ensino de Relatividade Especial, o uso de diagramas no ensino de Relatividade Geral também pode ter um potencial didático bastante relevante. É certo que a compreensão dos fundamentos dos diagramas de Kruskal exige certa dose de complexidade, ainda mais considerando o papel central das coordenadas de Kruskal-Szekeres à máxima extensão analítica do espaço-tempo de Schwarzschild. Apesar disso, eles fornecem um poderoso instrumento de representação gráfica. Assim como os diagramas de Feynman na teoria quântica de campos, os diagramas de Kruskal podem auxiliar na interpretação das soluções de determinados problemas da Relatividade Geral.

Apêndice A

A identificação de k como a energia total por unidade de massa do corpo teste na relação (5) pode ser justificada pelo Teorema de Noether. Mesmo na mecânica não relativística, simetrias em lagrangianas e hamiltonianas estão conectadas com leis de conservação. No contexto da Relatividade Geral, essas simetrias implicam em quantidades conservadas “ao longo” de uma geodésica. O que se segue não tem a pretensão de uma demonstração

rigorosa, mas tão somente a de justificar a identificação mencionada.

Considera-se uma quantidade k dada por [12]:

$$-\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi} = k, \quad (32)$$

sendo $\mathbf{u}$ um vetor tangente a uma geodésica γ e $\boldsymbol{\xi}$ um campo vetorial associado a uma determinada simetria do espaço-tempo em questão, chamado campo vetorial de Killing. Os vetores de Killing obedecem à seguinte propriedade:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (33)$$

A quantidade k é conservada ao longo de γ se:

$$u^\mu \nabla_\mu k = 0 \quad \text{ou} \quad u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \xi_\nu) = 0$$

Por outro lado, pode-se verificar que:

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \xi_\nu) = (u^\mu \nabla_\mu u^\nu) \xi_\nu + u^\mu (u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu)$$

Como $\mathbf{u}$ é um vetor tangente a γ , o primeiro termo acima se cancela, pois $u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0$. Com o segundo termo, uma vez que os índices μ e ν estão repetidos, vale que:

$$u^\mu (u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu) = u^\nu (u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu)$$

Porém, da relação (33), tem-se:

$$u^\nu (u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu) = -u^\nu (u^\mu \nabla_\mu \xi_\nu) = -u^\mu (u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu)$$

O que se nota das duas equações acima é que:

$$u^\mu (u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu) = -u^\mu (u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu) = 0,$$

dado que a única quantidade que é igual ao seu negativo é zero. Com isso, mostra-se finalmente que:

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \xi_\nu) = u^\mu \nabla_\mu k = 0,$$

e, portanto, k é constante ao longo de γ .

Em seguida pode-se considerar, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \mathbf{p}$, sendo $\mathbf{p}$ o momento próprio por unidade de massa (tomando o parâmetro afim como o tempo próprio). No caso do espaço-tempo de Schwarzschild, a independência da métrica com relação à coordenada t implica na existência de um vetor de Killing tipo-tempo que pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\xi} = (1, 0, 0, 0)$$

O produto na relação (32) é um invariante por transformações gerais de coordenadas. Nas coordenadas normais de Riemann (isto é, o sistema de coordenadas locais na vizinhança de um ponto P da variedade, que se traduz no uso do princípio de equivalência para um referencial inercial local, no qual o espaço-tempo é localmente plano), encontra-se que:

$$-\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\eta_{\mu\nu} p^\mu \xi^\nu = -\eta_{00} p^0 \xi^0 = p^0$$

Mas $p^0 = \mathcal{E}/c$, a energia total por unidade de massa de uma partícula sobre a geodésica γ . Assim, $k = \mathcal{E}$, conforme identificou-se em (7).

Apêndice B

Na seção 3.1 chegou-se na equação:

$$\int_{t_0}^t dt' = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s} - 1} \int_{R_0}^r \frac{dr'}{\left(1 - \frac{r_s}{r'}\right) \sqrt{\frac{R_0}{r'} - 1}} \quad (34)$$

A integração do lado esquerdo da equação (34) é trivial. A do lado direito, no entanto, envolve algumas etapas, que serão detalhadas na sequência.

A fim de simplificar o trabalho, será definido a integral I , como sendo

$$I = \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1}} \quad (35)$$

Fazendo-se a mudança de variável:

$$\mu = \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \quad (36)$$

que leva diretamente a:

$$dr = \frac{-2\mu R_0}{(\mu^2 + 1)^2} d\mu \quad (37)$$

é possível reescrever a integral I , equação (35), em termos da nova variável de integração μ :

$$I = -2R_0 \int \frac{d\mu}{\left[1 - \frac{r_s}{R_0}(1 + \mu^2)\right] (1 + \mu^2)^2}$$

Utilizando o método das frações parciais é possível escrever I como uma combinação de três integrais independentes:

$$I = -2R_0 \int \frac{d\mu}{(1 + \mu^2)^2} - 2r_s \int \frac{d\mu}{(1 + \mu^2)} - \frac{2r_s^2}{R_0} \int \frac{d\mu}{1 - \frac{r_s}{R_0}(1 + \mu^2)} \quad (38)$$

que serão identificadas aqui como:

$$I_1 = 2R_0 \int \frac{d\mu}{(1 + \mu^2)^2} \quad (39)$$

$$I_2 = 2r_s \int \frac{d\mu}{(1 + \mu^2)} \quad (40)$$

e

$$I_3 = \frac{2r_s^2}{R_0} \int \frac{d\mu}{1 - \frac{r_s}{R_0}(1 + \mu^2)} \quad (41)$$

Com isso a integral I pode ser escrita como:

$$I = -(I_1 + I_2 + I_3) \quad (42)$$

Começando por I_1 , fazendo-se a mudança de variável:

$$\mu = \tan \theta \quad (43)$$

a integral I_1 pode ser escrita como:

$$I_1 = 2R_0 \int \cos^2 \theta d\theta \quad (44)$$

cuja solução na variável θ será

$$I_1 = R_0 \left[\theta + \frac{1}{2} (2 \sin \theta \cos \theta) \right] + B_1 \quad (45)$$

Por outro lado, uma consequência direta da mudança de variável da expressão (36) é que se pode escrever $\cos \theta$ e $\sin \theta$ em função da variável μ :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \text{ e } \sin \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (46)$$

Usando as expressões (43) e (46) na solução da integral I_1 , equação (45), obtêm-se a solução de I_1 em função da variável μ :

$$I_1 = R_0 \left[\arctan \mu + \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right] + B_1 \quad (47)$$

E aplicando na solução acima a relação (36), chega-se na solução de I_1 em função da variável r :

$$I_1 = R_0 \arctan \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} + r \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} + B_1 \quad (48)$$

sendo B_1 a constante de integração referente à integral indefinida I_1 .

A integral I_2 pode ser resolvida usando-se a mesma mudança de variável da expressão (43), o que leva a:

$$I_2 = 2r_s \int d\theta \quad (49)$$

cuja solução na variável θ será:

$$I_2 = \theta + B_2 \quad (50)$$

e na variável μ

$$I_2 = \arctan \mu + B_2 \quad (51)$$

E, finalmente, substituindo na solução (51) a equação (36), chega-se na solução de I_2 em função da variável r :

$$I_2 = 2r_s \arctan \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} + B_2 \quad (52)$$

com B_2 a constante de integração referente à integral indefinida I_2 .

A integral I_3 pode ser reescrita como:

$$I_3 = 2r_s \beta^2 \int \frac{1}{(1 - \beta \mu)(1 + \beta \mu)} \quad (53)$$

com

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_0}{r_s} - 1}} \quad (54)$$

A integral da expressão (53), por sua vez, pode ser reproduzida em termos de uma soma de duas integrais:

$$I_3 = r_s \beta \left[\int \frac{\beta}{(1 - \beta \mu)} d\mu + \int \frac{\beta}{(1 + \beta \mu)} d\mu \right] \quad (55)$$

Para fins de organização, será feito aqui:

$$I_{3A} = \int \frac{\beta}{(1 - \beta \mu)} d\mu \quad (56)$$

e

$$I_{3B} = \int \frac{\beta}{(1 + \beta \mu)} d\mu \quad (57)$$

de maneira que I_3 pode ser escrita como:

$$I_3 = r_s \beta (I_{3A} + I_{3B}) \quad (58)$$

Aqui vale a pena lembrar que μ está definido de acordo com a equação (36). Na situação de queda livre radial investigada, a variável r varia de R_0 até a singularidade física em $r = 0$, $0 < r \leq R_0$ assim, a variável μ deve variar de tal forma que $0 \leq \mu < \infty$.

Sendo assim, a função a ser integrada em I_{3B} está definida em todo o intervalo em que μ varia, e portanto, tem-se diretamente que:

$$I_{3B} = \ln|1 + \beta \mu| + B_{3B} \quad (59)$$

sendo B_{3B} a constante de integração referente à I_{3B} .

Para a integral I_{3A} , no entanto, a função a ser integrada não é definida em $\mu = 1/\beta$, que pertence ao intervalo de integração, já que $\beta > 0$ (ver equação (54)). Assim, a integração deve ser feita usando os limites nessa região onde a função não está definida:

$$I_{3A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{1}{\beta} - \varepsilon} \frac{\beta d\mu'}{1 - \beta \mu'} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\beta} + \delta}^{\mu} \frac{\beta d\mu'}{1 - \beta \mu'} \quad (60)$$

com $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$.

A integração acima leva diretamente a:

$$I_{3A} = -\ln|1 - \beta \mu| - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|\mu \varepsilon|) + \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|\mu \delta|) \quad (61)$$

$$= -\ln|1 - \beta \mu| + \infty - \infty \quad (62)$$

O resultado da integral I_{3A} , portanto, incluindo o ponto $\mu = 1/\beta$ leva a uma indeterminação, sendo, consequentemente, uma integral divergente. No entanto, o ponto $\mu = 1/\beta$ corresponde exatamente a posição $r = r_s$, ver equações (36) e (54), que corresponde a uma singularidade de coordenada nas coordenadas de Schwarzschild. Vê-se portanto, que fazendo o cálculo de I_3 no plano real essa singularidade física é carregada para a análise do tempo

coordenado de queda livre radial do corpo massivo, de modo que quando se aproxima desse ponto o tempo coordenado tende a infinito.

Fazendo-se o estudo da queda livre radial fora dessa singularidade de coordenada, ou seja, fora do horizonte de eventos ($r_s < r \leq R_0$), ou dentro do horizonte de eventos ($0 < r < r_s$), não há pontos de divergências do ponto de vista matemático, e os cálculos apresentados acima levam diretamente a:

Para $0 < \mu < 1/\beta$ (região externa ao horizonte de eventos):

$$\begin{aligned} I_3 &= -r_s \beta \ln(1 - \beta \mu) + r_s \beta \ln(1 + \beta \mu) + B'_3 \\ &= -r_s \beta \ln \left(\frac{1 - \beta \mu}{1 + \beta \mu} \right) + B'_3 \end{aligned} \quad (63)$$

Para $\mu > 1/\beta$ (região interna ao horizonte de eventos):

$$\begin{aligned} I_3 &= +r_s \beta \ln(-(1 - \beta \mu)) + r_s \beta \ln(1 + \beta \mu) + B''_3 \\ &= -r_s \beta \ln \left(\frac{1 - \beta \mu}{1 + \beta \mu} \right) + B''_3 \end{aligned} \quad (64)$$

As constantes de integração B'_3 e B''_3 não são necessariamente as mesmas em razão da descontinuidade no domínio das funções logarítmicas em $\mu = 1/\beta$, e são uma combinação das constantes de integração referentes as integrais I_{3A} e I_{3B} .

Sem perda de generalidade, os resultados (63) e (64) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} I_3 &= -r_s \beta \ln \left| \frac{1 - \beta \mu}{1 + \beta \mu} \right| + B_3 \\ &= r_s \beta \ln \left| \frac{1 + \beta \mu}{1 - \beta \mu} \right| + B_3 \end{aligned} \quad (65)$$

com B_3 uma combinação das constantes B'_3 e B''_3 .

A integral I_{3A} também pode ser avaliada no plano complexo. Começando por definir a função $f(z)$:

$$f(z) = \frac{\beta z}{1 - \beta z} \quad (66)$$

com $z = a + ib$ sendo a e b dois números reais, ou, escrevendo na forma polar, $z = r e^{i\alpha}$ com $r = |z|$ e α um número real que corresponde ao ângulo que vetor representado por z faz com o eixo real no sentido anti-horário. A função $f(z)$ possui um pólo sobre o eixo real em $\mu = 1/\beta$. Assim, a integração será realizada via Teorema de Cauchy ao longo da curva da Figura 11.

Se a curva fechada C ao longo da qual se faz a integração complexa não engloba nenhum dos pólos da função, então, pelo Teorema de Cauchy a integral da função ao longo dessa curva será nula:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (67)$$

Para a curva da Figura 11 tem-se que $C = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \omega$, com ω um semicírculo de raio ε e Γ um

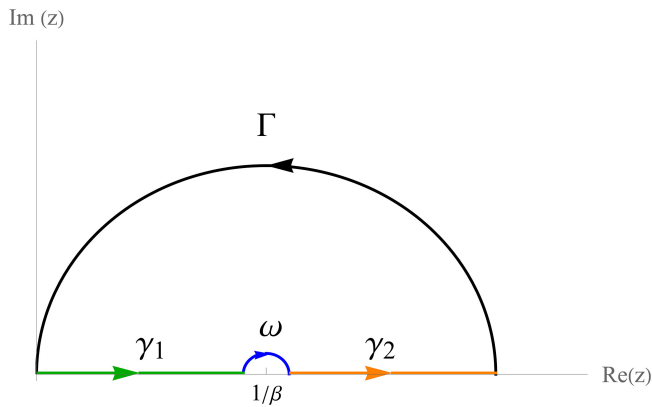


Figura 11: Curva C no plano complexo ao longo da qual será realizada a integração da função $f(z)$. A curva Γ tem raio ρ enquanto que a curva ω tem raio ε .

semicírculo de raio ρ . A integral I_{3A} é justamente aquela sobre as curvas γ_1 e γ_2 no limite em que ε tende a zero.

Para a integral ao longo da curva ω , Figura 11, será adotada a parametrização:

$$z(\theta) = \frac{1}{\beta} + \varepsilon e^{i\theta} \quad \text{logo} \quad dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad (68)$$

Assim:

$$\int_{\omega} f(z) dz = \int_{\pi}^0 \frac{\beta (i\varepsilon e^{i\theta})}{1 - \beta(\frac{1}{\beta} + \varepsilon e^{i\theta})} d\theta = \pi i. \quad (69)$$

Observe que esse resultado é obtido independentemente de ser feito o limite de ε tender a zero.

A integral ao longo da curva Γ pode ser realizada por meio da parametrização:

$$z(\theta) = \rho + \rho e^{i\theta} \quad \text{logo} \quad dz = \rho i e^{i\theta} d\theta \quad (70)$$

Assim,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi} \frac{\beta (i\rho e^{i\theta})}{1 - \beta(\rho + \rho e^{i\theta})} d\theta \quad (71)$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\rho} - \beta - \beta e^{i\theta} \right| \Big|_0^{\pi} \quad (72)$$

e, consequentemente:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \ln|1 - 2\beta\rho| \quad (73)$$

Devido ao argumento complexo dentro da função logarítmica, vale lembrar que:

$$\ln(z) = \ln|z| + i(\alpha + 2m\pi), \quad (74)$$

sendo m um número inteiro que se refere a folha de Riemann que será adotada para solução do problema. Com isso, chega-se em:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \ln|1 - 2\beta\rho| + i(\alpha + 2m\pi) \quad (75)$$

Uma vez que o ponto $z = 1 - 2\rho\beta$ situa-se sobre o eixo real no plano complexo, tem-se $\alpha = 0$, e assim:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \ln|1 - 2\rho\beta| + 2m\pi i \quad (76)$$

O logaritmo complexo é uma função multivalorada, isto é, assume diferentes valores para o mesmo z em diferentes folhas de Riemann. Para o problema aqui tratado a escolha de interesse é $m = 0$, referente ao valor principal do logaritmo complexo [21]. Assim, a solução para a integral de $f(z)$ ao longo da curva Γ será:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \ln|1 - 2\rho\beta| \quad (77)$$

Com os resultados das integrais ao longo das curvas ω e Γ na expressão do Teorema de Cauchy (67) é possível determinar o da integração ao longo do eixo real, Figura 11, curvas γ_1 e γ_2 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz &= - \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\omega} f(z) dz \\ &= -\ln|1 - 2\rho\beta| - i\pi \end{aligned} \quad (78)$$

Da parametrização usada na integral ao longo da curva Γ , equação (70), tem-se que $z(0) = 2\rho$, por outro lado para $\theta = 0$ tem-se $z = \sqrt{\frac{R_0}{r}} - 1$, e, portanto, $\rho = \mu$, de modo que:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -\ln|1 - \beta\mu| \quad (79)$$

Tomando a parte real de (78) junto com o Teorema de Cauchy, equação (67), chega-se na solução buscada para I_{3A}

$$I_{3A} = -\ln|1 - 2\rho\beta| \quad (80)$$

Assim, a solução da integral I , equação (42), em função da variável μ fica:

$$\begin{aligned} I = & -R_0 \left[\arctan \mu + \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right] - 2r_s \arctan \mu \\ & - r_s \beta \ln \left| \frac{1 + \beta\mu}{1 - \beta\mu} \right| + B \end{aligned} \quad (81)$$

com B uma combinação das constantes B_1 , B_2 e B_3 . Escrevendo a solução da integral em função da variável r , equação (36), a expressão acima leva ao resultado apresentado na equação (15)

$$\begin{aligned} t(r) = & \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s} - 1} \\ & \times \left((R_0 + 2r_s) \arctan \left(\sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right) + r \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right) \\ & + \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{\sqrt{r(R_0 - r_s)} + \sqrt{r_s(R_0 - r)}}{\sqrt{r(R_0 - r_s)} - \sqrt{r_s(R_0 - r)}} \right| + B \end{aligned} \quad (82)$$

Destacando que as constantes de cada uma das integrais I_1 , I_2 , e I_3 não tem significado físico, elas foram associadas a uma constante única, B , que está diretamente associada à condição inicial adotada para o problema. Adotando, por exemplo, $t(R_0) = t_0$, chega-se em $B = t_0$.

Apêndice C

A integral a ser resolvida é a da expressão (17):

$$J = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \int \left(\frac{R_0}{r} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (83)$$

Aqui será usada a mesma mudança de variável empregada no apêndice B, equação (36), que leva a:

$$J = \frac{2R_0}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \int \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \quad (84)$$

A solução da integral:

$$\int \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \quad (85)$$

já foi detalhada no apêndice B. Assim, chega-se no resultado para I :

$$J = \frac{R_0}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2} + \arctan \mu \right) + C$$

em que C corresponde à constante de integração.

Retornando à variável r , obtém-se então o resultado da expressão (18):

$$J = \frac{R_0}{c} \sqrt{\frac{R_0}{r_s}} \left[\frac{r}{R_0} \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} + \arctan \sqrt{\frac{R_0}{r} - 1} \right] + C \quad (86)$$

Disponibilidade de dados

Os dados que sustentam as conclusões deste artigo não estão disponíveis publicamente no momento da publicação, pois não é tecnicamente viável. Os dados estão disponíveis com os autores e poderão ser enviados mediante solicitação.

Referências

- [1] R.L. Numbers e K. Kampourakis (ed.), *Newton's Apple and Other Myths about Science* (Harvard University Press, Cambridge, 2015).
- [2] I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (Desaint et Saillant, Paris, 1759).
- [3] A. Einstein, em: H.A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, *O princípio da relatividade* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1983), 3 ed.
- [4] A. Augousti, M. Gawełczyk, A. Siwek e A. Radosz, Eur. J. Phys. **33**, 1 (2012).

- [5] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological* (Oxford University Press, New York, 2006), 2 ed.
- [6] H. Minkowski, em: H.A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, *O princípio da relatividade* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1983), 3 ed.
- [7] C. Misner, K. Thorne e J. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman, San Francisco, 1973), 1 ed.
- [8] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [9] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2022).
- [10] N. Christensen e T. Moore, Phys. Today **65**, 41 (2012).
- [11] A. Saa, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, e4201 (2016).
- [12] J. Hartle, *Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity* (Pearson, Harlow, 2014), 1 ed.
- [13] Y. Zel'dovich e I. Novikov, *Stars and Relativity* (Dover, New York, 2015).
- [14] R. Lindquist e J. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29**, 431 (1957).
- [15] P. Crawford e I. Tereno, Gen. Rel. & Grav. **34**, 2075 (2002).
- [16] M.D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
- [17] P. Szekeres, Publ. Math. Debrecen **7**, 285 (1960).
- [18] K. Thorne, *The Science of Interstellar* (W.W. Norton, New York, 2014).
- [19] K. Kassner, Eur. J. Phys. **38**, 015605 (2017).
- [20] R.K. Sachs e H.H. Wu, *General Relativity for Mathematicians* (Springer, New York, 1977).
- [21] W.J. Brown e R.V. Churchill, *Variáveis complexas e aplicações* (AMGH, Porto Alegre, 2015).